

Kernestof Mat **2** hf



Lindhardt og Ringhof

Per Gregersen og Henrik Bindsbøll Nørregaard

KERNESTOF Mat2

Per Gregersen & Henrik Bindsbøll Nørregaard

© 2018 Lindhardt og Ringhof Uddannelse, København
– et forlag under Lindhardt og Ringhof Forlag A/S, et selskab i Egmont

Mekanisk, fotografisk, elektronisk eller anden gengivelse af denne bog eller dele heraf er kun tilladt efter Copy-Dans regler.

Forlagsredaktion: Iben Stampe Sletten
Billedredaktion: Astrid Sletten Rybner
Principlayout og omslag: andresen design
Grafisk tilrettelægning: Schnalke Kommunikations-Design
Tryk: Livonia Print

1. udgave 1. oplag 2018

Kernestof 2 er en revideret udgave af den tidligere *Kernestof B* af Per Gregersen og Peter Limkilde.
En del af opgavesektionerne stammer fra denne udgivelse.

ISBN 978 87 7066 867 5
www.lru.dk

1. Andengradspolynomier



1.1 Parabler og koefficienter

1 Introduktion

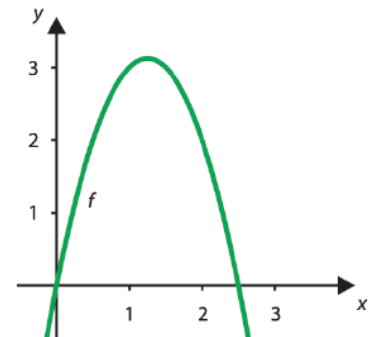
Når vandet i et springvand skydes skråt opad, følger det en parabelformet kurve. Den funktionstype, der har parabler som grafer, kaldes andengradspolynomier.

I *Kernestof 1* så vi på sammenhængen mellem forskriften for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ og parablens udseende.

I kapitlet her skal vi undersøge andengradspolynomierne mere detaljeret.

2 Eksempel

I koordinatsystemet ses grafen for andengradspolynomiet $f(x) = -2x^2 + 5x$.

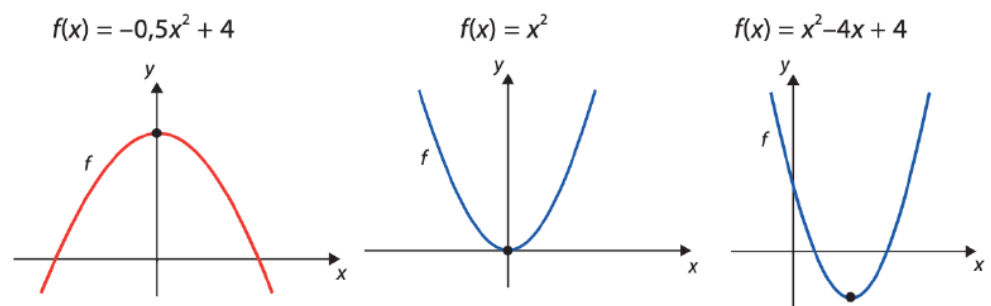


3 Definition

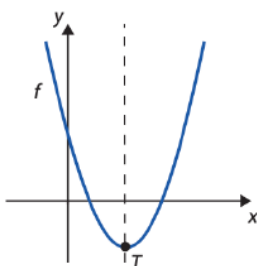
Et **andengradspolynomium** er en funktion med forskriften $f(x) = ax^2 + bx + c$. De tre konstanter a , b og c kaldes **koefficienter**. De kan antage alle værdier, dog må a ikke være 0. En graf for et andengradspolynomium kaldes en **parabel**.

4 Eksempel

Tre andengradspolynomier og deres grafer.



De markerede punkter på graferne kaldes **toppunkter**. På den røde graf er toppunktet øverst, og *grenene* vender nedad. På de to blå grafer er toppunktet nederst, og *grenene* vender opad. De to grafer til venstre har y -aksen som *symmetriakse*.



5 Sætning

En parabel er **symmetrisk** om den lodrette linje, der går gennem **toppunktet**.



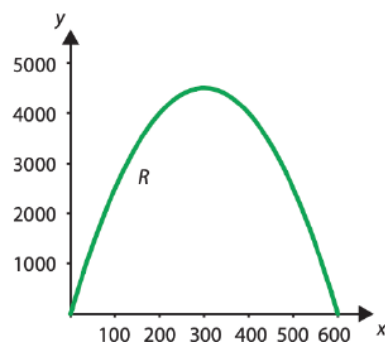
1.2 Diskriminant og toppunktsformel

10 Introduktion

Et rejsebureau sælger oplevelsesrejser. Andengradspolynomiet

$$R(x) = -0,05x^2 + 30x$$

er model for omsætningen (i tusind kr.) som funktion af antal solgte rejser x . I koordinatsystemet ses grafen for R .



I erhvervsøkonomi bruges betegnelsen R for omsætningsfunktioner. R er en forkortelse for "revenue" som betyder omsætning.

Koordinaterne til parablens *toppunkt* er interessante for rejsebureauet, fordi x -koordinaten til toppunktet er det antal rejser, hvor omsætningen er maksimal, og y -koordinaten er den tilhørende omsætning.



11* Sætning (se bevis s. 128)

Parablen, der er graf for funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$, har et **toppunkt** med koordinaterne: $T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$, hvor a , b og c er koefficienterne fra forskriften, og tallet d , som kaldes **diskriminanten**, er givet ved: $d = b^2 - 4ac$.

12 Eksempel

Vi vil beregne koordinaterne til toppunktet for parablen, der er graf for

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Vi bemærker, at koefficienterne i forskriften for f er $a = 1$, $b = -3$ og $c = 2$.

Diskriminanten beregnes til $d = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$.

Størrelserne indsættes i toppunktsformlen:

$$T = \left(-\frac{-3}{2 \cdot 1}, -\frac{1}{4 \cdot 1}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right). \text{ Toppunktets koordinater er } \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

13 Eksempel

Vi beregner koordinaterne til toppunktet for parablen, der er graf for funktionen

$$R(x) = -0,05x^2 + 30x. \text{ I forskriften er } a = -0,05, b = 30 \text{ og } c = 0.$$

Diskriminanten beregnes til $d = 30^2 - 4 \cdot (-0,05) \cdot 0 = 900 - 0 = 900$.

Vi indsætter tallene i toppunktsformlen:

$$T = \left(-\frac{30}{2 \cdot (-0,05)}, -\frac{900}{4 \cdot (-0,05)}\right) = (300, 4500)$$

Dette er altså koordinaterne til toppunktet.

I modellen betyder det, at virksomheden har den maksimale omsætning på 4500 tusinde kr., altså 4 500 000 kr. ved salg af 300 rejser.

I 14-17 arbejdes videre med introcasen:

14 Modellering af rejsebureauets omsætning $R(x)$

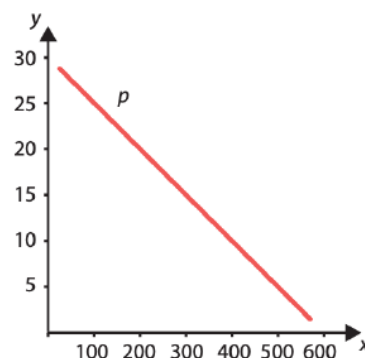
Sammenhængen mellem antal rejser x og prisen i tusind kroner, $p(x)$, antages at være givet ved *prisfunktionen*:

$$p(x) = -0,05x + 30.$$

På grafen ses, at der sælges flest rejser, når prisen er lav.

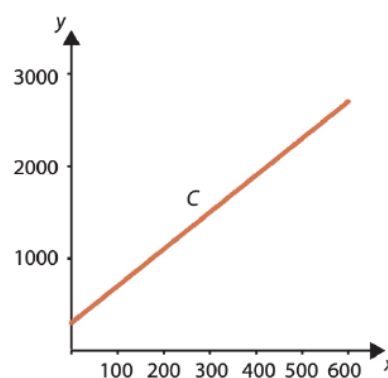
Omsætningen $R(x)$ findes ved at *gange antal rejser med prisen pr. rejse*.

Vi får da: $R(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (-0,05x + 30) = -0,05x^2 + 30x$.



15 Modellering af virksomhedens omkostninger $C(x)$

Vi vil antage, at der er nogle *faste* omkostninger på 300 000 kr. til husleje mv. og nogle *variable* omkostninger, som *varierer* med antal solgte rejser (flybilletter, hotelværelser mv.) på 4 000 kr. *pr. rejse*. Omkostningsfunktionen (i tusind kr.) bliver derved $C(x) = 4x + 300$.



16 Modellering af virksomhedens overskud $O(x)$

Overskuddet findes ved at trække *omkostningerne* fra *omsætningen*.

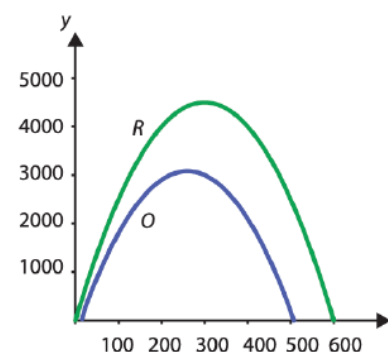
Vi får:

$$O(x) = R(x) - C(x) = -0,05x^2 + 30x - (4x + 300) = -0,05x^2 + 26x - 300$$

I koordinatsystemet ses grafen for $O(x)$, altså virksomhedens overskud.

Denne parabels toppunkt er mere interessant for rejsebureauets ejere end toppunktet for den grønne parabel, som viser omsætningens maksimum.

Bemærk, at overskuddet er maksimalt for et lavere antal rejser, end der, hvor omsætningen er maksimal. Det handler altså ikke om at sælge mest muligt!



17 Øvelse

Virksomhedens overskudsfunction er $O(x) = -0,05x^2 + 26x - 300$

- Beregn diskriminanten d .
- Beregn toppunktets koordinater.
- Brug toppunktets x -koordinat til at bestemme det antal rejser, hvor profitten er maksimal.
- Brug toppunktets y -koordinat til at bestemme den maksimale profit.

18 Øvelse

Et andengradspolynomium er givet ved $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$.

- Tegn grafen i CAS.
- Bestem diskriminanten.
- Bestem koordinaterne til toppunktet uden CAS.
- Bestem koordinaterne til toppunktet med CAS.



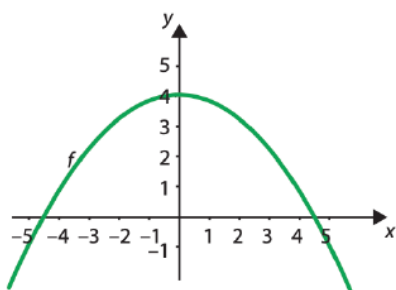
1.3 Rødder

19 Introduktion

Billedet viser The Winter Garden i Sheffield. Bygningens spær er parabelformede.

Andengradspolynomiet $f(x) = -0,2x^2 + 0,2x + 4$ kan være model for tværsnittet af bygningen. Parablen er tegnet, så bygningens grundplan ligger langs x -aksen. De to steder (x -værdier), hvor parablen skærer x -aksen, kaldes rødder.

At bestemme polynomiets rødder svarer dermed til at løse ligningen $f(x) = 0$.



20 Definition

En **rod** er et tal r , hvorom det gælder, at $f(r) = 0$.

21 Sætning

Antallet af rødder for $f(x) = ax^2 + bx + c$ afhænger af diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac:$$

(1) For $d < 0$ er der ingen rødder.

(2) For $d = 0$ er der en enkelt rod: $x = \frac{-b}{2a}$

(3) For $d > 0$ er der to rødder: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$



22 Eksempel

Vi vil bestemme rødderne for $g(x) = x^2 + 2x - 3$, dvs. vi vil løse ligningen $g(x) = 0$.

Koefficienterne er $a = 1$, $b = 2$ og $c = -3$. Diskriminanten beregnes til

$$d = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16.$$

Diskriminanten er positiv, så der er to rødder. Vi indsætter i formlen

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \\ \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Rødderne er altså $x = -3$ og $x = 1$.

Ligningen vi løser er af typen $ax^2 + bx + c = 0$.

En sådan ligning hedder en **andengradsligning**.

23 Eksempel

Vi vil bestemme rødderne for funktionen fra introduktionen: $f(x) = -0,2x^2 + 0,2x + 4$.

Først bestemmes diskriminanten: $d = b^2 - 4ac = 0,2^2 - 4 \cdot (-0,2) \cdot 4 = 3,24$.

Dernæst indsættes i formlen:

$$x = \frac{-0,2 \pm \sqrt{3,24}}{2(-0,2)} = \begin{cases} -4 \\ 5 \end{cases}$$

Rødderne er altså $x = -4$ og $x = 5$.

24 Bevis for sætning 21

I beviset sætter vi først regneforskriften lig med nul.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$2^2a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$(2ax)^2 + b^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = d$$

Vi ganger med $4a$ på begge sider

Vi trækker $4ac$ fra på begge sider

Vi lægger b^2 til på begge sider

Vi udnytter en kvadratsætning og definitionen af d

På venstre side er udtrykket sat i anden og derfor positivt. Hvis d er et negativt tal, er der derfor ingen værdier af x , hvor ligningen har en løsning.

Hermed har vi bevist (1).

Hvis $d = 0$, har vi ligningen:

$$(2ax + b)^2 = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Som er ensbetydende med

Denne ligning løser vi for x

Vi har trukket b fra på begge sider

Vi har divideret med $2a$ på begge sider

Hermed har vi bevist (2).

Hvis $d > 0$ har vi:

$$(2ax + b)^2 = d$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{d}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{d}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Vi har brugt, at $p^2 = q$ er ensbetydende med $p = \pm \sqrt{q}$

Vi har trukket b fra på begge sider

Vi har divideret med $2a$ på begge sider

Hermed har vi bevist (3).

Potensregneregler

$$p^n \cdot q^n = (p \cdot q)^n$$

Kvadratsætning

$$(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$



25 Øvelse

Betragt de tre andengradspolynomier

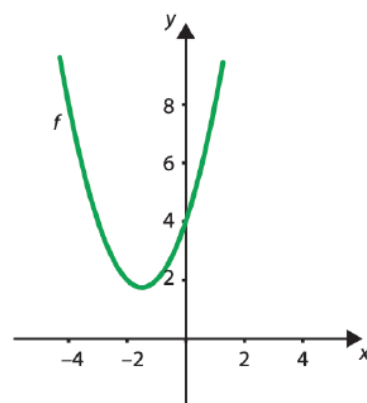
$$f(x) = 2x^2 - 2x - 4, \quad g(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \text{og} \quad h(x) = -x^2 + 7x - 12.$$

- Beregn diskriminanten for alle tre polynomier.
- Bestem rødderne (hvis der er nogen) for alle tre polynomier.
- Tegn graferne for alle tre polynomier med CAS, og aflæs eventuelle skæringspunkter med x-aksen.

26 Øvelse

I koordinatsystemet ses grafen for en funktion af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Bestem fortegnet af koefficienten a .
- Bestem fortegnet af koefficienten b .
- Bestem værdien af koefficienten c .
- Bestem antallet af rødder ud fra grafen.
- Bestem diskriminantens fortegn.

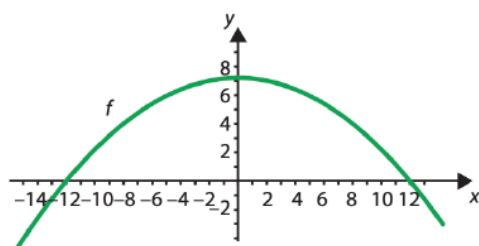




1.4 Faktorisering og modellering

27 Introduktion

På billedet ses broen Piney Branch Bridge i Washington. Broens bue er parabelformet. I afsnittet her skal vi se på, hvordan man kan frembringe en forskrift ud fra oplysninger om bredde og højde for parabelbuen.



28 Eksempel

I en model for broen kommer vi frem til andengradspolynomiet

$$f(x) = -0,05x^2 + 7,2.$$

Med denne forskrift har parablens toppunkt y -værdien 7,2.

Parablen skærer x -aksen i $x = -12$ og $x = 12$.

Derved er afstanden mellem rødderne 24.

29 Eksempel

I designet af forskriften $f(x) = -0,05x^2 + 7,2$ har vi krævet tre ting.

- (1) f skal være et andengradspolynomium med grenene nedad,
- (2) f skal have rødderne -12 og 12 , og endeligt at
- (3) toppunktet skal være i $(0; 7,2)$.

ad (2) En funktion med forskriften $f(x) = a \cdot (x - 12) \cdot (x + 12)$ har rødderne 12 og -12 , fordi $f(x) = 0$ for disse to x -værdier.

ad (1) $f(x) = a \cdot (x - 12) \cdot (x + 12) = ax^2 - 144a$ er et andengradspolynomium.

ad (3) Toppunkt i $(0; 7,2)$ betyder, at $f(0) = 7,2$. Vi udregner først $f(0) = a \cdot 0^2 - 144a = -144a$.

Vi har altså ligningen $-144a = 7,2$ med løsningen $a = \frac{-144}{7,2} = -0,05$.

Denne værdi af a indsættes i (1), hvorefter vi har $f(x) = -0,05x^2 + 7,2$.

30 Nulreglen

Der er en enkel forklaring på, at vi i eksemplet ovenfor kan aflæse rødderne direkte i andengradspolynomiet $f(x) = -0,05(x - 12)(x + 12)$.

Andengradspolynomiet er nemlig skrevet på faktoriseret form, og så kan vi benytte nulreglen (se boks i margin).

Ifølge nulreglen skal blot én af faktorerne i forskriften for $f(x)$ være nul, for at funktionsværdien giver nul.

Første parentes giver nul for $x = 12$ og anden parentes giver nul for $x = -12$:

$$f(12) = -0,05 \cdot (12 - 12) \cdot (12 + 12) = -0,05 \cdot 0 \cdot 24 = 0$$

$$f(-12) = -0,05 \cdot (-12 - 12) \cdot (-12 + 12) = -0,05 \cdot (-24) \cdot 0 = 0$$

To tals sum gange de samme to tals differens:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



Nulreglen

$$p \cdot q = 0$$

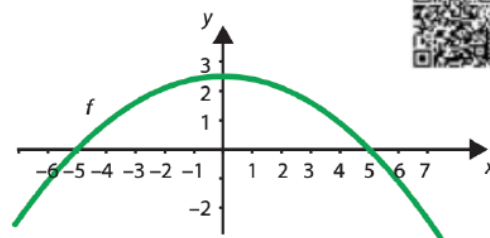
er ensbetydende med at

$$p = 0 \text{ eller } q = 0$$



31 Eksempel

Ved at skrive et andengradspolynomium på faktoriseret form er det let at frembringe parabler med bestemte rødder og en bestemt højde af toppunktet. Eksempelvis kan vi bruge forskriften $f(x) = -0,1(x - 5)(x + 5)$ til at frembringe en parabel med rødderne -5 og 5 og højden $2,5$, hvis x -aksen betegner jordoverfladen.



32 Sætning

En funktion med en **faktoriseret** forskrift af typen $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ er et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ med rødderne x_1 og x_2 .

33 Bevis

Vi ganger faktorerne ud og viser, at vi får $ax^2 + bx + c$, altså

”en konstant gange x^2 plus en konstant gange x plus en konstant”:

$$\begin{aligned} f(x) &= a((x - x_1)(x - x_2)) \\ &= a(x^2 - x \cdot x_2 - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2) \\ &= a \cdot x^2 - a \cdot x_2 \cdot x - a \cdot x_1 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2 \\ &= a \cdot x^2 + \underbrace{(-a \cdot x_2 - a \cdot x_1)}_b \cdot x + \underbrace{a \cdot x_1 \cdot x_2}_c \end{aligned}$$

Da $(-ax_2 - ax_1)$ er konstanter, der kan udregnes til én ny konstant, og ax_1x_2 ligeså, er vi kommet frem til en forskrift af typen $ax^2 + bx + c$. Derfor er f et andengradspolynomium. Hermed er sætningen bevist.

Produkt af to parenteser:

$$(p + q) \cdot (r + s) =$$

$$p \cdot r + p \cdot s + q \cdot r + q \cdot s$$

Sætte uden for en parentes:

$$p \cdot q + p \cdot r = p \cdot (q + r)$$

34 Øvelse

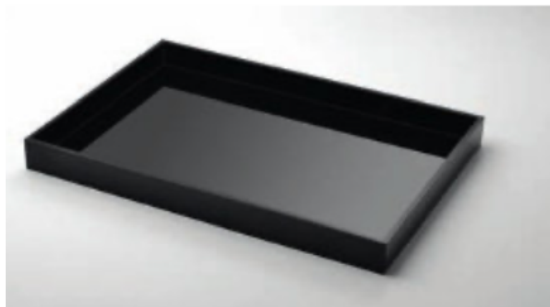
Et andengradspolynomium har rødderne -4 og 4 .

- Opskriv forskriften for f på faktoriseret form, idet det oplyses, at konstanten $a = -0,2$.
- Tegn grafen for f i CAS.
- Bestem toppunktets koordinater.
- Bestem en ny værdi af konstanten a , således at toppunktet kommer til at ligge i $(0; 6,4)$.

35 Øvelse

Et andengradspolynomium har rødderne -1 og 7 .

- Opskriv forskriften for f på faktoriseret form, idet det oplyses, at konstanten $a = -1$.
- Tegn grafen for f i CAS.
- Brug parablens symmetriske egenskaber til at redegøre for x -værdien i parablens toppunkt.
- Beregn toppunktets andenkoordinat ved at indsætte x -værdien fra delspørgsmål c. i forskriften for f .



1.5 Polynomier af højere grad

36 Introduktion

En rektangulær bakke kan laves ud af en plade ved at klippe et kvadrat ud af hvert hjørne med en given sidelængde x . Se tegningen i margenen. Volumen af bakken kan beregnes med funktionen

$$V(x) = 4x^3 - 30x^2 + 50x.$$

Dette er et tredjegradspolynomium, fordi den højeste eksponent er 3. I afsnittet her skal vi se nærmere på polynomier, der har højere grad end 2.

37 Eksempel

Vi vil opstille en forskrift for bakkens volumen. Når bakken foldes som vist på tegningen, bliver x højden af bakken, og bakkens bredde og længde bliver pladens sidelængder fratrasket $2x$ (et x i hver ende).

Volumen af en kasse beregnes ved at gange sidelængderne sammen, og vi får derfor følgende volumenfunktion:

$$V(x) = x \cdot (5 - 2x) \cdot (10 - 2x),$$

som kan omskrives til

$$V(x) = 4x^3 - 30x^2 + 50x.$$

38 Eksempel

På figuren ses grafen for tredjegradspolynomiet $f(x) = 4x^3 - 30x^2 + 50x$.

I polynomier er $Dm(f)$ lig med alle reelle tal.

For polynomiet f , som bruges som model for volumen i introduktionscasen, er det modelbetingelserne, der bestemmer definitionsområdet. Her er $Dm(V) =]0; 2,5[$, fordi kassen er 5 bred, og x er en længde (et positivt tal).

39 Definition

Et polynomium af n 'te grad er en funktion med en forskrift af typen

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0,$$

hvor koefficienterne $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ og a_0 er reelle tal, og hvor a_n ikke er nul.

40 Eksempel

Funktionen $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 10$ er et fjerdegradspolynomium.

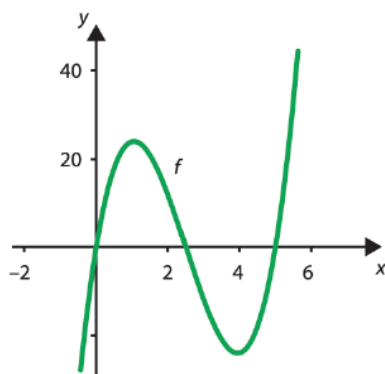
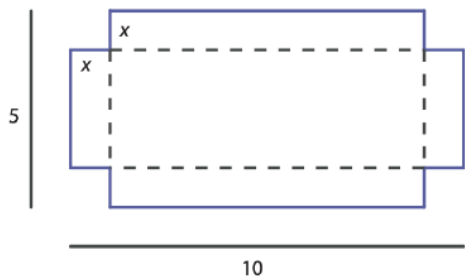
Vi ser på grafen, at der må være to rødder.

Hvis vi parallelforskyder grafen lodret op, ved at sætte konstantleddet til et tal større end 10, kan vi få et fjerdegradspolynomium uden rødder.

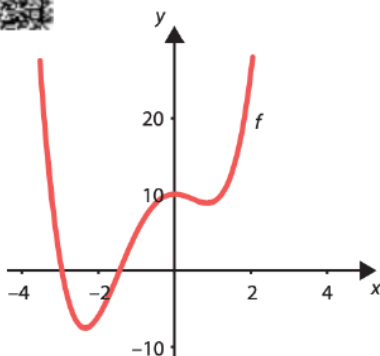
Omvendt, hvis vi formindsker konstantleddet, vil grafen parallelforskydes nedad. Vi kan derved få 0, 1, 2, 3 eller 4 rødder i fjerdegradspolynomiet.

41 Sætning

Et polynomium af n 'te grad har højst n rødder.



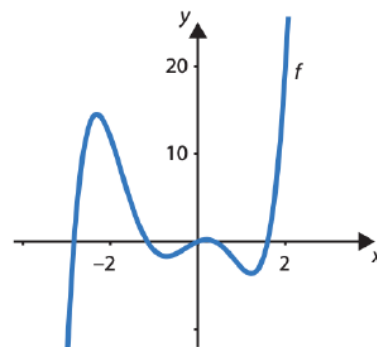
Grenene vender hver sin vej, når polynomiets grad er ulige, og samme vej, når graden er lige.



42 Eksempel

Femtegradspolynomiet $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 2x$, hvis graf kan ses i marginen, har 5 rødder. Hvis vi imidlertid lægger konstanten 5 til, får vi et andet polynomium: $g(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 2x + 5$, hvis graf har samme forløb, men er parallelforskudt opad.

Bemærk, at uanset størrelsen af den konstant vi lægger til, vil vi altid have mindst én rod, i modsætning til eksemplet med fjerdegradspolynomiet.



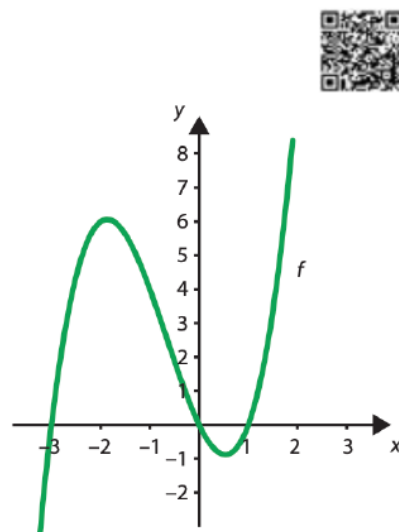
43 Sætning

Et polynomium af ulige grad har mindst én rod.

44 Eksempel

Funktionen $f(x) = 2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x+3)$ er et tredjegradspolynomium skrevet på faktoriseret form. Ganger vi de fire faktorer sammen på højresiden, får vi tredjegradspolynomiet skrevet op på traditionel form $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x$. Omskrivningen kan udføres med CAS. I nogle programmer med kommandoen "expand(2·x·(x-1)·(x+3))".

I den faktoriserede form er det let at aflæse rødderne til 0, 1 og -3, idet hvert af disse tal bevirker, at en af faktorerne bliver lig med 0, og derved bliver $f(x) = 0$ ifølge nulreglen.



45 Øvelse

Et polynomium er givet ved $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 10$.

- Hvilken grad har polynomiet?
- Angiv hvor mange muligheder, der er for antal rødder for f .
- Tegn grafen for f .
- Angiv, hvor mange rødder f har.
- Bestem rødderne med CAS.

46 Øvelse

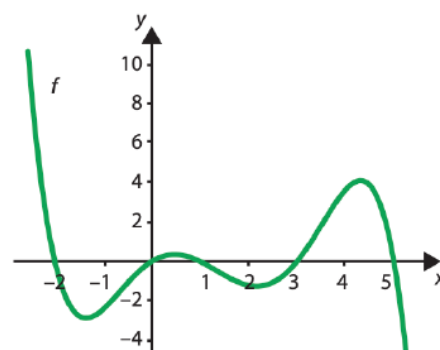
Lad der være givet en funktion $f(x) = -0,3x(x+3)(x+2)(x-1)$

- Brug CAS til at gange parenteserne ud, for at vise at f er et fjerdegradspolynomium.
- Bestem rødderne i f .

47 Øvelse

I koordinatsystemet ses grafen for et femtegradspolynomium.

- Angiv antallet af rødder.
- Bestem rødderne ved grafisk aflæsning.
- Indsæt rødderne en af gangen i det faktoriserede polynomium $f(x) = -0,05 \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$, og afgør, om polynomiets graf kunne være den, der vises i koordinatsystemet.





Scan QR-koden for at komme til facitlisten.

Opgave 101

Et andengradspolynomium er givet ved forskriften $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Beregn følgende funktionsværdier uden CAS

- $f(0)$
- $f(1)$
- $f(4)$
- $f(-2)$

Opgave 102

Et andengradspolynomium er givet ved forskriften $g(x) = 0,2x^2 - 3,7x + 2,1$. Definér funktionen i dit CAS-værktøj, og bestem følgende funktionsværdier

- $g(5)$
- $g(-5)$
- $g(4,92)$
- $g(0,017)$

Opgave 103

Tegn ved hjælp af CAS graferne for nedenstående andengradspolynomier

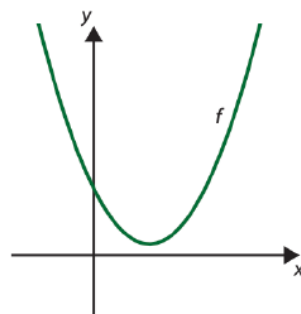
- $f_1(x) = 0,5x^2 - 3x + 7$
- $f_2(x) = 0,1x^2 + 0,2x - 1,9$
- $f_3(x) = -2x^2 - 4x$

Opgave 104

Tegn ved hjælp af CAS graferne for nedenstående andengradspolynomier

- $g_1(x) = 0,1x^2$
- $g_2(x) = x^2$
- $g_3(x) = 3x^2$

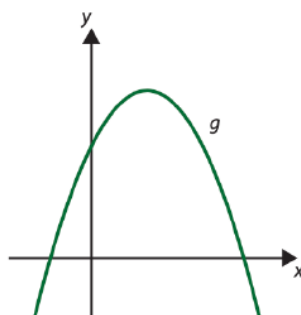
Opgave 105



I koordinatsystemet ses grafen for funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Angiv fortegnet for koefficienten a .
- Angiv fortegnet for koefficienten c .
- Angiv fortegnet for koefficienten b .

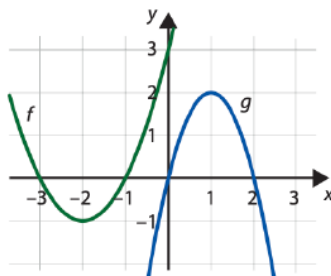
Opgave 106



I koordinatsystemet ses grafen for funktionen $g(x) = ax^2 + bx + c$

- Angiv fortegnet for koefficienten a .
- Angiv fortegnet for koefficienten c .
- Angiv fortegnet for koefficienten b .

Opgave 107



I koordinatsystemet ses graferne for andengradspolynomierne f og g

- Bestem koordinatsættet til parablernes toppunkter.

Opgave 108

Beregn diskriminanten af nedenstående andengradspolynomier

- a. $p_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$
- b. $p_2(x) = -x^2 - 2x + 5$
- c. $p_3(x) = -3x^2 + x - 4$
- d. $p_4(x) = 5x^2 - 2x + 3$

Opgave 109

Bestem koordinaterne til toppunktet for nedenstående andengradspolynomier ved hjælp af toppunktsformlen

- a. $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 2$
- b. $f_2(x) = -x^2 + 2x + 3$
- c. $f_3(x) = x^2 - x + 5$
- d. $f_4(x) = -3x^2 - 4x$

Opgave 110

Tegn graferne, og bestem koordinaterne til toppunktet for nedenstående andengradspolynomier ved hjælp af CAS

- a. $g_1(x) = 4x^2 - 2x + 1$
- b. $g_2(x) = -3x^2 + x + 8$
- c. $g_3(x) = 0,2x^2 + 0,6x + 3,4$
- d. $g_4(x) = -0,0012x^2 + 2,4x + 134$

Opgave 111

Et andengradspolynomium har forskriften $p(x) = x^2 + 4x + k$

- a. Bestem k , så diskriminanten bliver 0.

Opgave 112

Beregn diskriminanten, og angiv antallet af rødder for nedenstående andengradspolynomier

- a. $p_1(x) = x^2 - 2x - 3$
- b. $p_2(x) = 2x^2 + 12x + 10$
- c. $p_3(x) = x^2 - 4x + 4$
- d. $p_4(x) = x^2 - 2x + 3$

Opgave 113

Et andengradspolynomium har forskriften

$$p(x) = 2x^2 + k \cdot x + 2$$

- a. For hvilke værdier af k har p netop én rod?

Opgave 114

Bestem, uden brug af CAS, rødderne til nedenstående andengradspolynomier

- a. $p_1(x) = x^2 - 3x + 2$
- b. $p_2(x) = -2x^2 + 4x + 6$
- c. $p_3(x) = x^2 - 25$
- d. $p_4(x) = 2x^2 - 2x - 12$

Opgave 115

Tegn graferne for nedenstående andengradspolynomier, og find rødderne grafisk med CAS

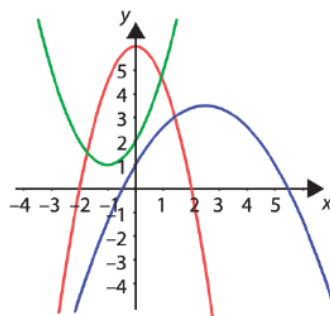
- a. $p_1(x) = -x^2 + 2x + 1$
- b. $p_2(x) = -2x^2 - 20x - 43$
- c. $p_3(x) = 0,5x^2 - 2x - 5$
- d. $p_4(x) = 0,1x^2 - 0,4x - 2,6$

Opgave 116

Bestem tallet k i nedenstående andengradspolynomier, således at den tilhørende parabel kun har et enkelt skæringspunkt med x -aksen

- a. $p_1(x) = 2x^2 - 8x + k$
- b. $p_2(x) = 2x^2 + k \cdot x + 2$
- c. $p_3(x) = k \cdot x^2 - 4x - 2$

Opgave 117

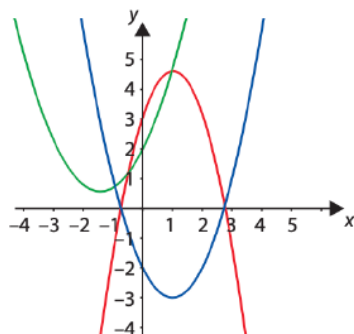


Forskrifterne for hver af de tre parabler ovenfor er af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Bestem, for den grønne, røde og blå parabel

- Fortegnet på koefficienten a .
- Fortegnet på koefficienten b .
- Værdien af koefficienten c .
- Fortegnet på diskriminanten.

Opgave 118

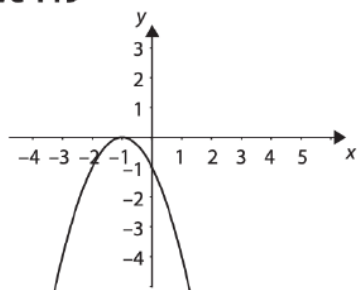


Forskrifterne for hver af de tre parabler ovenfor er af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bestem, for den grønne, røde og blå parabel

- Fortegnet på koefficienten a .
- Fortegnet på koefficienten b .
- Værdien af koefficienten c .
- Fortegnet på diskriminanten.

Opgave 119



Forskriften tilhørende denne parabel er af typen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Bestem toppunktets koordinater.
- Bestem eventuelle rødder.
- Bestem fortegnet af konstanten a .
- Bestem værdien af konstanten c i forskriften.
- Hvad kan du sige om diskriminanten?

Opgave 120

Bestem rødderne til nedenstående andengradspolynomier

- $p_1(x) = (x - 1)(x + 3)$
- $p_2(x) = (x + 1)(x - 2)$
- $p_3(x) = (x - 4)(x + 2)$
- $p_4(x) = 7(x + 1)(x + 3)$

Opgave 121

Bestem rødderne til nedenstående andengradspolynomier

- $p_1(x) = (x + 8)(x - 4)$
- $p_2(x) = 2,5(x - 1,1)(x - 5)$
- $p_3(x) = (x + 3,4)(x - 1,3)$
- $p_4(x) = 3(x - 0,1)(x + 0,03)$

Opgave 122

Omskriv følgende andengradspolynomier til formen

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ved at gange parenteserne ud.

- $f_1(x) = (x - 1)(x + 2)$
- $f_2(x) = (x + 1)(x + 3)$
- $f_3(x) = 2(x + 2)(x - 4)$
- $f_4(x) = 3(x + 5)(x + 6)$

Opgave 123

- Bestem forskriften for et andengradspolynomium med rødderne $r_1 = 2$ og $r_2 = 5$.

Der er flere korrekte muligheder. Angiv én.

Opgave 124

- Bestem forskriften for et andengradspolynomium med rødderne $r_1 = -1$ og $r_2 = 3$.

Der er flere korrekte muligheder. Angiv én.

Opgave 125

- Bestem forskriften for et andengradspolynomium med rødderne $r_1 = -10$ og $r_2 = -6$.

Der er flere korrekte muligheder. Angiv én.

Opgave 126

- Bestem forskriften for et andengradspolynomium med rødderne $r_1 = 1$ og $r_2 = -2$.
Skriv forskriften på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Det oplyses, at $a = 1$.

Opgave 127

Opskriv følgende andengradspolynomier på faktoreret form. Uden brug af CAS.

- a. $f_1(x) = x^2 - 2x - 3$
- b. $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$
- c. $f_3(x) = 2x^2 + 2x - 12$
- d. $f_4(x) = 3x^2 + 6x + 3$

Opgave 128

Opskriv følgende andengradspolynomier på faktoreret form. Med brug af CAS.

- a. $g_1(x) = 0,3x^2 + 1,65x - 8,352$
- b. $g_2(x) = -0,7x^2 - 2,31x + 0,49$
- c. $g_3(x) = -0,1x^2 + 1,37x - 4,42$

Opgave 129

Bestem graden af nedenstående polynomier

- a. $f_1(x) = 0,5x^4 - x^2$
- b. $f_2(x) = 3x^3 - 5x^2$
- c. $f_3(x) = 0,2x^5 + 6x^4 + x^3 - 230x^2$
- d. $f_4(x) = 8x - 2$

Opgave 130

Bestem graden af nedenstående polynomier

- a. $f_1(x) = 21x^8 - 34x^6 - 5x^4 + 9$
- b. $f_2(x) = 0,53x^6 + 10x^4$
- c. $f_3(x) = 0,2x^3 + 6x^2 + 2x$
- d. $f_4(x) = 8x^{12} + 7x^9$

Opgave 131

Bestem, med CAS, rødderne til nedenstående polynomier. Vær sikker på, at du finder alle rødderne.

- a. $g_1(x) = 0,1x^3 + 0,1x^2 - 1,7x + 1,5$
- b. $g_2(x) = 0,1x^4 + 0,7x^3 - 0,7x^2 - 4,3x + 4,2$
- c. $g_3(x) = -0,5x^5 + 4,5x^4 - 16x^3 + 28x^2 - 24x + 8$
- d. $g_4(x) = -x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 2x - 8$

Opgave 132

Undersøg, uden brug af CAS, om $x = 2$ er rod i nedenstående polynomier

- a. $p_1(x) = x^2 - 3x + 2$
- b. $p_2(x) = x^2 + x - 2$

c. $p_3(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

d. $p_4(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

Opgave 133

Et polynomium er givet ved

$$f(x) = -0,01(x - 4)(x - 1)(x + 2)(x + 7)$$

- a. Aflæs polynomiets rødder.
- b. Brug CAS til at gange parenteserne ud.
- c. Angiv graden af polynomiet.
- d. Tegn grafen for polynomiet i intervallet $-10 \leq x \leq 10$.

Opgave 134

Et polynomium er givet ved

$$g(x) = 0,01(x - 3,1)(x - 2,1)(x + 0,4)(x + 3,6)(x + 6)$$

- a. Aflæs polynomiets rødder.
- b. Brug CAS til at gange parenteserne ud.
- c. Angiv graden af polynomiet.
- d. Tegn grafen for polynomiet i intervallet $-10 \leq x \leq 10$.

Opgave 135

En lille virksomhed producerer legetøjsmodeller af campingvogne. De kan sælges for 20 kr. pr. styk, og deres omkostninger pr. måned ved produktion af x styk vogne er $c(x) = 0,05x^2 + 100$

- a. Opstil en funktion, der udregner indtægten som funktion af antallet x .
- b. Opstil en funktion, der udregner fortjenesten som funktion af antallet x .
- c. Bestem det antal, hvor fortjenesten er størst.

Opgave 136

En planteskole sælger gensplejsede tomater i skønne farver. Tomaterne sælges for 45 kr. pr. kg. De samlede omkostninger ved produktion af x styk kan udregnes med funktionen $c(x) = 0,02x^2 + 350$

- a. Opstil en funktion, der udregner indtægten som funktion af antallet x .
- b. Opstil en funktion, der udregner fortjenesten som funktion af antallet x .
- c. Bestem det antal, hvor fortjenesten er størst.