

Faktoropløsning



Når vi skriver et helt tal n som et produkt af andre hele tal, så siger vi, at tallet n er blevet *faktoropløst*. F.eks. er

$$12 = 3 \cdot 4, \quad 60 = 4 \cdot 15, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \text{og} \quad 17 = 1 \cdot 17$$

alle eksempler på faktoropløsninger. Man kan vise, at et helt tal kun på en måde kan opløses som produkt af *primtal*. Det er tal, hvor kun 1 og tallet selv går op, f.eks. 2, 3, 5, 7, 11, 13 og 17.

Det viser sig at, der gælder noget lignende for andengradspolynomier. Vi ser først på et par eksempler.

Eksempel 6

Andengradspolynomiet $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ har diskriminanten

$$d = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 1 > 0$$

og derfor også to rødder r_1 og r_2 . Løsningsformlen for andengradsligninger giver $r_1 = 2$ og $r_2 = 4$. Vi bemærker nu, at

$$\frac{1}{2}(x - 2)(x - 4) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 2x + 8) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4,$$

dvs. når vi ganger de tre faktorer $\frac{1}{2}$, $(x - 2)$ og $(x - 4)$ med hinanden, så får vi $f(x)$. Vi siger også, at $f(x)$ er opløst i faktorer:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4).$$

Andengradspolynomiet $g(x) = 2x^2 - 12x + 18$ har diskriminanten $d = 0$ og roden $r = \frac{-(-12)}{2 \cdot 2} = 3$. Da

$$2(x - 3)(x - 3) = 2(x - 3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18$$

har vi igen opnået en faktoropløsning:

$$g(x) = 2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2.$$

I dette tilfælde optræder faktoren $x - 3$ to gange. Man kalder roden r for en *dobbelrod*.

Sætning 4

For andengradspolynomiet

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

gælder:

- hvis $d > 0$, har $f(x)$ to forskellige rødder r_1 og r_2 og faktoropløsningen

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2),$$

- hvis $d = 0$, har $f(x)$ dobbelroden r og faktoropløsningen

$$f(x) = a(x - r)^2,$$

- hvis $d < 0$, har $f(x)$ ingen rødder og ingen faktoropløsning.