

Mat A STX
Nogle eksamensopgaver efter emner
Til og med sommer 2022

Indhold

Emne	Side
Differentialregning med emner fra Mat B og C uden hjælpemidler	2
Integralregning uden hjælpemidler	9
Integralregning uden hjælpemidler	13
Differentialligninger uden hjælpemidler	18
Differentialligninger med hjælpemidler	24
Trigonometriske funktioner uden hjælpemidler	31
Vektorfunktioner og banekurver uden hjælpemidler	34
Vektorfunktioner og banekurver med hjælpemidler	39
Funktioner af to variable uden hjælpemidler	47
Funktioner af to variable med hjælpemidler	48
Normalfordeling uden hjælpemidler	54
Normalfordeling med hjælpemidler	59
Lineær regression uden hjælpemidler	64
Keglesnit uden hjælpemidler	68
Keglesnit med hjælpemidler	69

Differentialregning og emner fra Mat B og C

Uden hjælpemidler

Opgave 1 a) Løs ligningen

(10 point)

$$x \cdot (3x - 9) = 0.$$

Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

(10 point)

a) Bestem $f'(x)$.

Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{x^2-9}, \quad x > 0.$$

(10 point)

a) Bestem $f(3)$.

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \sqrt{\ln(x) + 9}, \quad x > 0.$$

(10 point)

b) Bestem $g(f(x))$.

Opgave 6 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2 - x - 2) \cdot e^x.$$

(10 point)

a) Bestem $f'(x)$.

(10 point)

b) Løs ligningen $(x^2 - x - 2) \cdot e^x = 0$.

Opgave 8 En funktion f er givet ved

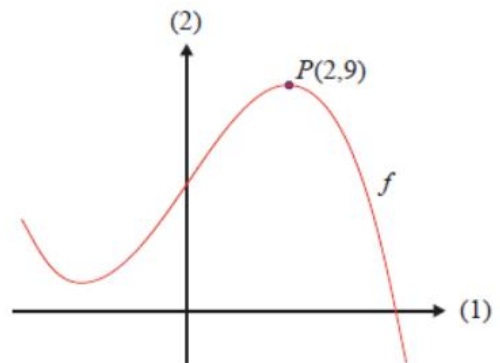
$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x + 5,$$

hvor a og b er konstanter.

Det oplyses, at f har et lokalt maksimum i $P(2,9)$.

(10 point)

a) Bestem a og b .



Opgave 6 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(x) \cdot (x - 2), \quad x > 0.$$

(10 point)

a) Løs ligningen $f(x) = 0$.

(10 point)

b) Bestem $f'(1)$.

Opgave 9 En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 + a \cdot x - 6 \cdot y = 0,$$

hvor a er en konstant.

(10 point)

a) Bestem a , så cirklen går igennem punktet $P(2,6)$.

(10 point)

b) Bestem de to værdier for a , for hvilke cirklen har radius 5.

Opgave 2 En funktion f er bestemt ved forskriften

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{x-1}.$$

(5 point)

a) Bestem $f(1)$.

(10 point)

b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Opgave 8 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 1.$$

(10 point)

a) Vis, at $f'(-1) = -1$.

(10 point)

b) Bestem den anden værdi k , der opfylder, at $f'(k) = k$.

Opgave 3 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \cdot e^x.$$

(10 point)

a) Bestem $f'(x)$.

(5 point)

b) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

Opgave 10 En funktion f er givet ved

$$f(x) = (a \cdot x + b)^2,$$

hvor a og b er konstanter og $b < 0$.

Det oplyses, at $f'(0) = 2b$ og $f(1) = 4$.

(10 point)

a) Bestem a og b .

Opgave 3 a) Reducér udtrykket

(10 point)

$$\frac{a \cdot (4a + 6)}{2a}.$$

Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3x - 6 \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

En linje l er givet ved ligningen $y = 2x - 7$. Grafen for f har netop én tangent t , der er parallel med l .

(10 point) a) Bestem førstekoordinaten til røringpunktet mellem t og grafen for f .

Opgave 11 En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{2x-4}.$$

(5 point) a) Bestem $f'(x)$.

Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x+2) \cdot (x-5) \cdot e^x.$$

(5 point) a) Bestem $f(0)$.

(5 point) b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Opgave 7 I et koordinatsystem er to punkter givet ved $A(4,3)$ og $B(11,4)$. Punktet P ligger på førsteaksen og har samme afstand til A og B .

(10 point) a) Tegn en model af situationen, og bestem førstekoordinaten til P .

Opgave 1 a) Reducér udtrykket

(10 point)
$$5ab - 4a^2 + (2a - b)^2.$$

Opgave 7 En funktion f er givet ved

Til opgaven hører
et bilag.

$$f(x) = 3x + 24.$$

Den omvendte funktion til f betegnes g .

(5 point) a) Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem.

(5 point) b) Bestem en forskrift for g .

Opgave 2 En funktion f er bestemt ved forskriften

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{x-1}.$$

(5 point) a) Bestem $f(1)$.

(10 point) b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Opgave 2 Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = 4x - 1 \text{ og } g(x) = x^3.$$

(10 point) a) Bestem $f(g(2))$.

Opgave 5 a) Løs for $x > 0$ ligningen

(10 point) $(x^2 - 9) \cdot \ln(x) = 0$.

Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x + \sin(x) + 4.$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.

(10 point) b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 3x - 4.$$

En funktion F er stamfunktion til f .

(10 point) a) Bestem monotoniforholdene for F .

Opgave 2 a) Løs ligningen

(10 point) $(x - 3) \cdot (2x - 5) = 0.$

Opgave 3 Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 + 5$$

$$g(x) = 4 \cdot \sqrt{x}.$$

(10 point) a) Bestem $f(2)$ og $g(f(2))$.

Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^4 \cdot \sin(x).$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.

Opgave 7. En funktion f er givet ved

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 1.$$

Det oplyses, at $f(x)$ har et lokalt maksimum i punktet $P(1, 2)$.

(10 point) a) Bestem tallene a og b .

Opgave 8 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 4.$$

(10 point)

a) Bestem $f'(x)$, og løs ligningen $f'(x) = 0$.

En funktion g er givet ved

$$g(x) = x^3 + k \cdot x + 4, \text{ hvor } k \text{ er et tal.}$$

(10 point)

b) For hvilke værdier af tallet k har grafen for g ingen vandrette tangenter?

Opgave 6 En funktion f er bestemt ved

$$f'(x) = (2x + 3) \cdot \ln(x).$$

(10 point)

a) Bestem $f'(x)$.

(10 point)

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Opgave 4 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(4 \cdot x^2 + 1).$$

(10 point)

a) Bestem $f'(x)$.

Opgave 5

(10 point)

a) Reducér udtrykket $\frac{(a^2 - b^2) \cdot 5}{(a + b) \cdot 10}$.

Opgave 4. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = e^x - 2,$$

$$g(x) = \ln(x + 2), \quad x > -2.$$

(10 point)

a) Bestem $f(g(x))$.

(10 point)

b) Løs ligningen $f(x)g(x) = 0$.

Integralregning

Uden hjælpemidler

Opgave 1 a) Bestem det ubestemte integral

(10 point)

$$\int (3x^2 + 2x + 6) dx.$$

Opgave 1 a) Bestem integralet

(10 point)

$$\int (e^x + 5) dx.$$

Opgave 1 a) Bestem

(10 point)

$$\int (e^x + 6 \cdot x^2 + 4) dx.$$

Opgave 10 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x}, \quad x > 0.$$

(10 point)

a) Bestem $\int f(x) dx$.

Opgave 2 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

(10 point)

a) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem $P(1, 7)$.

Opgave 2 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x.$$

(10 point)

a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1, 10)$.

Opgave 8 a) Bestem integralet

(10 point)
$$\int 2x \cdot e^{x^2-4} dx.$$

Opgave 2 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 - 2x + 1.$$

(10 point) a) Bestem $\int f(x) dx.$

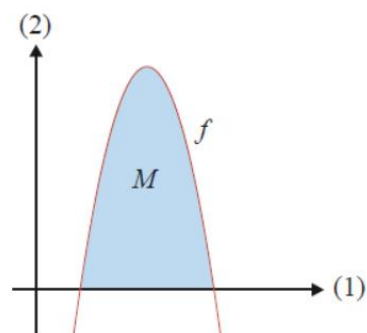
Opgave 6 En funktion f er givet ved

$$f(x) = -3x^2 + 12x - 9.$$

(10 point) a) Løs ligningen $f(x) = 0.$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M , der har et areal.

(10 point) b) Bestem arealet af $M.$



Opgave 2 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 - 2x + 1.$$

(10 point) a) Bestem $\int f(x) dx.$

I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med førsteaksen samt linjerne $x = 1$ og $x = 3$ en punktmængde M , der har et areal.

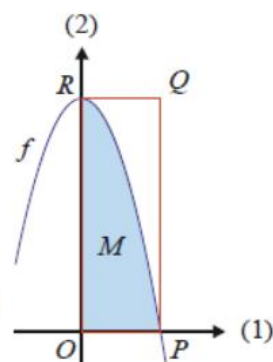
(10 point) b) Bestem arealet af $M.$

Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = k^2 - x^2, \quad k > 0.$$

Grafen for f afgrænser i første kvadrant sammen med de to koordinataksler en punktmængde M , der har et areal.

På figuren ses grafen for f , punktmængden M samt et rektangel $OPQR$ i første kvadrant, hvor O er origo, P er grafens skæring med førsteaksen, og R er grafens skæring med andenaksen.



(5 point) a) Bestem koordinatsættet til punktet P udtrykt ved k .

(5 point) b) Vis, at arealet af M udgør $\frac{2}{3}$ af arealet af rektanglet $OPQR$.

Opgave 1 a) Bestem integralet

(10 point)

$$\int (x^2 + 8x) dx.$$

Opgave 2 a) Bestem integralet

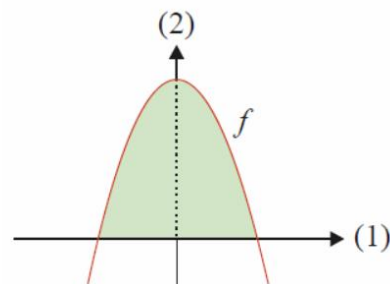
(10 point)

$$\int (4e^x + 3x^2) dx.$$

Opgave 8 Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = 4 - x^2.$$

(10 point) a) Bestem arealet af det farvede område på figuren.



Opgave 6 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 4x^3 - 2x.$$

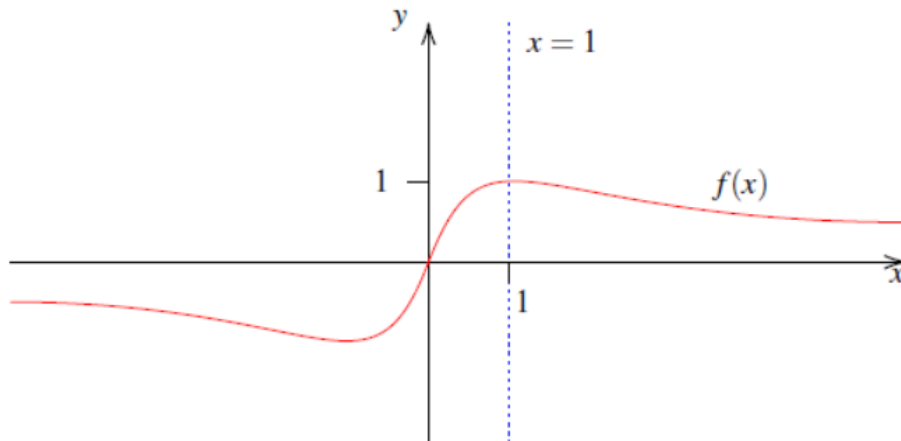
(10 point) a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går igennem punktet $P(2, 18)$.

Opgave 2. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

(10 point) a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(0, 2)$.

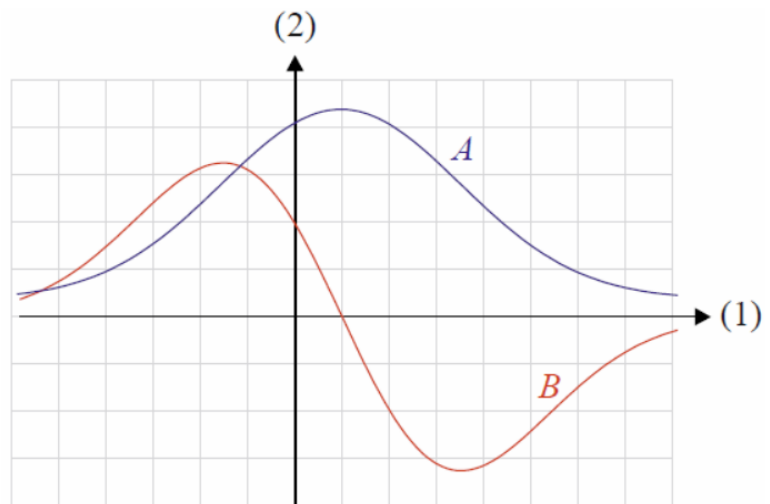
Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen, andenaksen og linjen med ligningen $x = 1$ en punktmængde M , der har et areal.



(10 point) b) Bestem arealet af M .

Opgave 9

Bilag vedlagt



Figuren viser graferne for en funktion f og en stamfunktion F til f .

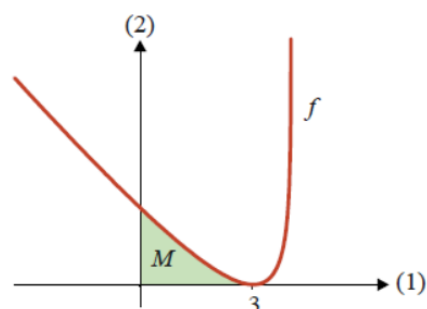
(10 point) a) Gør rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion.

Med hjælpemidler

Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3 - x - \ln(4 - x), \quad x < 4.$$

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i første kvadrant en punktmængde M , der har et areal.



(10 point)

a) Bestem arealet af M .

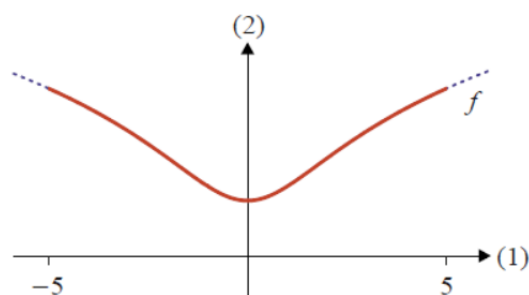
(10 point)

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

Opgave 9 På figuren ses grafen for en funktion f , der er givet ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 3).$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjerne $x = -5$ og $x = 5$ en punktmængde M , der har et areal.



(10 point)

a) Bestem arealet af M .

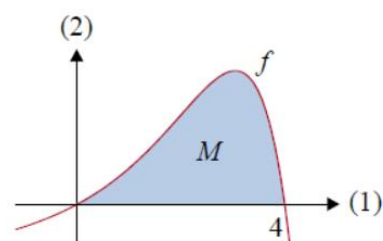
(10 point)

b) Bestem kurvelængden for grafen for f i intervallet $-5 \leq x \leq 5$.

Opgave 10 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (e^x - 1) \cdot (4 - x).$$

I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med førsteaksen en punktmængde M , der har et areal.



(10 point)

a) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen.

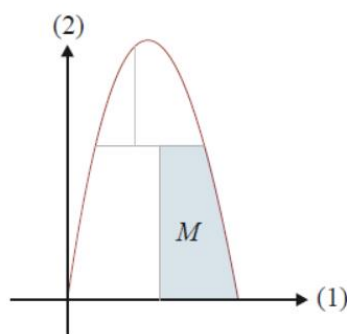
(10 point)

b) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(0,0)$.

Opgave 16



Foto: www.colourbox.dk



Ovenfor ses et billede af bygningen Fjordenshus samt en todimensional model af et af vinduerne indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. I modellen har vinduet form som en del af en parabel. Vinduet er 3,7 meter bredt forneden og har en højde på 5,5 meter.

- (10 point) a) Opstil en regneforskrift for den funktion, hvis graf beskriver parabelen.

Vinduet er inddelt i fire felter. Det skraverede felt M på figuren er afgrænset af parabelen, førsteaksen og linjerne med ligningerne $x = 2,3$ og $y = 3,1$.

- (10 point) b) Bestem arealet af feltet M .

Opgave 14 Den hastighed, som vandstanden i verdenshavene stiger med, kan beskrives ved modellen

$$f(t) = 0,084 \cdot t + 2,$$

hvor $f(t)$ er hastigheden (målt i mm/år), og t er antal år efter 1991.

- (10 point) a) Hvilken hastighed stiger vandstanden med i 2022 ifølge modellen?

- (10 point) b) Bestem $\int_0^{31} f(t) dt$, og forklar betydningen af dette tal.

Opgave 11 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x-2} - x + 2.$$

- (10 point) a) Bestem funktionens nulpunkter.

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for f et område M i første kvadrant.

- (10 point) b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Opgave 12



Dronning Alexandrines Bro (www.colourbox.dk)

På billedet ses Dronning Alexandrines Bro, som består af en række buer fastgjort på bropiller og en kørebane.

I en model i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser kan den del af den midterste bue, der ligger over bropillerne, beskrives ved den positive del af grafen for

$$f(x) = -0,0104 \cdot x^2 + 41,7.$$

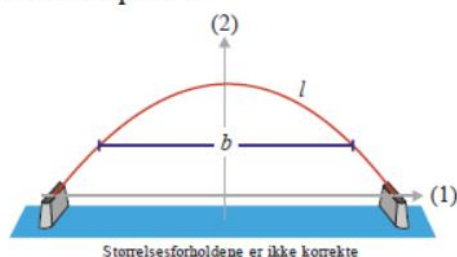
I modellen er kørebanen vandret og ligger 26 meter over bropillerne.

(10 point)

- a) Benyt modellen til at bestemme bredden b af buen målt langs kørebanen (se figur).

(10 point)

- b) Benyt modellen til at bestemme længden l af buen fra bropille til bropille (se figur).



Opgave 12 En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^x - 2x + 5.$$

(10 point)

- a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(0,10)$.

Opgave 10 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(x) - 3x^2 + 10, \quad x > 0.$$

(10 point)

- a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1,20)$.

Opgave 10



Foto: www.colourbox.dk

En funktion f er givet ved

$$f(x) = -0,0034x^3 + 0,077x^2 - 0,3x + 2,46.$$

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser og linjen med ligningen $x = 14,5$ en punktmængde M , der har et areal.

(10 point)

a) Tegn grafen for f , og bestem arealet af M .

I en model af et drikkeglas har det indre af glasset form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen. Enheden på akserne er cm.

(10 point)

b) Bestem rumfanget af væsken i glasset, når glasset er fyldt til randen.

Opgave 10

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 0,126 \cdot (45 - x^{1,2}) \cdot x^{0,5}, \quad 0 \leq x \leq 23.$$

Grafen for f , koordinatsystemets førsteakse og linjen med ligningen $x = 23$ afgrænser et område M , der har et areal.

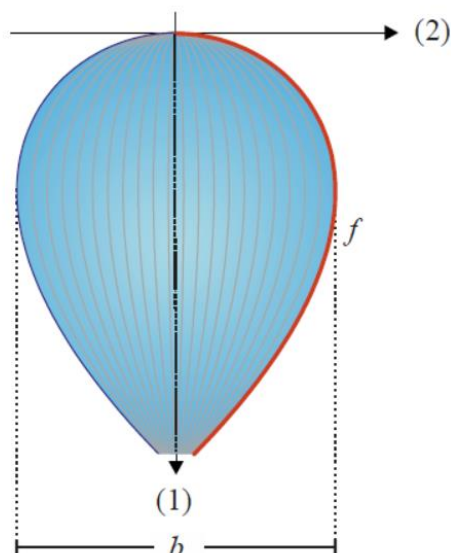
I en model kan formen af en varmluftsballon beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° omkring førsteaksen i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.

(10 point)

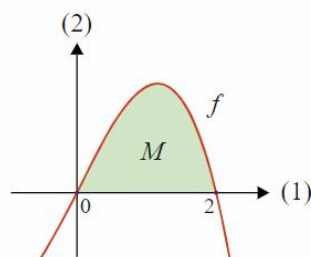
a) Benyt modellen til at bestemme volumen af ballonen.

(10 point)

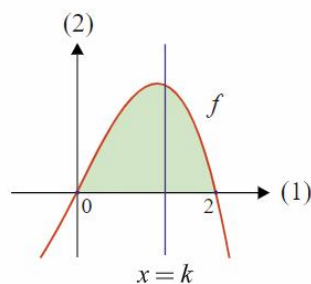
b) Benyt modellen til at bestemme bredden b af ballonen (se figuren).



Opgave 11



Figur 1



Figur 2

Figur 1 viser grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^3.$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i første kvadrant et område M .

(10 point)

a) Bestem arealet af M .

På figur 2 er området delt i to dele af en lodret linje med ligning $x = k$, hvor $0 < k < 2$.

(10 point)

b) Bestem tallet k , så de to dele af området får samme areal.

Opgave 15 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4x^2 - x^3.$$

(10 point)

a) Bestem nulpunkterne for f .

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for f et område M_1 i første kvadrant.

(10 point)

b) Bestem arealet af M_1 .

En anden funktion g er givet ved

$$g(x) = k \cdot x^2 - x^3, \text{ hvor } k \text{ er et positivt tal.}$$

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for g et område M_2 i første kvadrant.

(10 point)

c) Bestem tallet k , så M_2 får arealet 44.

Differentialligninger

Uden hjælpemidler

Opgave 2 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = x \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2, 7)$.

(10 point)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{2x} + x^2.$$

(10 point)

a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 2 \cdot (y + x - x^2).$$

Opgave 7 Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning på formen $y' = k \cdot y$.

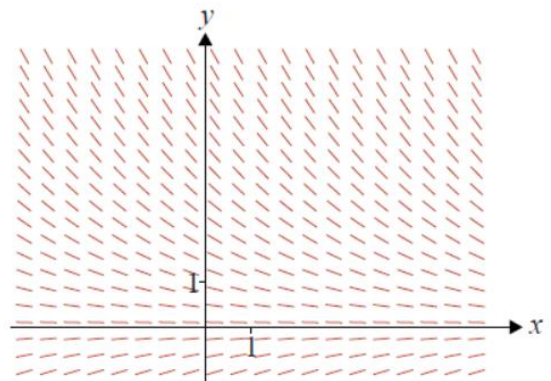
Funktionerne f , g og h er givet ved

$$f(x) = e^{-0,3x}$$

$$g(x) = 4e^{-0,3x}$$

$$h(x) = 4e^{0,3x}.$$

Til opgaven
hører et bilag.



(10 point)

a) Argumentér for, hvilken af funktionerne f , g og h , der ikke kan være en løsning til differentialligningen.

Benyt eventuelt det vedlagte bilag

Opgave 2 En funktion f er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot y + 2}{x}.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(5, 2)$.

(10 point)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P .

Opgave 4 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = x \cdot y + 5.$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem punktet $P(1, 10)$.

(10 point)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Opgave 5 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 0,1 \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(0, 6)$.

(10 point)

a) Bestem linjeelementet i P .

(5 point)

b) Bestem en forskrift for f .

Opgave 7 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 0,5 \cdot y.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0, 6)$.

(10 point)

a) Bestem linjeelementet i P , og gør rede for hvad dette fortæller om grafens forløb.

(10 point)

b) Bestem en forskrift for f .

Opgave 4 En funktion f er løsning til differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (y - 1),$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2, 5)$.

(10 point)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Opgave 8 En differentiaalligning er givet ved

$$y' = 20 - 4 \cdot y.$$

(10 point)

a) Bestem linjeelementet for differentiaalligningen i punktet $P_0(x_0, y_0) = (0, 3)$.

(10 point)

b) Bestem en forskrift for den løsning f til differentiaalligningen, hvis graf går gennem punktet P_0 .

Opgave 9



I en model kan temperaturudviklingen i et vandbad under afkøling beskrives ved en funktion f , hvor $f(t)$ betegner vandbadets temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$) til tidspunktet t (målt i minutter).

I modellen er væksthastigheden for vandbadets temperatur proportional med forskellen mellem omgivelsernes temperatur og vandbadets temperatur.

Det oplyses, at omgivelsernes temperatur er 22°C , og at proportionalitetskonstanten er $0,01\text{s}^{-1}$.

(10 point)

a) Bestem væksthastigheden for vandbadets temperatur, når vandbadets temperatur er 50°C .

(5 point)

b) Opskriv en differentiaalligning, som f må være en løsning til.

Opgave 8 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 2y \cdot (8 - y).$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0, 2)$.

(10 point)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

(10 point)

b) Bestem en forskrift for f .

Opgave 5 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 6 - \frac{1}{2}y.$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem punktet $(0, 8)$.

(10 point)

a) Bestem $f'(0)$.

(10 point)

b) Bestem en forskrift for f .

Opgave 2 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = x \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2, 7)$.

(10 point)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

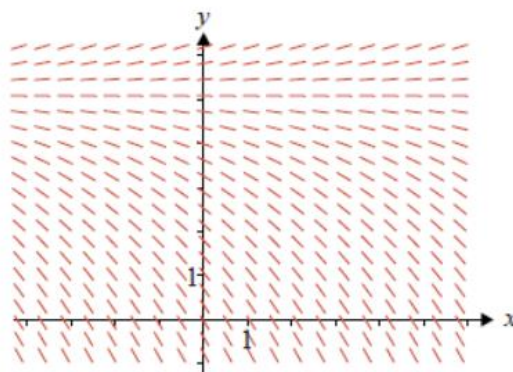
Opgave 8 Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning.

Til opgaven hører et bilag.

Det oplyses, at funktionen f er en løsning til differentialligningen, samt at $f(0) = 4$.

10 point

a) Benyt vedlagte bilag til at tegne grafen for f .



Opgave 4 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = x \cdot y + 5.$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem punktet $P(1, 10)$.

(10 point)

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Opgave 7 På figuren ses et hældningsfelt hørende til differentialligningen

$$y' = a \cdot y \cdot (8 - y).$$

Til opgaven hører et bilag.

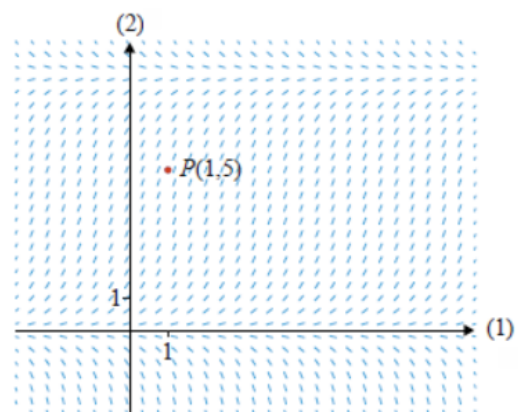
Funktionen f er løsning til differentialligningen. Grafen for f går gennem punktet $P(1, 5)$.

(10 point)

- a) Indtegn en skitse af grafen for f på det vedlagte bilag.

(10 point)

- b) Bestem a , når det oplyses, at $f'(1) = 3$.



Opgave 6 På figuren ses hældningsfeltet hørende til differentialligningen

Bilag vedlagt $y' = -\frac{1}{2}y.$

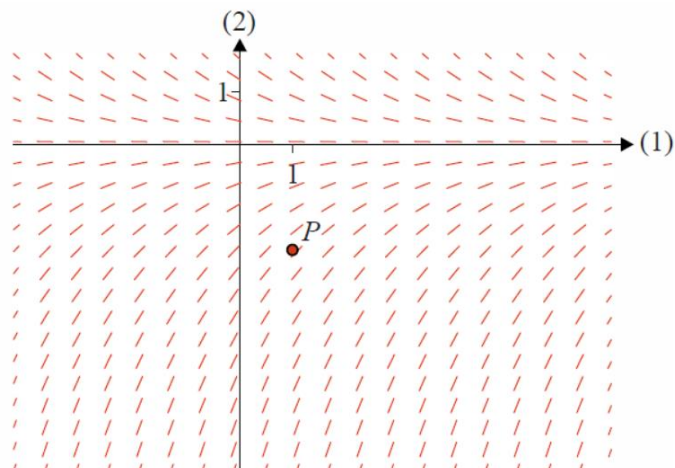
Grafen for en løsning f til differentialligningen går gennem punktet $P(1, -2)$.

(10 point)

- a) Skitsér grafen for f på bilaget.

(10 point)

- b) Bestem en forskrift for f .



Opgave 5 Der er givet differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

(10 point)

a) Bestem linjeelementet i punktet $P(0, 1)$.

(10 point)

b) Gør rede for, at funktionen f med forskriften

$$f(x) = 3 \cdot e^x - 2 \cdot (x + 1)$$

er en løsning til differentiaalligningen.

Opgave 9 I en model kan antallet af en bestemt type bakterier i en madrest beskrives ved en funktion B af tiden t . Den hastighed, hvormed antallet af bakterier vokser til tidspunktet t (målt i minutter), er proportional med antallet $B(t)$ af bakterier (målt i mio.). Proportionalitetsfaktoren er $k = 0,035$.

(10 point)

a) Opskriv en differentiaalligning, som B må opfylde.



Billedkilde: Colourbox

Opgave 3. En differentiaalligning er givet ved

$$y' = 4 - 2y.$$

(10 point)

a) Bestem linjeelementet for differentiaalligningen i punktet $P(x_0, y_0) = (0, 3)$.

(10 point)

b) Undersøg, om funktionen $f(x) = 2 + e^{-2x}$ er en løsning til differentiaalligningen.

Med hjælpemidler

Opgave 14 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = y + x - x^2.$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem $P(1,3)$.

(10 point)

a) Bestem en forskrift for f .

Opgave 11 En differentialligning er givet ved

$$y' = y + x^2.$$

(10 point)

a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

Det oplyses, at funktionen f er løsning til differentialligningen, og at grafen for f går gennem punktet $P(0, -1)$.

(10 point)

b) Bestem en forskrift for f .

Opgave 9 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 5y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(1,3)$.

(10 point)

a) Bestem en forskrift for f .

Opgave 12 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 8 - 2y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(0,2)$.

(10 point)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Opgave 10 Der er givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{y}{x}.$$

(10 point)

- a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

En funktion f er løsning til differentialligningen.
Grafen for f går gennem punktet $P(2,3)$.

(10 point)

- b) Bestem $f'(2)$.

Opgave 12



Foto: www.colourbox.dk

I en model kan udviklingen af antallet af bjørne i et bestemt habitat beskrives ved differentialligningen

$$N' = -0,00001 \cdot N^3 + 0,0051 \cdot N^2 - 0,05 \cdot N,$$

hvor $N(t)$ betegner antallet af bjørne til tidspunktet t (målt i år).

(10 point)

- a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen sammen med løsningskurven gennem punktet $(0,100)$.

(10 point)

- b) Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden for antallet af bjørne, når der er 100 bjørne i habitatet.

(5 point)

- c) Bestem henholdsvis det mindste og det største antal bjørne, der kan være i habitatet, så antallet af bjørne ifølge modellen er voksende.

Opgave 10 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0,045 \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(0,100)$.

(10 point)

a) Bestem en forskrift for f .

I en model kan udviklingen i temperaturen af en portion suppe beskrives ved ovenstående differentialligning, hvor y betegner suppens temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$) til tidspunktet t (målt i minutter).

(10 point)

b) Bestem væksthastigheden for suppens temperatur, når suppens temperatur er 50°C .



Opgave 13 Befolkningsudviklingen i Taiwan i perioden 1996-2019 kan i en model beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dP}{dt} = 0,003641 \cdot P \cdot (23,95 - P),$$

hvor $P(t)$ er antallet af indbyggere i Taiwan (målt i millioner), og t er antal år efter 1996. I 1996 var der 21,53 millioner indbyggere i Taiwan.

(10 point)

a) Bestem en forskrift for P .

(10 point)

b) Bestem $P'(23)$, og forklar betydningen af dette tal.

Opgave 14



Foto: www.colourbox.dk

I et område lever en bestand af rensdyr. I en model kan udviklingen i antallet af rensdyr i bestanden beskrives ved en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 0,23 \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{1073}\right) - s \cdot y,$$

hvor y betegner antallet af rensdyr i bestanden (målt i tusinde) til tidspunktet t (målt i år), og s betegner andelen af rensdyr, der bliver skudt om året.

(10 point)

- a) Tegn et hældningsfelt når $s = 0,01$ i vinduet $[0;10] \times [0;1200]$.

Det oplyses, at bestanden af rensdyr er 900 tusinde til tidspunktet $t = 0$.

(10 point)

- b) Bestem en løsning til differentialligningen når $s = 0,01$.

Man ønsker, at bestanden af rensdyr i området holdes konstant på 900 tusinde.

(5 point)

- c) Benyt modellen til at bestemme antallet af rensdyr, der skal skydes om året.

Opgave 15

I et tomt tragtformet kar påbegyndes en løbende tilføring af en flygtig væske. Væsken fordamper løbende fra overfladen. I en model kan udviklingen i væskemængden i karret beskrives ved en funktion V , der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = 0,1 - 0,016 \cdot V^{\frac{2}{3}},$$

hvor $V(t)$ betegner væskemængden i karret (målt i L) til tidspunktet t (målt i timer efter påfyldningen begyndte).

(10 point)

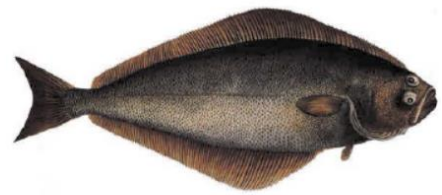
- a) Bestem den hastighed, hvormed væskemængden i karret ændres, når væskemængden i karret er 10 L.

(10 point)

- b) Bestem den øvre grænse for væskemængden i karret.

Opgave 12 Den samlede biomasse af en population af helleflyndere i et område af Stillehavet kan beskrives ved modellen

$$\frac{dy}{dx} = 0,71 \cdot \left(1 - \frac{y}{80,5}\right) \cdot y,$$



Billedkilde: Wikipedia

hvor $y = f(x)$ er populationens samlede biomasse (målt i mio. kg),
og x er tiden (målt i år).

Til tidspunktet $x = 0$ er den samlede biomasse 20,1 mio. kg.

- (10 point) a) Med hvilken hastighed vokser den samlede biomasse til tidspunktet $x = 0$?
- (10 point) b) Bestem et udtryk for den samlede biomasse $f(x)$.
- (10 point) c) Til hvilket tidspunkt når den samlede biomasse op på 75 mio. kg?

Opgave 12.



Foto: Aswathy N

På en ø sættes 200 kaniner ud til tidspunktet $t = 0$. Udviklingen af kaniner kan beskrives ved den logistiske differentialligning

$$\frac{dN}{dt} = 0.0009N(t)(1250 - N(t)).$$

Hvor $N(t)$ er antal kaniner i populationen og t er antal år efter kaninerne blev sluppet fri.

- (10 point) a) Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden til det tidspunkt, hvor antallet af kaniner var 400.
- (10 point) b) Bestem en forskrift for $N(t)$.
- (10 point) c) Undersøg hvor mange år der går før antallet af kaniner på øen er 1060.

Opgave 9



Foto: Freepik.com

I en model kan udviklingen i verdens samlede kapacitet til produktion af vedvarende energi i perioden 2001 – 2018 beskrives ved en funktion K , der er løsning til differentialligningen

$$K' = 0,00106 \cdot K \cdot (222,9 - K),$$

hvor $K(t)$ betegner kapaciteten (målt i GW) til tidspunktet t (målt i antal år efter 2001).

Det oplyses, at verdens samlede kapacitet af vedvarende energi i 2001 var 18 GW.

(10 point)

a) Bestem en forskrift for K .

(10 point)

b) Giv en fortolkning af tallet 222,9 i modellen.

(10 point)

c) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt t , hvor kapaciteten vokser hurtigst.

Opgave 15



Nedenstående tabel viser sammenhørende værdier af befolkningstallet og befolknings-tilvæksten i Indien i en periode fra 1960 og frem.

Befolkningstal (mio.)	449	498	554	621	697	782	870	960	1053	1144	1231	1309
Befolkningstilvækst (mio. pr. år)	8	9,8	11,2	13,4	15,2	17	17,6	18,0	18,6	18,2	17,4	15,6

(Tabellen findes også i bilaget "Indiens_befolkningstal.xlsx")

I en model kan sammenhængen beskrives ved en differentialligning af typen

$$y' = a \cdot y^2 + b \cdot y + c,$$

hvor y og y' betegner henholdsvis befolkningstallet (målt i mio.) og befolknings-tilvæksten (målt i mio. pr. år) til tidspunktet t (målt i år efter 1960).

(10 point)

a) Benyt tabellens data til at bestemme a , b og c .

Det oplyses, at befolkningstallet i Indien i 1960 var 449 mio.

(10 point)

b) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen sammen med løsningskurven for udviklingen i Indiens befolkningstal efter 1960.

(5 point)

c) Benyt modellen til at bestemme det maksimale befolkningstal i Indien efter 1960.

Opgave 10



Billedkilde: Miljøstyrelsen

En fiskeribiolog undersøger udviklingen i antallet af fisk i et stort bassin. Udviklingen kan beskrives ved differentiallyigningen

$$y' = 0,5 \cdot y \cdot (1 - 0,0002 \cdot y) - 0,06 \cdot y,$$

hvor y er antallet af fisk i bassinet t år efter undersøgelsens start. Ved undersøgelsens start er der 3500 fisk i bassinet.

(10 point)

a) Med hvilken hastighed vokser antallet af fisk i bassinet ved undersøgelsens start?

(10 point)

b) Bestem antallet af fisk i bassinet efter 5 år.

Trigonometriske funktioner

Uden hjælpemidler

Opgave 3 En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(x) = A \cdot \sin(x),$$

Til opgaven hører et bilag.

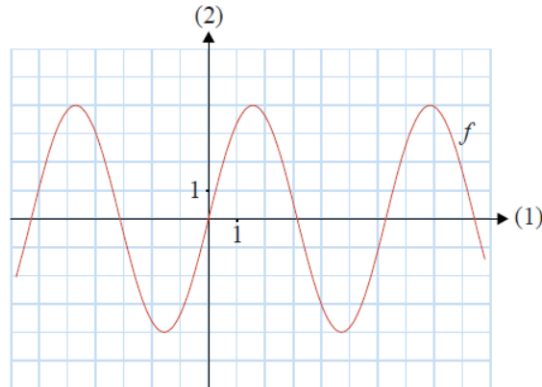
hvor A er en konstant.

På figuren ses grafen for f .

(10 point)

a) Bestem A .

Benyt eventuelt det vedlagte bilag.



Opgave 5 På figuren ses graferne A , B og C for tre harmoniske svingninger.

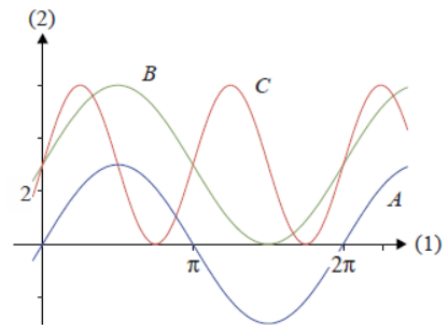
Til opgaven hører et bilag

En harmonisk svingning f er bestemt ved

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x) + 3.$$

(10 point)

a) Gør rede for, hvilken af de tre grafer A , B og C , der er graf for f .
Benyt eventuelt vedlagte bilag.



Opgave 4 En funktion f er givet ved

Til opgaven hører et bilag.

$$f(x) = \sin(x) + 1.$$

(10 point)

a) Skitsér grafen for f i intervallet $[0; 2\pi]$. Benyt vedlagte bilag.

(10 point)

b) Bestem $f'(\pi)$.

Opgave 3 En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(t) = 6 \cdot \sin(\pi \cdot t) + 5.$$

(5 point)

a) Angiv amplituden A .

(10 point)

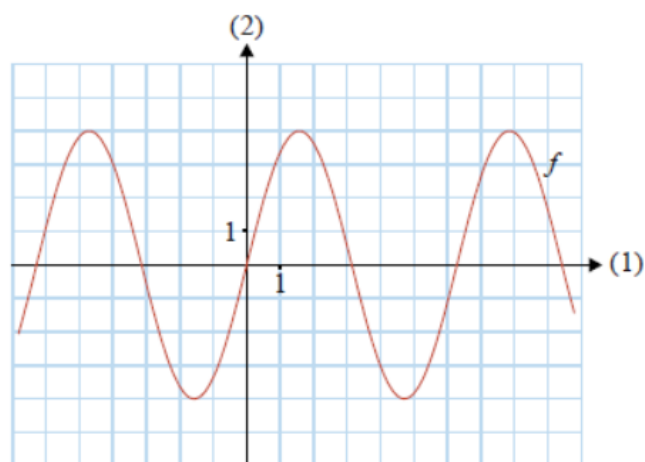
b) Bestem $f'(1)$.

Opgave 2 En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(x) = A \cdot \sin(x),$$

hvor A er en konstant.

Til opgaven
hører et bilag.



På figuren ses grafen for f , når $A = 4$.

(10 point)

a) Tegn grafen for f , når $A = 2$.

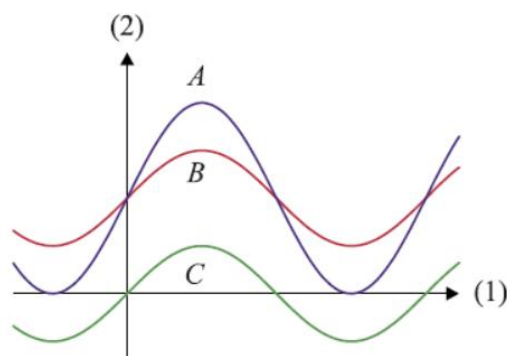
Benyt eventuelt det vedlagte bilag.

Opgave 3 På figuren ses graferne A , B og C for tre harmoniske svingninger:

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \sin(x) + 2$$

$$h(x) = 2 \cdot \sin(x) + 2$$



(10 point)

a) Gör for hver af graferne A , B og C rede for, hvilken af funktionerne f , g og h den hører til.

Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x + \sin(x) + 4.$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.

(10 point) b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^4 \cdot \sin(x).$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.

Opgave 7 En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(t) = 4 \cdot \sin(t) + 10.$$

(10 point) a) Bestem størsteværdi og mindsteværdi for f .

Vektorfunktioner og banekurver

Uden hjælpemidler

Opgave 1 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2-4t \end{pmatrix}.$$

(10 point)

a) Bestem $\vec{s}(1)$.

(10 point)

b) Bestem $\vec{s}'(t)$.

Opgave 5 En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2t - 3 \\ t + 1 \end{pmatrix}.$$

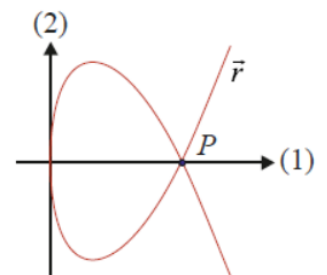
(10 point)

a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem parameterkurven for $\vec{r}$ og andenaksen.

Opgave 3 En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 4t \end{pmatrix}.$$

På parameterkurven for $\vec{r}$ er punktet P et dobbeltpunkt hørende til t -værdierne $t = 2$ og $t = t_0$.



(5 point)

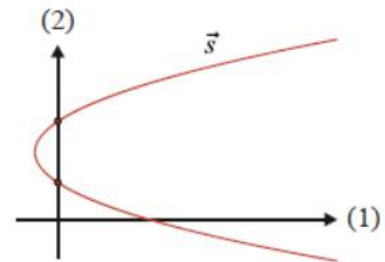
a) Bestem koordinatsættet til punktet P .

(10 point)

b) Bestem t_0 .

Opgave 1 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 7t + 10 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



(10 point)

a) Bestem $\vec{s}'(t)$.

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ skærer andenaksen i punkterne P og Q .

(10 point)

b) Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne P og Q .

Opgave 5 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 5 + 5 \cdot \cos(t) \\ 7 + 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Parameterkurven for $\vec{s}$ er en cirkel.

(10 point)

a) Bestem centrum og radius for cirklen.

Linjen l er tangent til cirklen i punktet $P(8, 11)$.

(10 point)

b) Bestem en ligning for l .

Opgave 8 En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved forskriften

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t - 3 \end{pmatrix}.$$

(10 point)

a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem koordinatsystemets akser og parameterkurven for $\vec{r}$.

Opgave 1 I et koordinatsystem er en vektorfunktion $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}.$$

(5 point)

a) Bestem $\vec{r}(1)$.

(10 point)

b) Undersøg, om punktet $Q(7,8)$ ligger på banekurven for $\vec{r}$.

Opgave 1 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

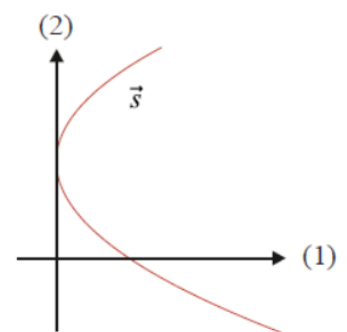
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot t^2 \\ 2 \cdot t + 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(10 point)

a) Bestem $\vec{s}(1)$.

(10 point)

b) Undersøg, om parameterkurven for $\vec{s}$ går igennem punktet $P(2,10)$.



Opgave 3 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \cdot \cos(t) \\ 6 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Parameterkurven for $\vec{s}$ er en cirkel.

(10 point)

a) Bestem centrum og radius for cirklen.

(10 point)

b) Bestem $\vec{s}(0)$.

(10 point)

c) Bestem $\vec{s}'(t)$.

Opgave 7 I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at stedvektoren til P til tidspunktet t er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ \frac{1}{2}t^2 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(5 point)

a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 0$.

Linjen l er bestemt ved ligningen

$$l: x - y = 2.$$

(10 point)

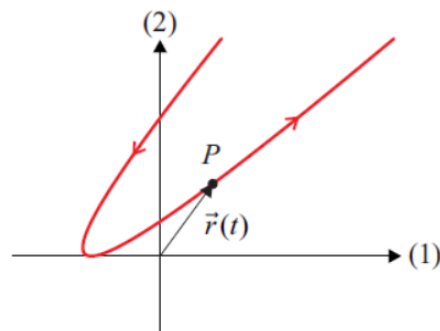
b) Bestem de to tidspunkter, hvor hastighedsvektoren er parallel med l .

Opgave 1 I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at til tidspunktet t er stedvektoren $\vec{r}(t)$ til P er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t - 2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad -4 \leq t \leq 4.$$

(10 point)

a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 2$.



Opgave 4 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{3}t^3 - 9t \end{pmatrix}.$$

(10 point)

a) Bestem hastighedsfunktionen $\vec{v}(t)$.

(10 point)

b) For hvilke parameterværdier t har banekurven en vandret tangent?

Opgave 3 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 9 \\ t + 6 \end{pmatrix}.$$

(10 point)

a) Bestem $\vec{s}(-1)$.

(10 point)

b) Bestem en ligning for tangenten til banekurven for $\vec{s}$ i punktet P_0 svarende til parameterværdien $t_0 = -1$.

Opgave 1. En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t + 3 \\ t - 1 \end{pmatrix}.$$

(10 point) a) Bestem $\vec{r}'(2)$.

(10 point) b) Undersøg, om $P(3, 1)$ ligger på banekurven for $\vec{r}(t)$.

Vektorfunktioner og banekurver

Med hjælpemidler

Opgave 15 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ t^3 - 4t + 3 \end{pmatrix}, \quad -3 \leq t \leq 3.$$

(10 point)

a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ har et dobbeltpunkt P svarende til parameterværdien $t = 2$.

(10 point)

b) Bestem den anden parameterværdi hørende til dobbeltpunktet P .

(10 point)

c) Bestem den spidse vinkel mellem de to tangenter til parameterkurven for $\vec{s}$ i P .

Opgave 13



Foto: www.colourbox.dk

En cykel har monteret en refleks på forhjulet (se billedet). Når cyklen sættes i bevægelse, kan refleksens position i en model beskrives ved banekurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,95 \cdot t - 0,23 \cdot \sin(15 \cdot t) \\ 0,33 - 0,23 \cdot \cos(15 \cdot t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

hvor $x(t)$ og $y(t)$ måles i meter, og t måles i sekunder, efter cyklen sættes i bevægelse.

(10 point)

a) Tegn banekurven for refleksens position.

(10 point)

b) Benyt modellen til at bestemme refleksens maksimale højde over jorden.

Opgave 15



Grafik: www.colourbox.dk

En krage flyver hen over en sti og taber en nød. I en model kan nøddens position i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser beskrives ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 30 - 4,91 \cdot t^2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

hvor $\vec{s}(t)$ betegner stedvektoren til nøddens position over stien til tidspunktet t (målt i sekunder).

(10 point)

- a) Benyt modellen til at bestemme nøddens fart $|\vec{s}'(t)|$ til tidspunktet $t = 1$.

Det oplyses, at længden af en parameterkurve med koordinatfunktioner x og y samt parameteren t i intervallet $[t_1, t_2]$ kan beregnes ved formlen

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

(10 point)

- b) Benyt modellen til at bestemme længden af den banekurve nødden følger, inden den rammer stien.

Opgave 14

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^3 + t^2 - 4t \end{pmatrix}, \quad -3 \leq t \leq 3.$$

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ har et dobbeltpunkt P på andenaksen.

(10 point)

- a) Bestem de to parameterværdier hørende til P .

(10 point)

- b) Bestem koordinatsættet til hvert af de to punkter på parameterkurven, hvor tangenten til parameterkurven er vandret.

Opgave 14



Grafik : colourbox.com

En mus kravler ud af sit musehul og går en tur langs en lukket rute. I en model kan ruten beskrives ved parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot t - t^2 \\ t^3 - 9 \cdot t^2 + 20 \cdot t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4,$$

hvor $(x(t), y(t))$ betegner musens position til tidspunktet t (målt i minutter) i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. Musehullet er placeret i punktet $(0, 0)$.

(10 point)

a) Tegn musens rute.

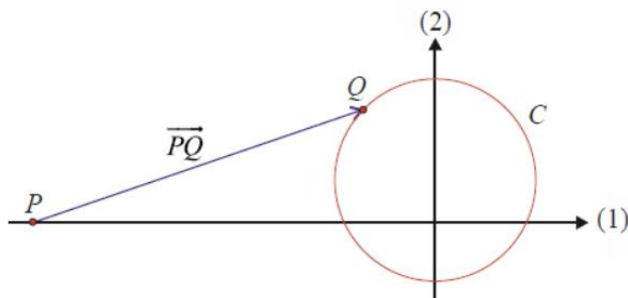
(10 point)

b) Bestem $|\vec{s}'(1)|$, og giv en fortolkning af dette tal.

(10 point)

c) Bestem det tidspunkt, hvor musen er længst væk fra musehullet.

Opgave 14



En cirkel C er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(t) \\ 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Det oplyses, at $Q(x, y)$ er et punkt på cirklen C , og at punktet P har koordinaterne $(-12, 0)$.

(10 point)

a) Gør rede for, at afstanden mellem P og Q kan beskrives ved funktionen

$$d(t) = \sqrt{173 + 120 \cdot \cos(t) + 20 \cdot \sin(t)}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

(10 point)

b) Bestem koordinatsættet til det punkt Q på cirklen C , der har den mindste afstand til punktet P .

Opgave 13



En jæger skyder med bue og pil efter en flyvende gås. I en model i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser kan pilespidsens og gåsens bevægelser beskrives ved

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}(t) &= \begin{pmatrix} 65 \cdot t \\ -4,91 \cdot t^2 + 37,5 \cdot t + 1,8 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OG}(t) &= \begin{pmatrix} 141 - 29 \cdot t \\ 46 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

hvor $\overrightarrow{OP}(t)$ og $\overrightarrow{OG}(t)$ betegner stedvektorerne til pilespidsens henholdsvis gåsens position til tidspunktet t (målt i sekunder efter skuddet).

(10 point)

a) Tegn banekurverne for pilespidsens og gåsens bevægelser i samme koordinatsystem.

(10 point)

b) Benyt modellen til at bestemme pilespidsens fart til tidspunktet $t = 1$.

(5 point)

c) Benyt modellen til at afgøre, om pilespiden rammer gåsen.

Opgave 16

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

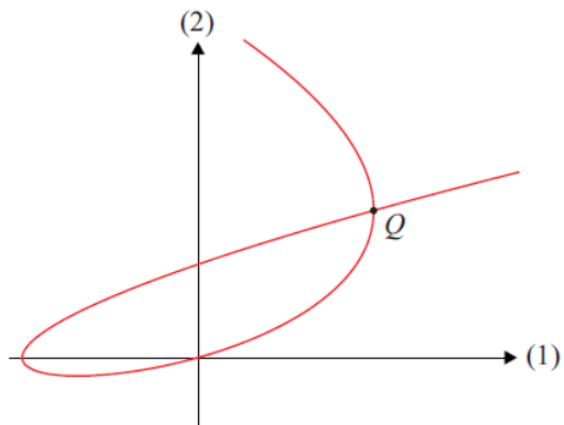
På banekurven for $\vec{r}$ er punktet Q et dobbeltpunkt hørende til t -værdierne $t = -2$ og $t = t_0$.

(10 point)

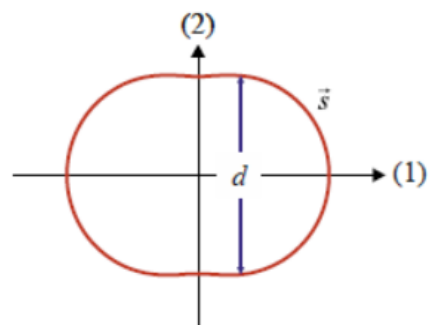
a) Bestem koordinatsættet til punktet Q , og bestem t_0 .

(10 point)

b) Bestem den spidse vinkel mellem banekurvens to tangenter i punktet Q .



Opgave 14



Figuren viser et lodret snit af en Wankelmotor. I en model har randen af det indre af forbrændingskammeret form som parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \cos(t) + \frac{7}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}t\right) \\ \frac{1}{2} \cdot \sin(t) + \frac{7}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}t\right) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 6\pi.$$

Det oplyses, at parameterkurven er symmetrisk omkring begge akser, og at parameterkurven beskriver randen af det indre af forbrændingskammeret, netop når t -værdien gennemløber intervallet $[0; 6\pi]$. Enheden på begge akser er cm.

- (10 point) a) Benyt modellen til at bestemme den største lodrette afstand d i det indre af forbrændingskammeret.

Længden L af en parameterkurve i intervallet $[a; b]$ kan bestemmes ved

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

hvor $x(t)$ og $y(t)$ angiver koordinatfunktionerne for vektorfunktionen hørende til parameterkurven.

- (10 point) b) Benyt modellen til at bestemme længden af randen af det indre af forbrændingskammeret.

Opgave 13 I et koordinatsystem er tre punkter A , B og C bestemt ved stedvektorerne

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorfunktionen $\vec{r}$ er bestemt ved

$$\vec{r}(t) = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot \overrightarrow{OB} + t^2 \cdot \overrightarrow{OC}.$$

(10 point)

a) Gør rede for, at koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ til $\vec{r}(t)$ er givet ved

$$x(t) = -21 \cdot t^2 + 32 \cdot t + 2$$

$$y(t) = -17 \cdot t^2 + 16 \cdot t + 2.$$

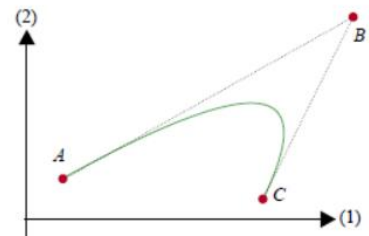
(10 point)

b) Undersøg, om $\vec{r}'(0)$ er parallel med $\overrightarrow{AB}$.

Bezier-kurver anvendes blandt andet i computergrafik til at frembringe skalerbare glatte kurver. Den kvadratiske Bezier-kurve med A og C som endepunkter er den del af banekurven for $\vec{r}$, der svarer til $0 \leq t \leq 1$.

Det oplyses, at buelængden af en banekurve i intervallet $a \leq t \leq b$ kan bestemmes ved

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$



Opgave 9 En parameterkurve er givet ved stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot (\sin(t))^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(10 point)

a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}(t)$.

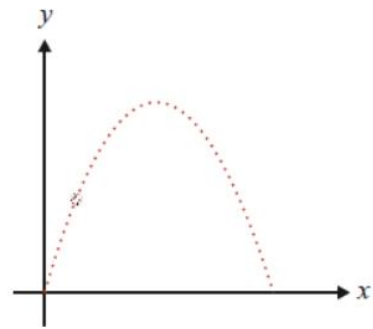
(10 point)

b) Bestem hastighedsfunktionen $\vec{s}'(t)$.

Opgave 12



Foto: www.colourbox.dk



Ved et spark til en fodbold, kan fodboldens bevægelse beskrives ved banekurven for vektorfunktionen $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot t \\ 10t - 3t^2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

hvor k er en konstant, $0 < k < 8$. Koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ betegner henholdsvis fodboldens vandrette og lodrette position (målt i meter) til tidspunktet t (målt i sekunder efter sparket).

(10 point) a) Bestem fodboldens fart $|\vec{r}'(t)|$ til tidspunktet $t = 1$, når $k = 2$.

(10 point) b) Bestem det tidspunkt, hvor fodbolden rammer jorden.

Ved et bestemt spark rammer fodbolden jorden 26 meter fra det sted, hvorfra den blev sparket til.

(5 point) c) Bestem k for dette spark.

Opgave 8. En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 + t^2 - 2t \\ t^2 - 2 \end{pmatrix}, \quad -3 \leq t \leq 3.$$

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ har et dobbeltpunkt P på førsteaksen.

(10 point) a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til punktet på parameterkurven, hvor tangenten til parameterkurven er vandret.

Opgave 15 I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at til tidspunktet t er stedvektoren $\vec{r}$ til P givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^5 - t \end{pmatrix}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Punktet P passerer punktet $Q(1, 0)$ til tidspunkterne t_1 og t_2 .

(10 point) a) Bestem t_1 og t_2 .

Mellem de to tidspunkter t_1 og t_2 afsnører banekurven i 1. og 4. kvadrant en punktmængde M , der har et areal T . Det oplyses, at

$$T = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}'(t) \cdot \hat{\vec{r}}(t) dt.$$

(10 point) b) Bestem arealet T af punktmængden M .

Funktioner af to variable

Uden hjælpemidler

Opgave 3 En funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x, y) = x^3 + 4x + x \cdot y + y^2.$$

(10 point)

a) Bestem $f(2, 3)$.

(10 point)

b) Bestem gradienten for f i punktet $(2, 3, f(2, 3))$.

Opgave 1 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 \cdot y + 2y.$$

(10 point)

a) Bestem $f(2, 5)$.

(10 point)

b) Bestem de partielle afledede $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$.

Opgave 7 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x.$$

Det oplyses, at f har ét stationært punkt.

(10 point) a) Bestem koordinatsættet til det stationære punkt.

(10 point) b) Bestem arten af det stationære punkt.

Opgave 1 En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + y.$$

(10 point)

a) Bestem $f(3, -2)$.

Opgave 1 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 11.$$

(10 point)

a) Bestem $f(5, 2)$.

Opgave 5. En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 2 \cdot x \cdot y + x - y.$$

(10 point) a) Bestem $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$.

Med hjælpemidler

Opgave 17 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{24 \cdot x}{x^2 + y^2 + 4}.$$

(10 point) a) Bestem koordinatsættet til hvert af de to stationære punkter for funktionen f .

(10 point) b) Argumentér for, at niveaukurven bestemt ved ligningen $f(x, y) = 4$ er en cirkel.

Opgave 14 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^3 + 4.$$

(10 point)

a) Tegn grafen for f i grafvinduet $[0, 2] \times [0, 4] \times [0, 10]$.

Det oplyses, at grafen for f har et stationært punkt i $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(10 point)

b) Bestem x_0 og y_0 .

Opgave 10 En funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x, y) = e^{x^2 - 4x + y^2 + 6y}.$$

(10 point)

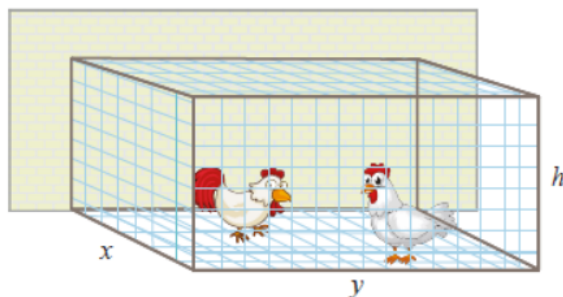
a) Bestem gradienten for f , når $x = 1$ og $y = 0$.

Det oplyses, at f har netop et stationært punkt P .

(10 point)

b) Bestem koordinatsættet til P .

Opgave 15



En kasseformet hønsegård skal indhegnes med trådnæt. Hønsegården er placeret langs en mur, så en del af muren udgør hønsegårdens ene side. Den del af hønsegården, der skal indhegnes med trådnæt, består således af bunden, toppen og tre sider.

Bredden af hønsegården betegnes med x , længden betegnes med y , og højden betegnes med h . Det oplyses, at det samlede areal af trådnettet er 48 m^2 .

(5 point)

a) Gør rede for, at voluminet V af hønsegården som funktion af x og y er bestemt ved

$$V(x, y) = xy \cdot \frac{48 - 2xy}{2x + y},$$

hvor $V(x, y)$ betegner voluminet af hønsegården (målt i m^3) med bredde x (målt i m) og længde y (målt i m).

(10 point)

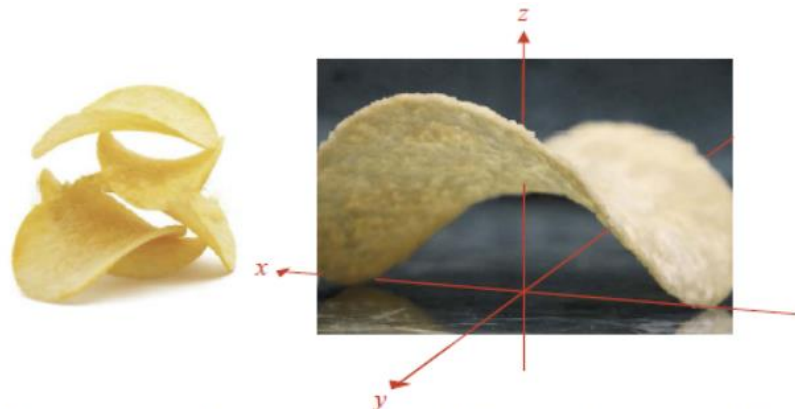
b) Tegn grafen for V i grafvinduet $[0; 20] \times [0; 20] \times [0; 35]$.

Det oplyses, at $P(2, 4, 32)$ er et stationært punkt for V .

(10 point)

c) Bestem arten af P , og forklar, hvad P og arten af P fortæller om hønsegården.

Opgave 13



På billedet til venstre ses en bestemt type chips. På figuren til højre er én af disse chips indlagt i et koordinatsystem med enheden cm på alle akser.

I en model kan chipsens form beskrives som en del af grafen for en funktion f givet ved

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4},$$

hvor $f(x, y)$ angiver chipsens højde over bordet.

(10 point)

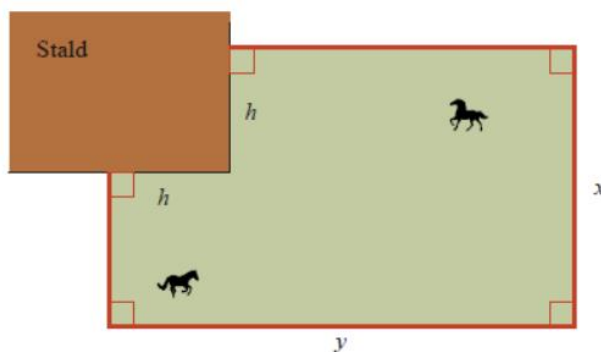
a) Tegn grafen for f i området $-3 \leq x \leq 3$ og $-2 \leq y \leq 2$.

Det oplyses, at chipsens form i modellen har et saddelpunkt P .

(10 point)

b) Bestem koordinatsættet til punktet P .

Opgave 16



En hestefold skal anlægges i forbindelse med en stald og indhegnes med hegn. I hjørnet op mod stalden skal der ikke opsættes hegn. Hestefolden har således fire sider, hvor der skal opsættes hegn. På figuren ovenfor ses hestefoldens form samt betegnelser på hestefoldens dimensioner.

Det oplyses, at den samlede længde af hegnet er 360 m.

(10 point)

a) Gør rede for, at arealet A af hestefolden udtrykt som funktion af x og y er givet ved

$$A(x, y) = -x^2 - y^2 - x \cdot y + 360x + 360y - 32400,$$

hvor $A(x, y)$ betegner arealet af hestefolden (målt i m^2) med bredde x (målt i m) og længde y (målt i m).

(10 point)

b) Bestem de værdier for x og y , hvor arealet af hestefolden er størst.

Opgave 13

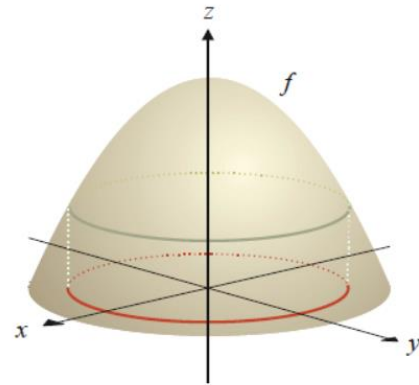


Foto: www.colourbox.dk

I en model kan toppen af et bjerg beskrives som grafen for en funktion f givet ved forskriften

$$f(x, y) = -0,1 \cdot x^2 - 0,1 \cdot y^2 + 5,$$

hvor $f(x, y) \geq 0$, og hvor alle mål er i km.



(10 point)

a) Bestem $f(3, 4)$.

(10 point)

b) Bestem gradienten når $x = 3$ og $y = 4$, og giv en fortolkning af resultatet.

Figuren viser modellen af bjerget med niveaukurven $f(x, y) = 2,5$ indtegnet i xy -planen. En gruppe vandrere går én gang rundt om bjerget i 2,5 kilometers højde.

(10 point)

c) Argumentér for, at niveaukurven $f(x, y) = 2,5$ er en cirkel med radius 5 og bestem, hvor langt vandrerne går.

Opgave 13. En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = 2e^{2x-2y+2xy}$$

(10 point)

a) Bestem gradienten for f , når $x = 2$ og $y = 2$.

Det oplyses, at f har netop et stationært punkt P .

(10 point)

b) Bestem arten af det stationære punkt P .

Opgave 14



Foto: www.colourbox.com

I en model for overskuddet fra produktionen af et bestemt produkt i en virksomhed er overskuddet som funktion af antal arbejdstimer og investering i maskiner bestemt ved

$$f(x, y) = 100 \cdot x^{0,6} \cdot y^{0,4} - 250 \cdot x - 0,1 \cdot y,$$

hvor $f(x, y)$ betegner overskuddet (målt i kr.), x betegner antallet af arbejdstimer (målt i timer), og y betegner investeringen i maskiner (målt i kr.).

(5 point)

- a) Bestem overskuddet fra produktionen, når der bruges 2000 arbejdstimer, og der investeres 100 000 kr. i maskiner.

(10 point)

- b) Bestem gradienten for f , når $x = 2000$ og $y = 100\,000$, og giv en fortolkning af denne.

Opgave 13



Nyhavnrejser.dk

På billedet ses en bygning, som står på en bro. I en model kan bygningens tag beskrives ved grafen for funktionen

$$f(x, y) = 0,88 \cdot y \cdot \sin(0,63x) + 2,2, \quad -7,5 \leq x \leq 7,5 \text{ og } -2,5 \leq y \leq 2,5,$$

hvor $f(x, y)$ beskriver tagets højde over broen (målt i meter).

I modellen er broen placeret i xy -planen.

(10 point)

- a) Bestem tagets højde over broen, når $x = 0$ og $y = 0$.

(10 point)

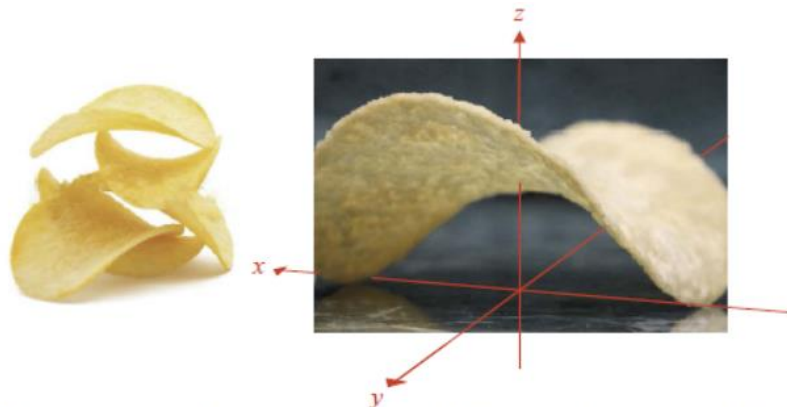
- b) Tegn grafen for f .

Mod syd kan afgrænsningen af taget beskrives ved snitkurven givet ved $g(x) = f(x, 2,5)$.

(10 point)

- c) Benyt snitkurven til at bestemme tagets maksimale højde over broen mod syd.

Opgave 13



På billedet til venstre ses en bestemt type chips. På figuren til højre er én af disse chips indlagt i et koordinatsystem med enheden cm på alle akser.

I en model kan chipsens form beskrives som en del af grafen for en funktion f givet ved

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4},$$

hvor $f(x, y)$ angiver chipsens højde over bordet.

(10 point)

- a) Tegn grafen for f i området $-3 \leq x \leq 3$ og $-2 \leq y \leq 2$.

Det oplyses, at chipsens form i modellen har et saddepunkt P .

(10 point)

- b) Bestem koordinatsættet til punktet P .

Opgave 14

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - 8x - y^2 + 2y + 19.$$

(10 point)

- a) Tegn grafen for f i grafvinduet $[-5; 10] \times [-5; 10] \times [-5; 10]$.

Grafen for f har et saddepunkt i $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(10 point)

- b) Bestem koordinatsættet til P .

(10 point)

- c) Gør rede for, at enhver snitkurve for f i x -retningen bliver en parabel, når y holdes fast.

Opgave 13

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + x + 2y + 1.$$

(10 point)

- a) Tegn grafen for f .

Funktionen har minimum i $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(10 point)

- b) Bestem koordinatsættet til punktet P .

Normalfordeling

Uden hjælpemidler

Opgave 8 Lad f betegne tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X .

(10 point) a) Forklar, hvad integralet $\int_7^{13} f(x) dx$ fortæller om den stokastiske variabel X .

Det oplyses, at X har middelværdi 10, og at $\int_7^{13} f(x) dx = 0,8$.

(5 point) b) Argumentér for, at X ikke har spredningen 3.

Opgave 9 Lad f betegne tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X .

(10 point) a) Forklar, hvad integralet $\int_{-\infty}^{13} f(x) dx$ fortæller om den stokastiske variabel X .

Opgave 6 Fra en bestemt producent af cornflakes kan vægten af pakker med cornflakes beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 500$ g og spredning $\sigma = 8$ g.

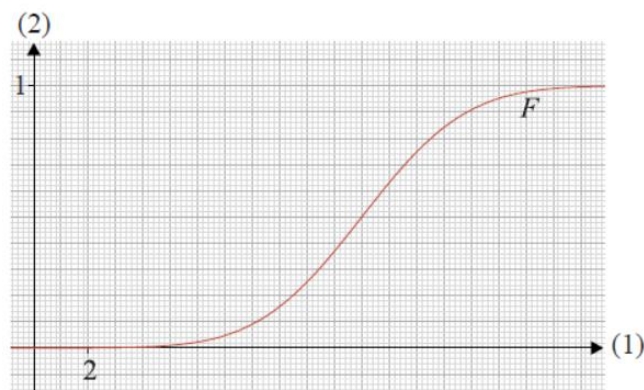
(10 point) a) Bestem intervallet for de normale udfald for vægten af pakker med cornflakes.

(5 point) b) Bestem sandsynligheden for, at en pakke cornflakes vejer mellem 492 g og 508 g.



Opgave 4

Til opgaven hører et bilag



Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen F for en normalfordelt stokastisk variabel X .

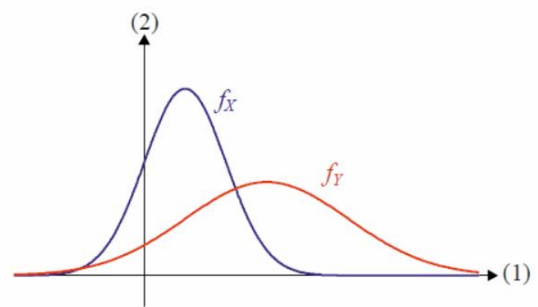
(10 point) a) Bestem middelværdien for X .

Opgave 3 Figuren viser graferne for tæthedsfunktionerne f_X og f_Y for to normalfordelte stokastiske variable X og Y .

(10 point)

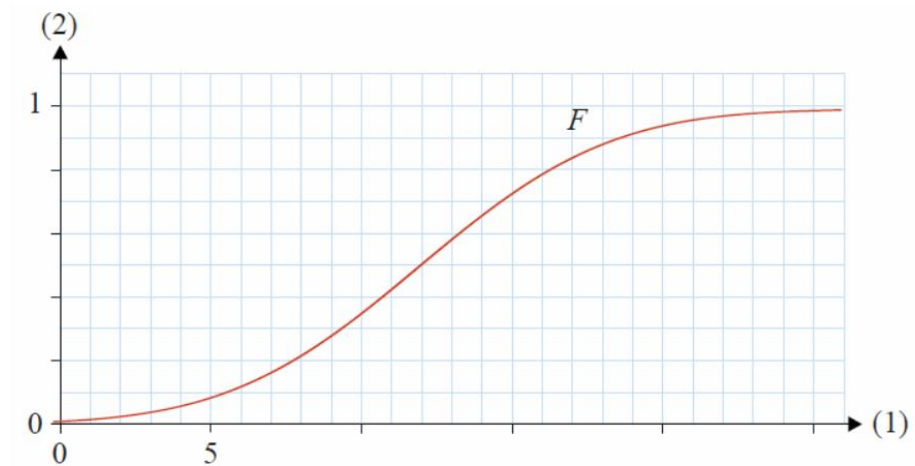
- a) Hvilken af de to stokastiske variable har den største middelværdi? Begrund svaret.

Bilag vedlagt



Opgave 2

Bilag vedlagt



Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen F for en normalfordelt stokastisk variabel X .

(10 point)

- a) Bestem middelværdien μ . Brug bilaget.

(10 point)

- b) Bestem $P(10 \leq X \leq 21)$. Brug bilaget.

Opgave 8 Lad f betegne tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X .

(10 point)

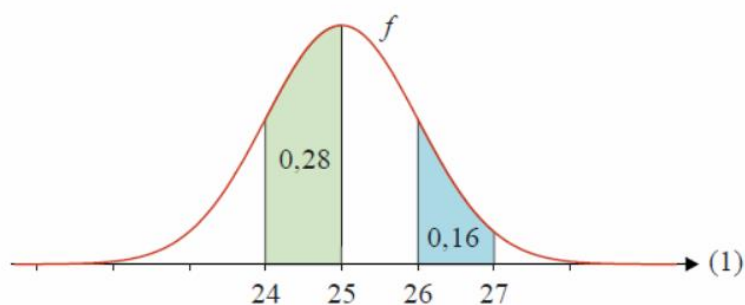
- a) Forklar, hvad integralet $\int_7^{13} f(x) dx$ fortæller om den stokastiske variabel X .

Det oplyses, at X har middelværdi 10, og at $\int_7^{13} f(x) dx = 0,8$.

(5 point)

- b) Argumentér for, at X ikke har spredningen 3.

Opgave 4



Figuren viser grafen for tæthedsfunktionen f for en normalfordelt stokastisk variabel X . Middelværdien for X er 25. Arealet af hvert af de to farvede områder er angivet på figuren.

(10 point)

a) Bestem sandsynligheden $P(24 \leq X \leq 25)$.

(10 point)

b) Bestem sandsynligheden $P(X \geq 27)$.

Opgave 2



En klasse bestiller maden til et studentergilde hos et cateringfirma. Firmaet annoncerer med følgende udbud: 3 forretter, 4 hovedretter, 5 desserter. Heraf kan man frit sammensætte én af følgende to menutyper:

Menu med 2 retter: hovedret og dessert

Menu med 3 retter: forret, hovedret og dessert

Klassen kan ikke blive enige om en menu og vælger derfor at trække lod blandt de mulige menuer.

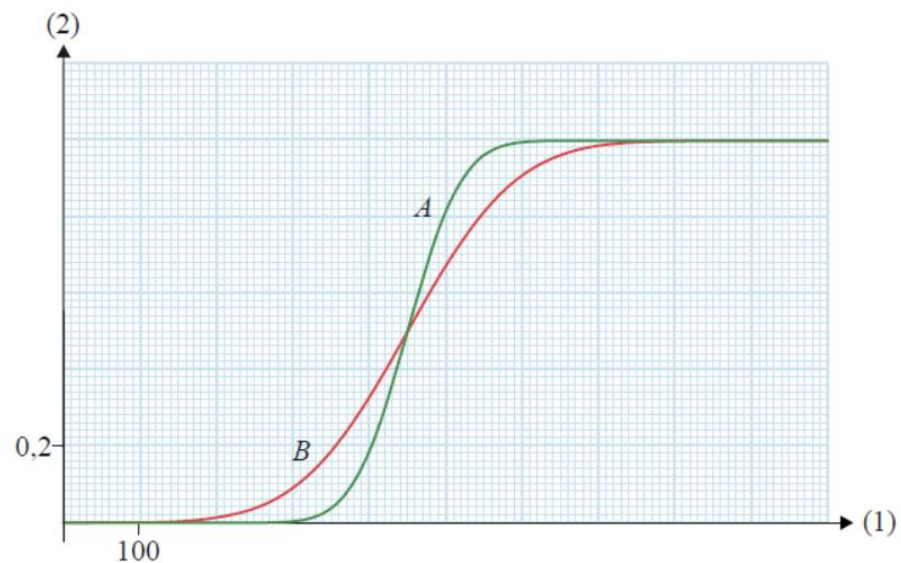
(10 point)

a) Bestem sandsynligheden for, at klassen vælger en 3-retters menu, hvis valget blandt de forskellige menuer foretages ved lodtrækning.

Opgave 6

På to forskellige fabrikker A og B fyldes pasta i poser. For begge fabrikker antages det, at vægten (målt i gram) af de enkelte poser er normalfordelt. På figuren ses graferne for de to tilhørende fordelingsfunktioner.

Til opgaven hører et bilag.



(5 point)

a) Benyt figuren til at bestemme, hvor meget poserne fra fabrik A vejer i gennemsnit.

(10 point)

b) Afgør, om det er poserne fra fabrik A eller B , der varierer mest i vægt.

Benyt vedlagte bilag.

Opgave 4



Foto: www.colourbox.dk

I en model kan vægten af kyllingelår (målt i gram) beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 100$ og spredning $\sigma = 14$.

(10 point)

a) Undersøg om et kyllingelår på 80 gram er et normalt udfald.

Tæthedsfunktionen for X betegnes f .

(10 point)

b) Forklar, hvad $\int_{100}^{120} f(x) dx = 0,423$ fortæller om vægten af kyllingelår.

Opgave 2



Foto: www.ashurboz.dk

Fødselsvægten for danske piger født i 2017 er ifølge en model normalfordelt med middelværdi $\mu = 3,38$ og spredning $\sigma = 0,57$.

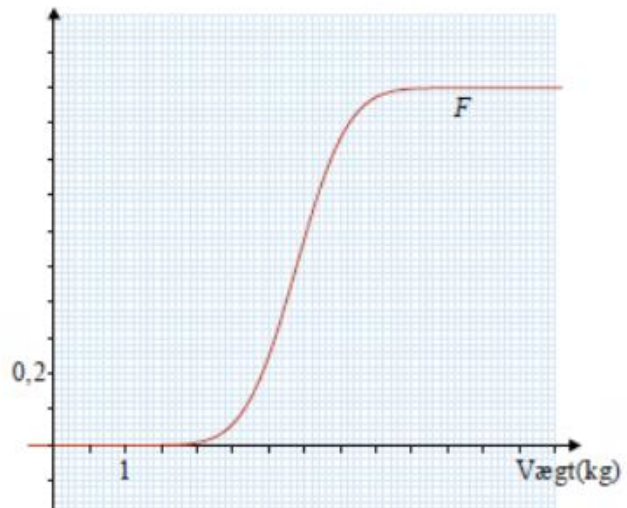
(10 point)

- a) Bestem intervallet for de normale udfald for fødselsvægten for danske piger født i 2017.

På figuren ses grafen for fordelingsfunktionen F for fødselsvægten for piger født i 2017.

(10 point)

- b) Benyt bilaget til at bestemme sandsynligheden for at fødselsvægten for en pige er mindre end 4 kg.



Til opgaven hører et bilag.

Kilde: www.statistikbanken.dk

Med hjælpemidler

Opgave 11 En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(3, 2)$.

(10 point) a) Tegn grafen for fordelingsfunktionen hørende til X .

(10 point) b) Bestem $P(0,5 \leq X \leq 4)$.

(5 point) c) Bestem tallet k , så $P(X \leq k) = 0,6$.

Opgave 11 En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(6, 0.7)$. Tæthedsfunktionen for X betegnes f .

(10 point) a) Tegn grafen for f .

(10 point) b) Bestem $\int_5^8 f(x) dx$, og forklar, hvad resultatet fortæller om X .

Opgave 13 En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(5, 1)$.

(10 point) a) Tegn grafen for fordelingsfunktionen hørende til X .

(10 point) b) Bestem tallet k , så $P(X \leq k) = 0,4$.

Opgave 10 På et gartneri udvælger man på tilfældig måde 200 fuldt udvoksede tulipaner af en bestemt art. Man måler længden af deres stilke, og tabellen herunder viser nogle af målingerne.

Længde (mm)	300	271	...	280	261
-------------	-----	-----	-----	-----	-----

Hele tabellen med alle 200 målinger findes i bilaget "Tulipanstilke.xlsx"

(10 point) a) Gør rede for, at længden af tulipanernes stilke med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X .

(10 point) b) Bestem middelværdi og spredning for X .

På gartneriet udvælger man en tilfældig tulipan af denne art.

(10 point) c) Bestem sandsynligheden for, at længden af stilken er mellem 270 mm og 330 mm.

Opgave 11 I en model kan koncentrationen af hæmoglobin i blodet hos kvinder beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X .
Målt i mmol/L har X middelværdien $\mu = 8,4$ og spredningen $\sigma = 0,55$.

(10 point)

a) Bestem de normale udfald for X .

(10 point)

b) Bestem sandsynligheden $P(X \leq 8,0)$ for, at en tilfældigt udvalgt kvinde har en koncentration af hæmoglobin i blodet på højst 8,0 mmol/L.

Kilde: *min.medicin.dk*

Opgave 11 Nedenstående tabel viser vægten af 200 tilfældigt udvalgte attenårige mænd fra Hongkong.

Vægt i kg	51,3	61,9	57,8	58,0
-----------	------	------	------	------

Alle tabellens 200 værdier findes i den vedhæftede fil: *Hongkong_vægt*

(10 point)

a) Gør rede for, at mændenes vægt med god tilnærmelse kan antages at være normalfordelte.

(10 point)

b) Bestem intervallet for de normale udfald i denne normalfordeling.

Opgave 10.

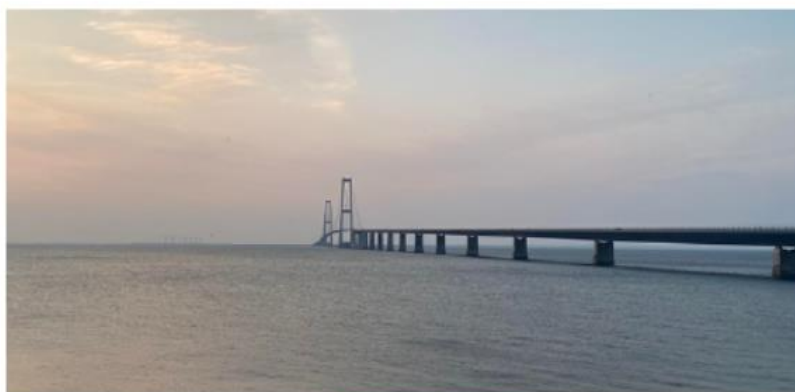


Foto: [Matematik Universet](#)

En lasermåler bruges til at måle hastigheder af biler på E20 motorvejen ved Storebæltsbroen.

Hastighederne siges at være normalfordelt med en gennemsnitshastighed på 110km/t og en standardafvigelse på 10km/t.

(10 point) a) Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt bil kører med mere end 130km/t?

En person kører over Storebæltsbroen med en hastighed på 190km/t.

(10 point) b) Undersøg, om tallet 190km/t er et exceptionelt udfald.

Opgave 12



Foto: www.colourbox.dk

Et firma producerer kattermad i poser. Vægten af poserne med kattermad er normalfordelt med middelværdien 5 kg og spredningen 0,11 kg.

(10 point)

- a) En bestemt pose med kattermad fra firmaet vejer 4,85 kg. Afgør, om vægten af denne pose er et normalt udfald.

Firmaet producerer også kattermad i større poser. Firmaet oplyser, at vægten af disse poser er normalfordelt med middelværdien 10 kg. Desuden oplyses, at 10% af poserne vejer mindre end 9,8 kg.

(5 point)

- b) Bestem spredningen for vægten af disse poser.

Opgave 11



Foto: www.colourbox.com

Fra en bestemt producent har man udtaget en stikprøve på 200 poser med økologiske kartofler. Tabellen viser vægten af hver af de 200 poser.

	Pose 1	Pose 2	...	Pose 199	Pose 200
Vægt (g)	1404	1497	...	1505	1523

(Resten af tabellen findes i bilaget "vægt_af_kartofler.xlsx")

I en model kan vægten af en pose økologiske kartofler fra producenten beskrives ved en stokastisk variabel X .

(10 point)

- a) Gør rede for, at X tilnærmelsesvis er normalfordelt.

(5 point)

- b) Benyt stikprøven til at bestemme middelværdi og spredning af X .

(10 point)

- c) Benyt modellen til at bestemme sandsynligheden for, at en pose økologiske kartofler fra producenten vejer mindre end 1450 g.

Opgave 8



Foto: www.colourbox.dk

202 tilfældigt udvalgte danske skolebørn gennemfører en test. Tabellen viser de opnåede pointtal.

117	157	...	124	102
-----	-----	-----	-----	-----

(Hele tabellen med alle 202 pointtal findes i bilaget "point_fra_test.xlsx")

(10 point)

- a) Gør rede for, at børnenes pointtal i stikprøven tilnærmelsesvis er normalfordelte.

I en model baseret på stikprøven kan fordelingen af danske skolebørns pointtal ved en tilsvarende type test beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 151,4$ og spredning $\sigma = 40,4$.

(10 point)

- b) Benyt modellen til at bestemme sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt dansk skolebarn får mere end 200 point i en test af denne type.

Opgave 13

Tabellen viser en række målinger af sammenhørende værdier af nogle kronblades bredde og længde for en bestemt blomsterart.

Bredde (cm)	2,0	1,9	...	2,2	1,5
Længde (cm)	5,1	5,8	...	6,2	5,1

(Resten af data findes i bilaget Blomsterdata.xlsx)



Foto: www.colourbox.dk

I en lineær regressionsmodel kan sammenhængen mellem bredden og længden af et kronblad beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner længden (målt i cm) af et kronblad med bredden x (målt i cm).

(10 point)

- a) Gør rede for, at residualerne i modellen med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte.

En gruppe biologer formoder, at den lineære sammenhæng mellem længden og bredden af et kronblad er voksende.

(10 point)

- b) Bestem et 95% konfidensinterval for hældningskoefficienten i modellen, og benyt dette til at afgøre, om biologernes formodning er troværdig.

Opgave 14 På et gymnasium målte 41 elever længden af deres venstre tommelfinger.
Tabellen herunder viser nogle af resultaterne.

Længden af venstre tommelfinger (mm)	63	91	...	102	112
--------------------------------------	----	----	-----	-----	-----

Alle tabellens 41 resultater findes i den vedhæftede fil: *Tommelfinger.xlsx*



(10 point)

- a) Gör rede for, at længden af elevernes venstre tommelfinger med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X .

Den mindste længde var 63 mm.

(10 point)

- b) Undersøg, om denne længde er et exceptionelt udfald.

Lineær regression

Med hjælpemidler

Opgave 11



Grafik: freepik.com

Tabellen viser sammenhørende værdier for kilometerstand og brugtvognspris for et bestemt bilmærke.

Kilometerstand (1000 km)	58	56	...	25	38
Brugtvognspris (1000 kr.)	173,3	152,7	...	188,4	193,7

(Hele tabellen med alle 130 datapunkter findes i bilaget Biler.xlsx)

I en model kan sammenhængen mellem kilometerstand og brugtvognspris beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner brugsvognsprisen (målt i 1000 kr.), og x betegner kilometerstanden (målt i 1000 km).

(10 point)

a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .

(10 point)

b) Gør rede for, at residualerne med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte.

Opgave 15



Foto: www.colourbox.de

I et laboratorium har man undersøgt sammenhængen mellem substratkoncentration og initialhastighed ved nedbrydning af ethanol med et enzym. Tabellen viser sammenhørende målte værdier af substratkoncentration og initialhastighed.

Substratkoncentration (mM)	1,0	2,5	3,1	5,4	10,7	12,3	15,2	21,0
Initialhastighed (mM pr. sekund)	0,028	0,061	0,072	0,105	0,152	0,161	0,175	0,195

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$\frac{1}{v} = a \cdot \frac{1}{s} + b,$$

hvor s betegner substratkoncentrationen (målt i mM), og v betegner initialhastigheden (målt i mM pr. sekund).

(10 point)

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .

Opgave 10



Grafik: freepik.com



Tabellen viser sammenhørende værdier for statsgæld og arbejdsløshed i et bestemt land.

Arbejdsløshed (målt i % af arbejdsstyrken)	7,10	6,90	...	8,63	7,36
Statsgæld (målt i % af BNP)	81,6	79,1	...	73,2	69,5

(Hele tabellen med alle 42 datapunkter findes i bilaget "Arbejdsløshed_Statsgæld.xlsx")

En arbejdsmarkedsforsker formoder, at statsgælden som funktion af arbejdsløsheden kan beskrives ved en lineær model

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner statsgælden (målt i % af BNP), og x betegner arbejdsløsheden (målt i % af arbejdsstyrken).

(10 point)

a) Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for f .

(10 point)

b) Bestem et 95% konfidensinterval for hældningskoefficienten for f , og afgør, om arbejdsmarkedsforskerens formodning er rimelig.

Opgave 15



I en sportshal har nogle elever målt sammenhørende værdier af hastigheden og højden over gulvet for en basketball, der springer op efter at have ramt gulvet. Tabellen viser elevernes målinger.

Højde (m)	0,36	0,45	0,55	0,63	0,76	0,85	0,91
Hastighed (m/s)	3,25	2,94	2,64	2,34	1,73	1,11	0,49

I en model er der en lineær sammenhæng mellem h og v^2 givet ved

$$v^2 = a \cdot h + b,$$

hvor v betegner boldens hastighed (målt i meter pr. sekund), og h betegner boldens højde over gulvet (målt i meter).

(10 point)

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .

(10 point)

b) Benyt modellen til at bestemme boldens hastighed, da den var 0,20 meter over gulvet.

Opgave 13



Grafik: www.colourbox.dk

En isproducent har undersøgt det daglige isforbrug blandt en række forbrugere. Tabellen viser sammenhørende værdier for det daglige isforbrug og middeltemperaturen den pågældende dag.

Middeltemperatur (målt i °C)	5,0	13,3	...	17,8	21,7
Isforbrug (målt i liter)	0,82	0,79	...	0,92	1,16

(Hele tabellen med alle 30 datapunkter findes i bilaget *IsForbrug.xlsx*)

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner det daglige isforbrug (målt i liter), og x betegner middeltemperatur (målt i °C).

(10 point)

a) Benyt regression på tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .

(10 point)

b) Bestem et 95% konfidensinterval for a , og benyt dette til at afgøre, om der er statistisk belæg for, at sammenhængen mellem det daglige isforbrug og middeltemperaturen er voksende.

Opgave 9.



Foto: Kock Staar

Tabellen viser udviklingen af forbrugsprisen på en liter benzin i et bestemt land i perioden 2012-2022.

Årstal	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Listepris	4	4.1	4.3	4.9	5.1	4.9	5.3	5.8	5.7	6.1	6.5

I en model kan udviklingen i forbrugsprisen beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = ax + b.$$

hvor $f(x)$ betegner forbrugsprisen (målt i amerikanske dollars.) til tidspunktet x (målt i år efter 2012).

(10 point) a) Benyt tabellens data til at bestemme a og b .

(10 point) b) Gør rede for, at residualerne med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte.