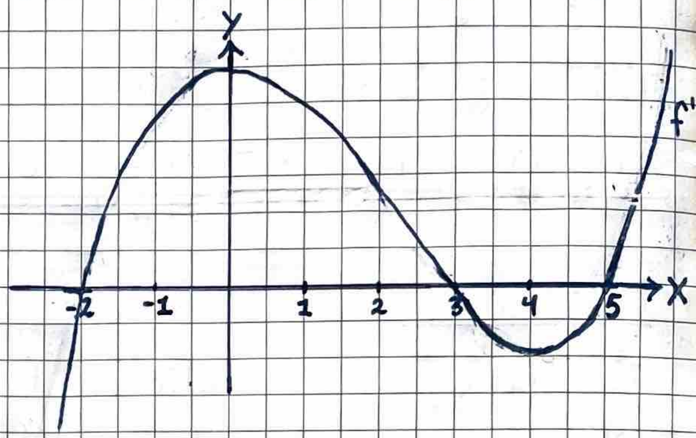
# Hjemmeopgave 4:

## Del 1: Uden hjælpemidler

### Opgave 1.:

- Grafen for den afledede funktion, $f'$ for en funktion, $f$ i intervallet $[-3;6]$:




- Bestem monotoniforholdene for funktionen, $f$ i intervallet $[-3,6]$:

- Vi ved, at når $f'(x)=0$, vil funktionen $f$, have et ekstremumspunkt.

Da $f'$ har 3 skæringspunkter med x-aksen, vil $f$ have 3 ekstremumspunkter, ved hhv. $x=-2$, $x=3$ & $x=5$.

Monotoniforhold for $f$ i intervallet $[-3;6]$:

- Funktionen er aftagende i $[-3;-2]$, da $f'<0$.
- Funktionen har et lokalt minimumspunkt i $x=-2$, da $f'=0$.
- Funktionen er voksende i $[-2;3]$, da $f'>0$.
- Funktionen har et lokalt maksimumspunkt i $x=3$.
- Funktionen er aftagende i $[3;5]$, da $f'<0$.
- Funktionen har endnu et lokalt minimumspunkt i $x=5$.
- Funktionen er voksende i $[5;6]$.

---

### Opgave 2.: Bestem tallet $t$, så vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\2t-3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\7t-5\end{pmatrix}$ er parallelle ($\vec{a}\parallel\vec{b}$):

- Vi ved, at $\vec{a}\parallel\vec{b}$, når: $\det(\vec{a},\vec{b})=0$.

Determinanten udregnes:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix}2 & 4\\2t-3 & 7t-5\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2\cdot(7t-5)-(2t-3)\cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow (14t-10)-(8t-12) = 0$$

$$\Rightarrow 6t+2 = 0$$

## Opgave 2. (fortsat):

$\Rightarrow 6t = -2$

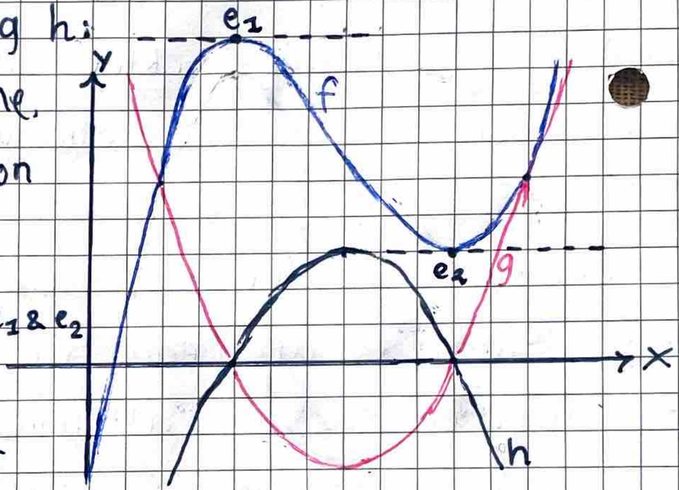
$\Rightarrow \frac{6t}{6} = \frac{-2}{6}$

$\Rightarrow t = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

Dvs. at for $t = -\frac{1}{3}$ er de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.

## Opgave 3.:

- Graferne for 3 funktioner, f, g og h:




Gør rede for, hvilken af funktionerne, g & h, der er den afledede funktion til f:

- Vi ved, at ved ekstremumspunkter, $e_1$ & $e_2$ for f, vil den afledede funktion skære x-aksen, hvilket gælder for både g og h.
- Derudover kan vi aflæse, at f er voksende hen mod ekstremumspunkt $e_1$, aftagende mellem $e_1$ og $e_2$, og voksende efter $e_2$.

Således bør den afledede funktion fra $]-\infty; e_1] > 0$, fra $[e_1; e_2] < 0$, og fra $[e_2; \infty[ > 0$, hvilket alene gælder for g.

Altså må funktionen g være den afledede funktion til f.

**Opgave 4.:** Bestem tallet c, så andengradsligningen $3x^2 - 2x + c = 0$ har netop én løsning:

· Det gælder, at en 2.-gradsligning har én løsning, når dens diskriminat $= 0$.

- Jeg bestemmer derfor c, så diskriminanten, $d = 0$:

· $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Så, $d = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 0$

$\Rightarrow 4 - 12c = 0$

$\Rightarrow -12c = -4$

$\Rightarrow \frac{-12c}{-12} = \frac{-4}{-12}$

$\Rightarrow c = \frac{4}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

- Dette kan jeg nu tjekke efter ved at indsætte $c = \frac{1}{3}$ i ovenstående ligning.

$d = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$

$\Rightarrow 4 - 4 = 0$

Dvs. at for $c = \frac{1}{3}$ har 2. gradsligningen netop én løsning.

---

**Opgave 5.:** Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er bestemt ved:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5+t \end{pmatrix}$, hvor t er et tal.

a) Bestem t, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale ($\vec{a} \perp \vec{b}$):

· Vi ved, at $\vec{a} \perp \vec{b}$, når: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Således løser vi ligningen,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5+t \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow t \cdot 2 + 4 \cdot (-5 + t) = 0$

$\Rightarrow 2t - 20 + 4t = 0$

$\Rightarrow 6t - 20 = 0$

## Opgave 5. (fortsat):

$\Rightarrow 6t = 20$

$\Rightarrow \frac{6t}{6} = \frac{20}{6}$

$\Rightarrow t = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

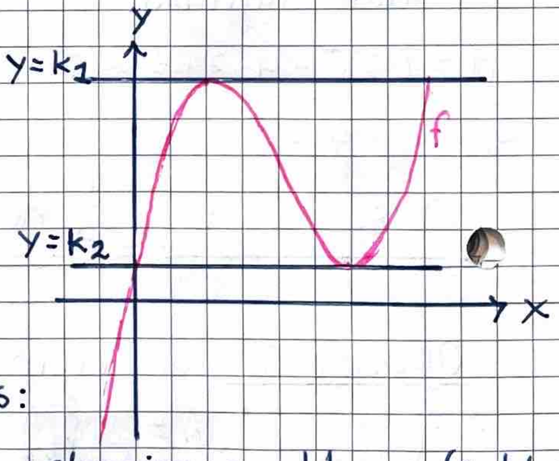
Dvs. for $t = \frac{10}{3}$ er $\vec{a} \perp \vec{b}$.

## Opgave 6.: En funktion f er givet ved

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Bestem de 2 værdier af k, for hvilke ligningen $f(x) = k$ har præcis 2 løsninger:

- Det ses af figuren, at den vandrette linje $y = k$ vil have netop 2 skæringer ved funktionens f 2 ekstremumspunkter.




- x-værdierne for ekstremumspunkterne findes via. den afledede funktion, $f'$, hvor $f'(x) = 0$.

• f differentieres:

$f'(x) = 3x^{3-1} - 6 \cdot 2x^{2-1} + 9 = 3x^2 - 12x + 9$

• Ligningen $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$ løses:

- Da $f'(x)$ er et 2. grads polynomium, kan skæringspunkterne (rødderne) findes med formlen:

$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$, hvor d (diskriminanten) $= b^2 - 4ac$.

• $d = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 144 - 108 = 36$ $>0$, hermed 2 rødder.

• $\frac{-(-12) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 6}{6} = \begin{cases} \frac{18}{6} = 3 \\ \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$

$x = 3 \lor x = 1$.

Opgave 6. (fortsat):

Så ved $x = 1$ og $x = 3$ har funktionen, f et ekstremums-Punkt, hvor funktionsværdien = hhv. $k_1$ & $k_2$.

Funktionsværdien findes:

$k_1 = f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = \underline{\underline{5}}$

$k_2 = f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = \underline{\underline{1}}$

Dvs. for $k = 5$ og $k = 1$ vil funktionen $y = k$ have netop 2 skæringer med funktionen, f.

---

Opgave 7.: $f(x) = x^2 + 3x + 1$

Bestem $f'(x)$, og ligningen til tangenten for f i punktet $P(2, f(2))$:

$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$

Så $P(2, f(2)) = P(2, 11)$

$f'(x) = 2x + 3$

$f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$ ← tangenthældningen

$y = 7x + b$

$\Rightarrow 11 = 7 \cdot 2 + b$

$\Rightarrow 11 - 14 = b$

$\Rightarrow b = -3$

Altså er ligningen til tangenten for f i punktet $P(2, 11)$:

$\underline{\underline{t(x) = 7x - 3.}}$

---

Opgave 8.: En parabel er graf for funktionen
$p(x) = x^2 - 10x + 24$
Bestem førstekoordinaten til hvert af parablens skærings-
punkter med 1.-aksen:
- Disse kan findes med formlen:
$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$, hvor $d = b^2 - 4ac$
- $d = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 100 - 96 = \underline{4}$ $>0$, hermed 2 rødder
- $\frac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{12}{2} = 6 \\ \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$

$x = 6 \lor x = 4$
Så ved $\underline{x = 4}$ og $\underline{x = 6}$ skærer parablen førsteaksen.

---

Opgave 9.: I en population af bananfluer kan udviklingen
i antal fluer beskrives ved modellen
$N(t) = 23 \cdot 1{,}386^t$,
hvor $N(t)$ betegner antal fluer til tidspunktet $t$ (målt i døgn).
Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen
i antal fluer i populationen:
- Ovenstående model viser en eksponentiel vækst i antal fluer, hvor populationen stiger over tid, og er altså således en eksponentielt voksende funktion på forskriften: $f(x) = b \cdot a^x$, hvor $b$ = begyndelsesværdien og $a$ = fremskrivningsfaktoren.
- I dette tilfælde var begyndelsesværdien dermed $\underline{23}$ fluer, og fremskrivningsfaktoren $= 1{,}386$, svarende til en vækstprocent på 38,6 %.

Således stiger antallet af fluer i populationen med 38,6% pr. døgn.

Opgave 10.: $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 7$

Bestem monotoniforholdene for f:

- Vi ved, at når $f'(x) = 0$, vil funtionen f have et ekstremumspunkt.
- f(x) differentieres:

$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$

Ligningen $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0$ løses:

- Da dette er et andengradspolynomium, kan rødderne / skæringspunkterne findes med formlen:

$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$, hvor $d = b^2 - 4ac$

- $d = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -6 = 9 + 72 = 81 > 0$, hermed 2 rødder.
- $\frac{-(-3) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm 9}{6} = \begin{cases} \frac{12}{6} = 2 \\ \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$

$x = 2 \quad \vee \quad x = -1$

- Jeg opstiller en monotonilinje:

| x | | -1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | ÷ | 0 | + |
| f(x) | ↗ | | ↘ | | ↗ |

- For at afgøre om disse nulpunkter karakteriserer et maksimum- eller minimumspunkt, undersøges om $f'(x_0)$ er positiv eller negativ i intervallerne mellem nulpunkterne.
- Jeg vælger et tilfældigt punkt i intervallet og ser på fortegnet af f' i dette punkt:

- $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$, hermed negativ, hvorfor f(x) er aftagende.
- $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 6 = 12 + 6 - 6 = 12 > 0$, hermed positiv, hvorfor f(x) er voksende.
- $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 6 = 27 - 9 - 6 = 12 > 0$, hermed positiv, hvorfor f(x) er voksende.

- Da f(x) er hhv. voksende før og aftagende efter ekstremumspunktet $x = -1$, svarer dette til et lokalt maksimum, mens f(x) er aftagende før og voksende efter ekstremumspunktet $x = 2$, svarer dette til et lokalt minimum.

Opgave 11.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) Bestem skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

• Den generelle formel for skalarproduktet, $\vec{a} \cdot \vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Så i dette tilfælde:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 7 = -12 + 21 = \underline{\underline{9}}$$

b) Bestem koordinatsættet til projektionen $\vec{b}_a$ af vektor $\vec{b}$ på vektor $\vec{a}$:

• Den generelle formel for projektionen $\vec{b}_a$: $\vec{b}_a = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

Så i dette tilfælde:

$$\vec{b}_a = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}}{\sqrt{6^2 + 3^2}^2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{6 \cdot -2 + 3 \cdot 7}{\sqrt{45}^2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{9}{45} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}}}$$

---

Opgave 12.: $f(x) = (x^3 - 8) \cdot \ln(x)$, $x > 0$

a) Løs ligningen $f(x) = 0$:

Så, $(x^3 - 8) \ln(x) = 0 \Rightarrow (x^3 - 8) = 0 \vee \ln(x) = 0$ ← nulreglen

$\Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow \underline{x = 2}$

$\vee \ln(x) = 0 \Rightarrow e^{\ln(x)} = e^0 \Rightarrow \underline{x = 1}$

Dermed er $f(x) = 0$ for $x = 1$ og $x = 2$.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$:

- Tangenthældningen findes ved differentiering:

$$f'(x) = (x^3 - 8)' \cdot \ln(x) + (x^3 - 8) \cdot \ln(x)' = 3x^2 \cdot \ln(x) + (x^3 - 8) \cdot \frac{1}{x}$$

• $f'(1) = 3 \cdot 1^2 \cdot \ln(1) + (1^3 - 8) \cdot \frac{1}{1} = 3 \cdot 1 \cdot 0 + (1 - 8) \cdot 1 = 0 - 7 = -7$

- Vi ved, fra opg. 12.a), at $f(1) = 0$.

Dermed er punktet $P(1, f(1)) = P(1, 0)$

Opgave 12. (fortsat):

- Ligningen for tangenten i P findes:

$y = -7x + b$

$0 = -7 \cdot 1 + b$

$0 + 7 = b$

$b = 7$

Dermed er tangentens ligning i $P(1,0)$: $t(x) = -7x + 7$.

$with(Gym):$

# Del 2: med hjælpemidler

## Opgave 13:

$f(x) := -x^4 + x^3 + 2x^2$

$$f := x \mapsto -x^4 + x^3 + 2 \cdot x^2 \qquad (1)$$

**a) Bestem monotoniforholdene for f:**

$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x$

$reelSolve \cdot (f'(x))$

$$reelSolve(-4x^3 + 3x^2 + 4x) \qquad (2)$$

Jeg faktoriserer f'(x):
$f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x = x(-4x^2 + 3x + 4)$

Ved anvendelse af *nulreglen* findes nulpunkter idet, at f'(x) = 0, når enten x = 0 eller $(-4x^2 + 3x + 4) = 0$.
Da er et 2.gradspolynomium, kan rødderne/skæringspunkterne med x-aksen findes med formlerne:

$r1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$

$$r1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \qquad (3)$$

$r2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$

$$r2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \qquad (4)$$

hvor diskriminanten,
$d = b^2 - 4ac$

$$d = b^2 - 4ac \qquad (5)$$

$d = 3^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 4$

$$d = 73 \tag{6}$$

Da 73 > 0, er der 2 rødder, som kan findes med ovenstående formler.

$$r1 = \frac{-3 - \sqrt{73}}{2 \cdot (-4)}$$

$$r1 = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{73}}{8} \tag{7}$$

$$r2 = \frac{-3 + \sqrt{73}}{2 \cdot (-4)}$$

$$r2 = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{73}}{8} \tag{8}$$

Altså er f'(x) = 0 for x= $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{73}}{8}$ ($\approx$-0,69) og x= 0 og x= $\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{73}}{8}$ ($\approx$1,44 ), hvor f(x) har ekstremumspunkter.

For at afgøre om disse nulpunkter karakteriserer et minimumspunkt eller et maksimumspunkt, undersøges om f'(x0) er positiv eller negativ i intervallerne mellem nulpunkterne.
Jeg vælger et tilfældigt punkt i intervallet og ser på fortegnet af f' i dette punkt:

$$f'(-1) = -4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1)$$

$$3 = 3 \tag{9}$$

Da 3 > 0, og hermed er positiv, er f(x) voksende.

$$f'(-0.5) = -4 \cdot (-0.5)^3 + 3 \cdot (-0.5)^2 + 4 \cdot (-0.5)$$

$$-0.750 = -0.750 \tag{10}$$

Da -0 ,75 < 0 , og hermed er negativ, er f(x) aftagende.

$$f'(1) = -4 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1$$

$$3 = 3 \tag{11}$$

Da 3 > 0, og hermed er positiv, er f(x) voksende.

$$f'(2) = -4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2$$

$$-12 = -12 \tag{12}$$

Da -12 < 0, og hermed er negativ, er f(x) aftagende.

*Monotoniforholdene* for funktionen f kan dermed opskrives:
Funktionen er voksende i intervallet ]-$\infty$;-0,69] og intervallet [0 ;1,44].
Funktionen er aftagende i intervallet [-0,69 ; 0] og intervallet [1,44 : $\infty$[.
Funktionen har lokalt maksimumspunkt i x = -0,69 og x = 1,44.
Funktionen har lokalt minimumspunkt i x = 0.

**b) Løs ligningen f(x) = 2**

$reelSolve(f(x) = 2)$

$$\frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}{3}+\frac{2}{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}, 1 \tag{13}$$

$evalf(\%)$

$$1.769292354, 1. \tag{14}$$

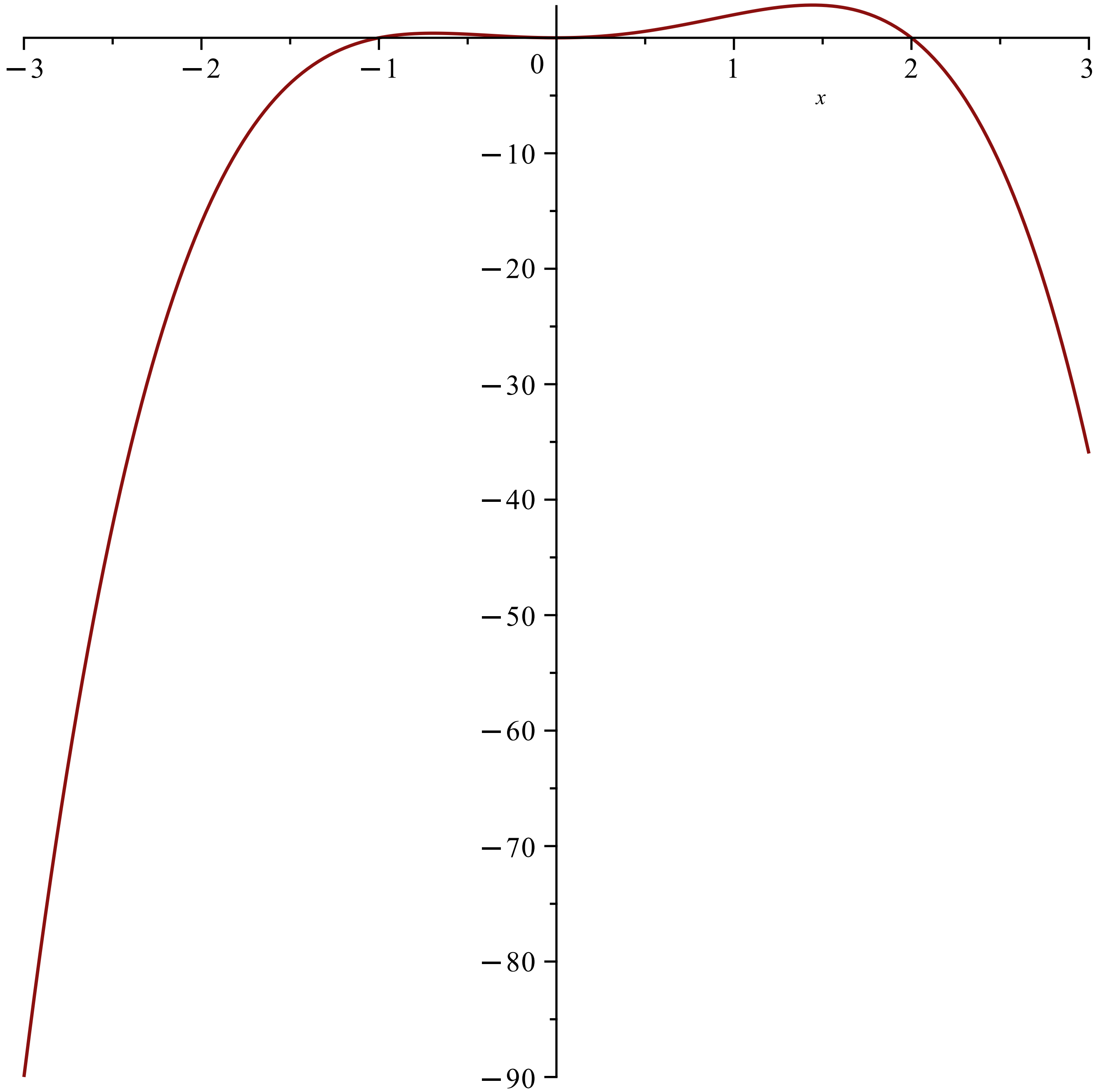
Altså er f(x) = 2 for x=1 og x ≈ 1,77.

En vandret linje l har ligningen y = k, hvor k er et tal.

**c) Bestem de værdier af tallet k, for hvilke linjen l har netop 3 punkter fælles med grafen for f:**

For at hjælpe plottes grafen for f(x):

$plot(f(x), x = -3..3)$




Figuren viser grafen for f(x) i intervallet [-3 ; 3].

Af figuren ses, at der vil være 2 løsninger for hvilke linjen l y = k har netop 3 skæringer med grafen for f, hhv. i  k= f(0) og k= f(-0,69), hvor f(x) har ekstremumspunkter.

K beregnes:

$f(0)$

$$0 \tag{15}$$

$f(-0.693000468)$

$$0.3970463409 \tag{16}$$

Så l har har netop 3 skæringer med grafen for f ved k = 0 og k = 0,40.

*restart* :

## Opgave 14:

*with*(*Gym*) :

Kendskabet til bladareal er helt afgørende for vurdering af planteavlspotentialet i forskellige afgrøder. På en planteavlsstation i Argentina fandt man, at potensmodellen

$$B(x) = 0{,}69 \cdot x^{1{,}48}, \quad 3 \le x \le 17,$$

med god tilnærmelse beskriver sammenhængen mellem bladarealet $B(x)$ (målt i $cm^2$) og bladlængden $x$ (målt i cm) for en række forskellige sorter af pekannødder.

**a) Bestem bladarealet for et 10 cm langt blad:**

$b(x) := 0.69 \cdot x^{1.48}$

$$b := x \mapsto 0.69 \cdot x^{1.48} \qquad \textbf{(17)}$$

$b(10)$

$$20.83766687 \qquad \textbf{(18)}$$

Bladarealet for et 10 cm langt blad er dermed 20,84 $cm^2$.

**b) Med hvor mange procent øges bladarealet, når bladets længde øges med 25%?**

For en potensfunktion gælder, at når x ganges med tallet k, så ganges f(x) med tallet $k^a$, svarende til:

$f(k \cdot x) = k^a \cdot f(x)$

$$f(k\,x) = k^a f(x) \qquad \textbf{(19)}$$

Hermed fås:

$b(1.25 \cdot x) = k^a$

$1.25^{1.48}$

$$1.391319331 \qquad \textbf{(20)}$$

Derfor øges bladarealet med 39%, når bladets længde øges med 25%.

Når producenterne foretager overslagsberegninger i marken anvender de en simplere lineær model

$$O(x) = 3x - 8, \quad 3 \leq x \leq 17 \ ,$$

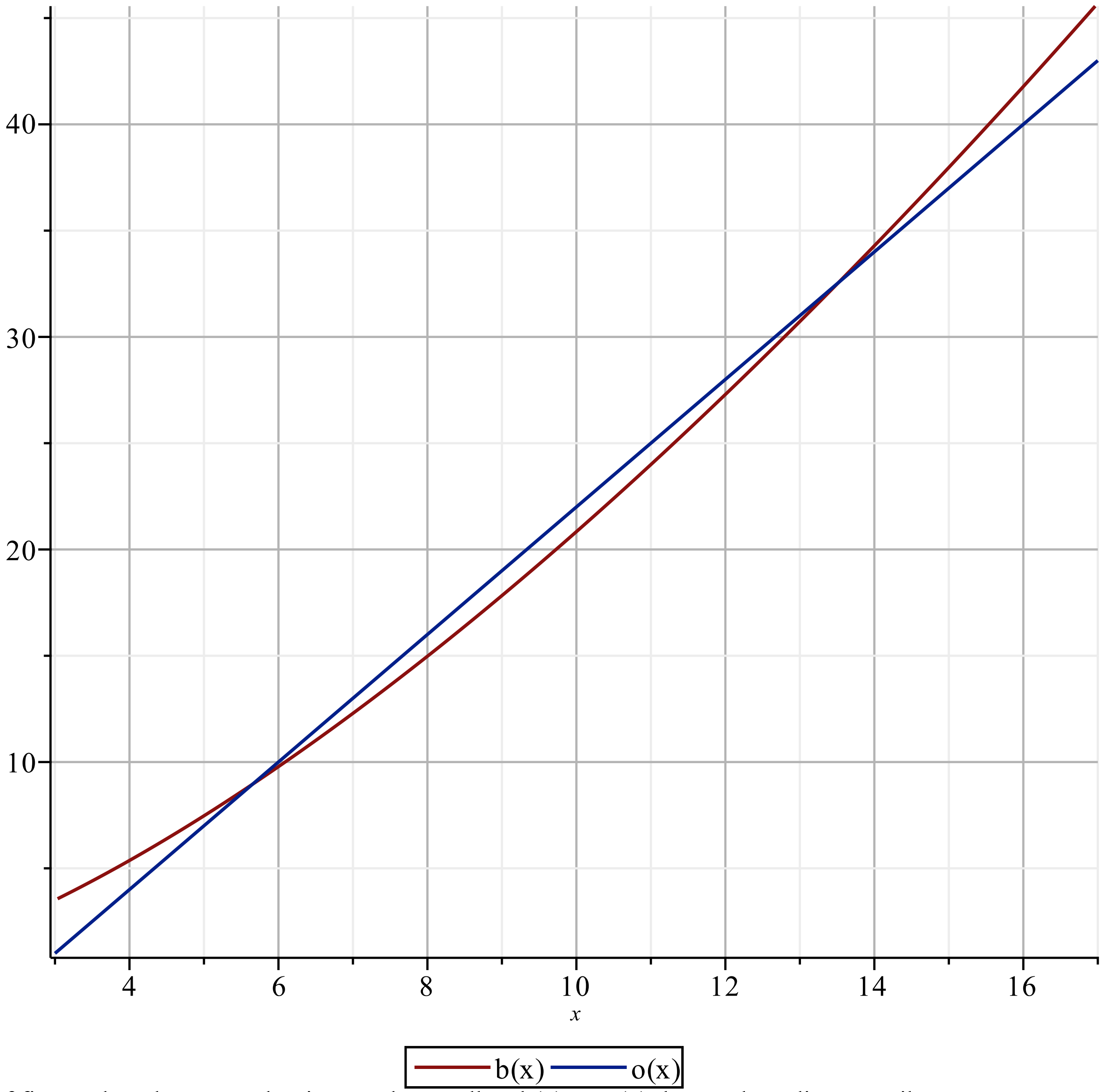
hvor $O(x)$ er overslaget over bladarealet (målt i $cm^2$) for et blad, hvis længde er $x$.

c) Skitsér graferne for $B$ og $O$ i samme koordinatsystem, og bestem de bladlængder, hvor overslagsberegningen giver det samme bladareal som den mere præcise potensmodel.

$o(x) := 3x - 8$

$$o := x \mapsto 3 \cdot x - 8 \qquad \textbf{(21)}$$

$plot([b(x), o(x)], x = 3 ..17)$




Af figuren kan der ses to skæringspunkter mellem b(x) og o(x), hvor x-koordinaterne til skæringspunkterne kan aflæses til hhv. ca x = 5,5 og x = 13,5, svarende til de bladlængder, hvor modellerne giver samme bladareal.

De præcise x-koordinater kan også findes, ved at løse ligningen:
b(x) = o(x)
$\Rightarrow\ 0.69 \cdot x^{1.48} = 3\,x - 8$

$reelSolve(b(x) = o(x))$

$$5.651817132,\ 13.51864511 \qquad \textbf{(22)}$$

$b(5.651817132)$

$$8.955451391 \tag{23}$$

$b(13.51864511)$

$$32.55593541 \tag{24}$$

Således giver maple os, at de to modeller giver samme bladareal for bladlængderne 5,65 cm (ved et bladareal på 8,96 $cm^2$) og 13,52 cm (ved et bladareal på 32,56 $cm^2$).

*restart* :

## Opgave 14:

*with*(*Gym*) :

$f(x) := e^x - 3x - 5$

$$f := x \mapsto e^x - 3 \cdot x - 5 \tag{25}$$

For at bestemme monotoniforholdene for f, differentieres f og hermed findes den afledede funktion f'(x):

$f'(x)$

$$e^x - 3 \tag{26}$$

Funktionens ekstremumspunkter findes ved at løse ligningen: f'(x) = 0:

$reelSolve(f'(x) = 0)$

$$\ln(3) \tag{27}$$

$evalf(\%)$

$$1.098612289 \tag{28}$$

Således har funktionen f ekstremumspunkt i x $\approx$1,10.

For at afgøre om dette nulpunkt karakteriserer et minimumspunkt eller et maksimumspunkt, undersøges om f'(x0) er positiv eller negativ i intervallerne omkring nulpunktet.

Jeg vælger et tilfældigt punkt i intervallet og ser på fortegnet af f' i dette punkt:

$f'(1)$

$$e - 3 \tag{29}$$

$evalf(\%)$

$$-0.281718172 \tag{30}$$

Da -0,28 < 0 , og hermed er negativ, er f(x) aftagende.

$f'(2)$

$$e^2 - 3 \qquad (31)$$

*evalf*(%)

$$4.389056099 \qquad (32)$$

Da 4,39 > 0, og hermed er positiv, er f(x) voksende.

*Monotoniforholdene* for funktionen f kan dermed opskrives:
Funktionen er aftagende i intervallet ]-∞;1,10].
Funktionen har et globalt minimumspunkt i x = 1,10.
Funktionen er voksende i intervallet [1,10 ; ∞[.

En linje l er givet ligningen y = 4x - 1.
**b) Bestem koordinatsættet til det punkt på grafen for f, hvor tangenten er parallel med linjen l:**

Hældningskoefficienten for linjen l = 4.

Tangenthældningen til vilkårlige punkter på f beskrives ved den afledede funktion f'(x). For at en tangent til f skal være parallel med l, må de have samme hældningskoefficient.

Således løses ligningen: f'(x) = 4:

*reelSolve*$(f'(x) = 4)$

$$\ln(7) \qquad (33)$$

*evalf*(%)

$$1.945910149 \qquad (34)$$

$f(1.945910149)$

$$-3.837730447 \qquad (35)$$

Til x = 1,95 vil tangenten til f være parallel med l, hvilket sker i y = -3,84.

<u>Koordinatsættet til dette punkt på f, hvor tangenten er parallel med l, er derfor: (1,95 ; -3,84)</u>

Ekstra:
For at illustrere dette, er graferne for f og l afbilledet i nedenstående figur:

$l(x) := 4x - 1$

$$l := x \mapsto 4 \cdot x - 1 \qquad (36)$$

Tangentens ligning findes:
y=4x+b
$-3.837730447 = 4 \cdot 1.945910149 + b$
$-3.837730447$ -7,7836406 = b
$\Rightarrow$ b = -11, 623171

Tangentens ligning er derfor:
$t(x) := 4\,x - 11.62$

$$t := x \mapsto 4 \cdot x - 11.62 \tag{37}$$

$plot([f(x), l(x), t(x)], x = -5..5)$