Vandret parallelforskydning

Når man ændrer forskriften $f(x)$ for en funktion til $f(x - h)$, så resulterer det i en vandret parallelforskydning på h enheder i x-aksens retning (til højre når $h > 0$, til venstre når $h < 0$). Det fænomen omtalte vi også i *MAT A1 stx* kapitel 1. Ser vi f.eks. på parablen givet ved $f(x) = 2x^2$, så vil graferne for

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-3) = 2(x-3)^2 \\ h(x) &= f(x-(-3)) = f(x+3) = 2(x+3)^2 \end{aligned}$$

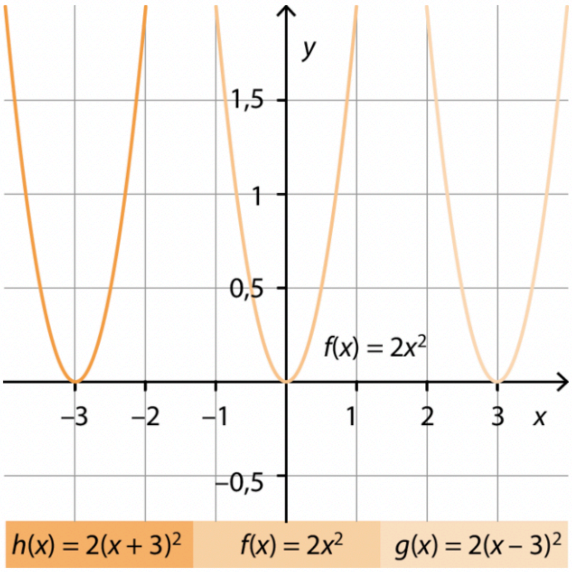
være parabler magen til. Se figur 7. Grafen for $g(x)$ er forskudt 3 enheder i x-aksens retning, dvs. 3 enheder til højre, i forhold til grafen for $f(x)$. Grafen for $h(x)$ er forskudt –3 enheder i x-aksens retning, dvs. 3 enheder til venstre for grafen for $f(x)$.

Lodret parallelforskydning

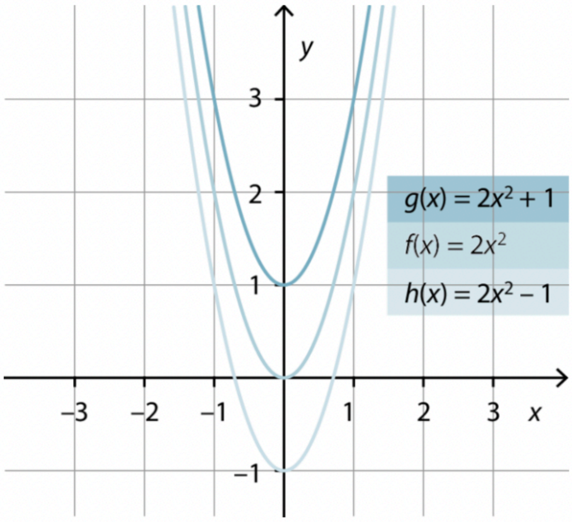
Lægger man en konstant k til $f(x)$ fås $f(x) + k$, hvis graf er lodret parallelforskudt i forhold til grafen for $f(x)$ (op når $k > 0$, ned når $k < 0$). F.eks. er graferne for

$$f(x) = 2x^2, \quad g(x) = 2x^2 + 1 \quad \text{og} \quad h(x) = 2x^2 - 1$$

alle kongruente parabler blot lodret parallelforskudt i forhold til hinanden. Se figur 8.



Figur 7

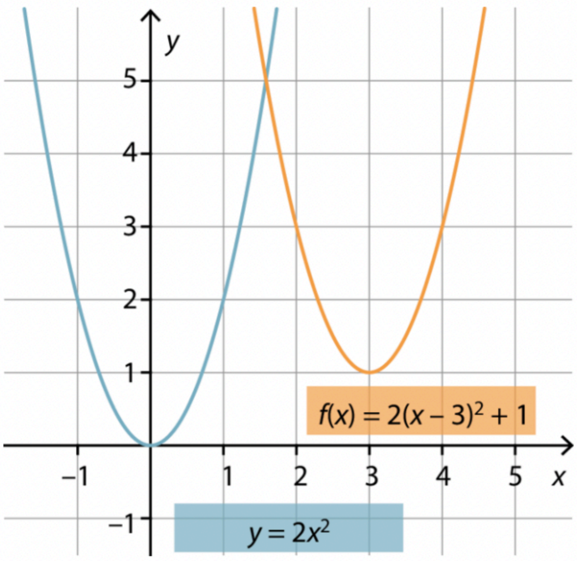


Figur 8

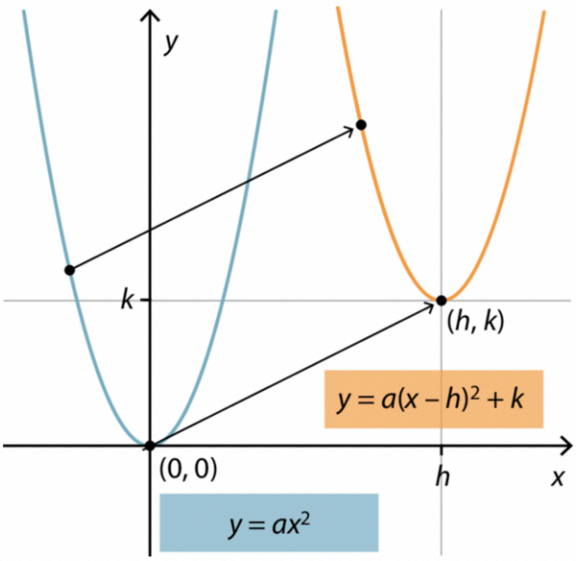
Vi kan kombinere de to typer af parallelforskydninger, f.eks. så vi får forskriften

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 1.$$

Grafen for $f(x)$ er en parabel kongruent med grafen for $y = 2x^2$ blot forskudt 3 enheder i x-aksens positive retning og 1 enhed i y-aksens positive retning. Ved de to parallelforskydninger flyttes punktet (0,0) til (3,1). Grafen for $f(x)$ har derfor toppunkt i (3,1). Se figur 9.



Figur 9



Figur 10

Vi samler disse iagttagelser i en sætning, der også er illustreret på figur 10.

Sætning 1

Grafen for $f(x) = a(x - h)^2 + k$ er en parabel kongruent med parablen med ligningen $y = ax^2$. Toppunktet T for grafen for $f(x)$ har koordinaterne

$$T = (h, k).$$

Eksempel 1

Grafen for $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$ må ifølge sætningen være en parabel, hvis der findes tre tal a, h og k så $f(x)$ kan skrives på formen $f(x) = a(x - h)^2 + k$:

$$\begin{aligned}
3x^2 - 6x + 7 &= a(x - h)^2 + k \;\Leftrightarrow \\
3x^2 - 6x + 7 &= a\left(x^2 - 2hx + h^2\right) + k \;\Leftrightarrow \\
3x^2 - 6x + 7 &= ax^2 - 2ahx + ah^2 + k.
\end{aligned}$$

Andengradsleddet på begge sider af lighedstegnet skal stemme overens. Det betyder, at $a = 3$. Førstegradsleddene skal også være ens. Det giver

$$-6 = -2ah \;\Leftrightarrow\; h = \frac{-6}{-2a} = \frac{-6}{-2 \cdot 3} = 1.$$

Ved at se på konstantleddene får vi

$$7 = ah^2 + k \;\Leftrightarrow\; k = 7 - ah^2 = 7 - 3 \cdot 1^2 = 4.$$

Altså er

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 7 = 3(x - 1)^2 + 4.$$

Grafen for $f(x)$ er derfor en parabel kongruent med parablen med ligningen $y = 3x^2$. Omskrivningen viser også, at toppunktet er placeret i (1,4).