

EKSAMENSOPGAVER MATEMATIK

STX A-NIVEAU

2018-2022

Indledning

I dette dokument er samlet eksamensopgaver fra de i alt 17 eksamenssæt der har været stillet på STX-A-niveau siden implementeringen af gymnasireformen i 2017. Af de udsendte sæt har to været såkaldt ”vejledende” sæt, mens sættet 2022-07 er det kasserede sæt fra juni 2022.

Opgaverne er delt ud på 10 overskrifter og under hver overskrift delt efter delprøve 1 hhv. 2:

1. Tal, formler og ligninger
2. Funktioner og differentialregning
3. Integralregning
4. Differentialligninger
5. Vektorfunktioner
6. Funktioner af to variable
7. Vektorer og analytisk geometri
8. Sandsynlighedsregning
9. Statistik (regression)
10. Forberedelsesmaterialer

Enkelte opgaver kan passe ind under flere overskrifter, men er da placeret under den overskrift, som jeg tænker de bedst passer ind under. Det kan f.eks. være optimeringsopgaver, som typisk er placeret under den type funktion der skal optimeres, samt integralregningsopgaver der er placeret under den funktionstype der skal integreres, fordi funktionstypen er i centrum for opgaven.

Ved spørgsmål der i opgavesættet var markeret med grønt som *mindstekravsopgave*, er der sat en lille grøn firkant: ■. Til gengæld kan det ikke ses om spørgsmålene har været sat til 5 eller 10 point. Denne information er sorteret fra, fordi pointsætningen ikke handler om opgavens indhold, men om balancen i det samlede sæt. Ved hver opgave står hvilket opgavesæt opgaven er taget fra, samt hvilket nummer den har haft i sættet, så man nemt selv kan se hvordan den var placeret.

Til filen er vedhæftet alle relevante bilag. Dels de sider som med fordel kan bruges til at tegne på i visse opgaver i delprøve 1, samt data-bilag til opgaver i delprøve 2. Delprøve 1-opgaver er markeret med farven orange, mens delprøve 2-opgaver er markeret med farve cyan. Formelsamlingsindstik til de relevante forberedelsesmaterialer er ligeledes vedhæftet.

Kasper Bjering Søby Jensen,
Ishøj, august 2022.

1. Tal, formler og ligninger

Delprøve 1:

1.D1.1 (2019-08, 1)

- a) Reducér udtrykket

$$(x + 2y)^2 - 2y \cdot (y + 2x).$$

1.D1.2 (2019-12, 1)

- a) Reducér udtrykket

$$5ab - 4a^2 + (2a - b)^2.$$

1.D1.3 (2020-05, 3)

- a) Reducér udtrykket

$$\frac{a \cdot (4a + 6)}{2a}.$$

1.D1.4 (2020-12, 3)

- a) Løs ligningen

$$x^3 \cdot (2x - 6) = 0.$$

1.D1.5 (2021-08, 1)

- a) Løs ligningen

$$x \cdot (3x - 9) = 0.$$

1.D1.5 (2021-12, 5)

- a) Løs for $x > 0$ ligningen

$$(x^2 - 9) \cdot \ln(x) = 0.$$

1.D1.6 (2021-12, 5)

- a) Løs ligningen

$$(x-3) \cdot (2x-5) = 0.$$

1.D1.7 (2022-06, 5)

- a) Reducér udtrykket $\frac{(a^2 - b^2) \cdot 5}{(a + b) \cdot 10}$.

1.D1.8 (2022-08, 3)

- a) Løs ligningen

$$(2x-6) \cdot (x^2 + 7x + 10) = 0.$$

2. Funktioner og differentialregning

Delprøve 1:

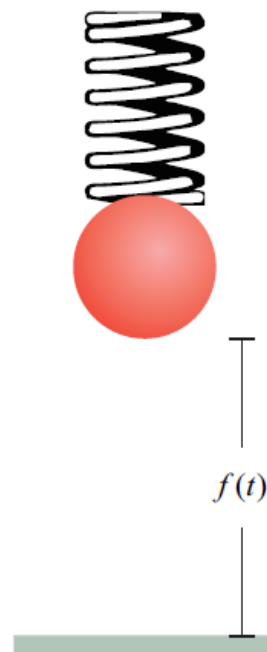
2.D1.1 (2018-06, 8 – Vejledende 1)

En bold er ophængt i en fjeder i et lokale. Bolden svinger langsomt op og ned. Boldens bevægelse kan beskrives ved den trigonometriske funktion givet ved

$$f(t) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot t\right) + 5,$$

hvor $f(t)$ betegner boldens afstand over gulvet (målt i dm) til tidspunktet t (målt i sekunder).

- a) Bestem perioden T for boldens svingning.
- b) Tegn grafen for f over to perioder.



2.D1.2 (2018-06, 9 – Vejledende 1)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot \ln(x^2 + 1).$$

- a) Bestem $f'(0)$.
- b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

2.D1.3 (2021-12, 2)

Funktionerne f og g er givet ved

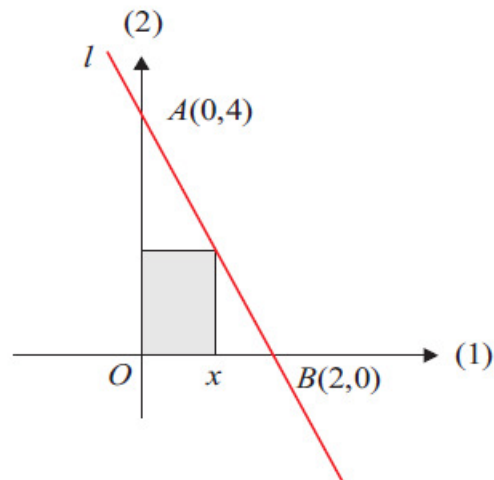
$$f(x) = 4x - 1 \text{ og } g(x) = x^3.$$

- a) Bestem $f(g(2))$.

2.D1.4 (2018-06, 11 – Vejledende 1)

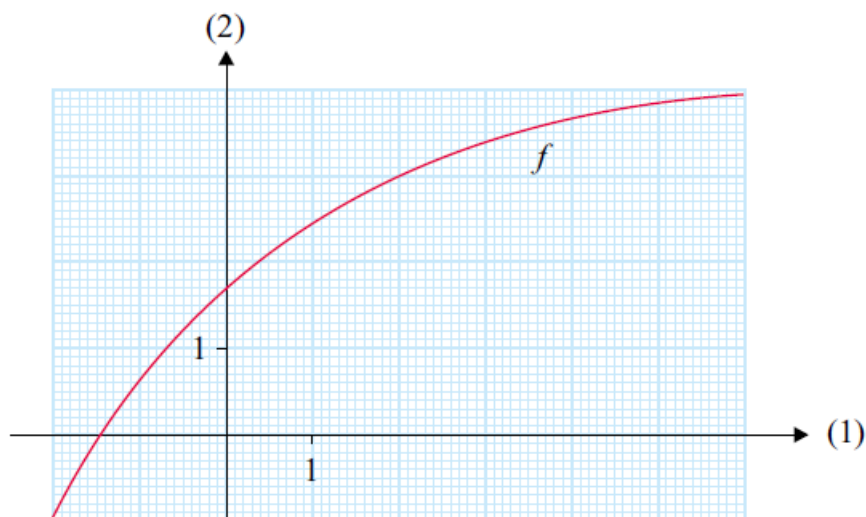
På figuren ses en ret linje l gennem punkterne A og B . Desuden er et rektangel indskrevet i trekant OAB som vist på figuren.

- Bestem arealet af rektanglet som funktion af x .
- Bestem den værdi af x , der gør arealet af rektanglet størst muligt.



2.D1.5 (2018-08, 2 – Vejledende 2)

På figuren ses grafen for en funktion f , der har en invers funktion f^{-1} .



- a) Bestem $f^{-1}(3)$.

Vedlagte bilag kan indgå i besvarelsen.

2.D1.6 (2022-12, 7)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x + \sin(x) + 4.$$

- Bestem $f'(x)$.
- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

2.D1.7 (2018-08, 3 – Vejledende 2)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4 \cdot e^{x^2+2x-3}.$$

- a) Bestem $f(1)$.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .

2.D1.8 (2019-08, 3)

En funktion f er bestemt ved

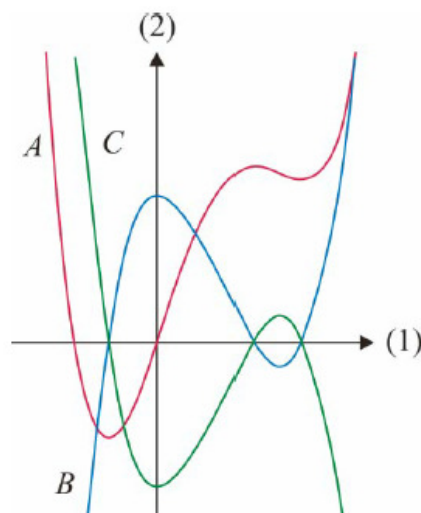
$$f(x) = x^2 \cdot e^x.$$

- a) Bestem $f'(x)$.
- b) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

2.D1.9 (2018-08, 10 – Vejledende 2)

På figuren ses graferne for tre funktioner. Det oplyses, at en af graferne er graf for funktionen f , og en anden er graf for en stamfunktion F til f .

- a) Gør rede for, hvilken af graferne A , B og C der er graf for f , og hvilken der er graf for F .



2.D1.10 (2021-12, 9)

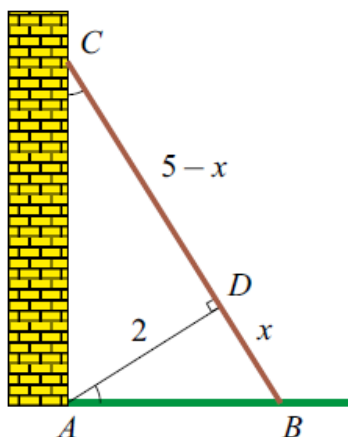
En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 3x - 4.$$

En funktion F er stamfunktion til f .

- a) Bestem monotoniforholdene for F .

2.D1.11 (2018-08, 11 – Vejledende 2)



Figuren viser en model af en 5 meter lang stige, der stilles op ad en lodret mur. I modellen er jorden vandret, murens bund benævnes A , og stigenes røringspunkt med jord og mur benævnes henholdsvis B og C . Det punkt på stigen, der er tættest på bunden af muren, benævnes D , og afstanden fra B til D benævnes x .

Det oplyses, at der er to mulige placeringer af stigen, så $|AD| = 2$.

- a) Bestem værdien af x for hver af disse to placeringer af stigen.

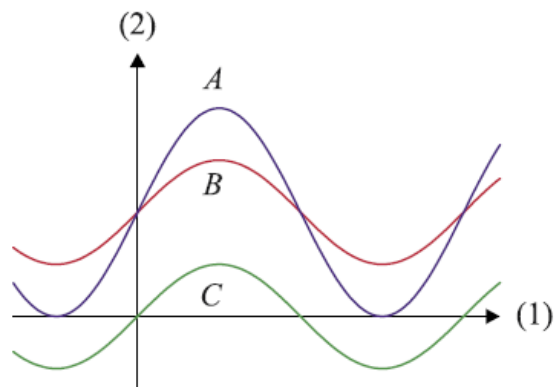
2.D1.12 (2019-05, 3)

På figuren ses graferne A , B og C for tre harmoniske svingninger:

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \sin(x) + 2$$

$$h(x) = 2 \cdot \sin(x) + 2$$



- a) Gør for hver af graferne A , B og C rede for, hvilken af funktionerne f , g og h den hører til.

2.D1.13 (2019-05, 5)

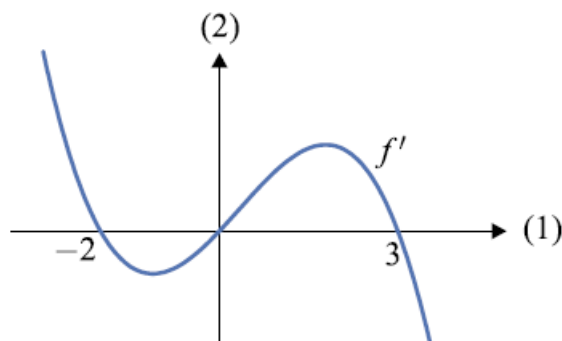
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x+2) \cdot (x-5) \cdot e^x.$$

- a) Bestem $f(0)$.
- b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

2.D1.14 (2019-05, 6)

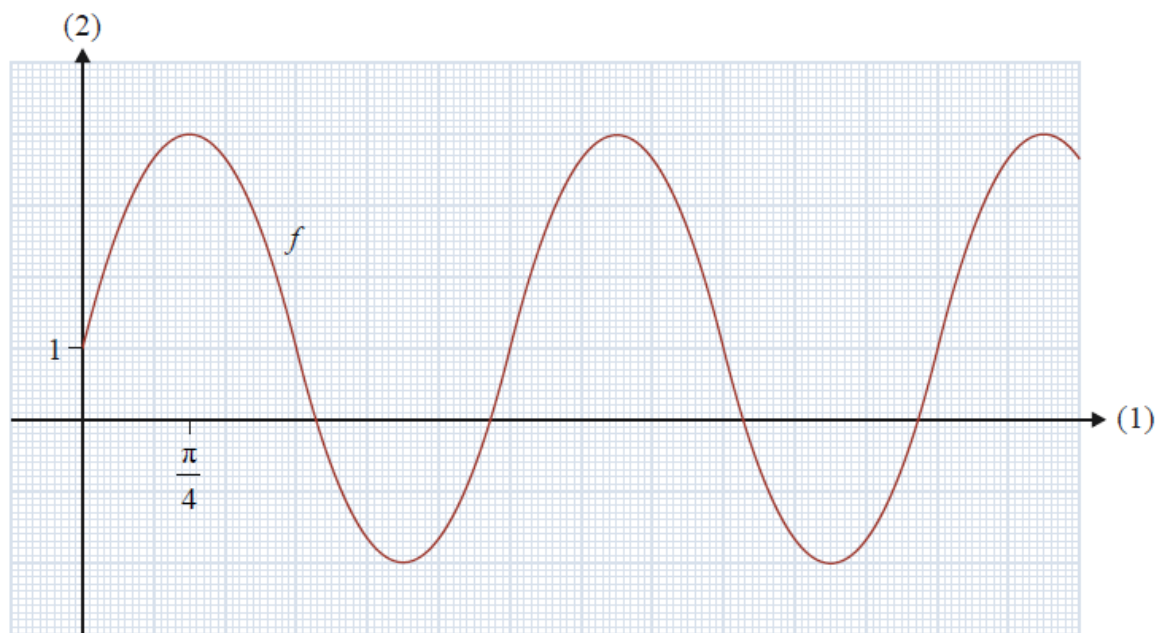
På figuren ses grafen for den afledede funktion f' for en funktion f i intervallet $[-3; 4]$.



- a) Bestem monotoniforholdene for funktionen f i intervallet $[-3; 4]$.

2.D1.15 (2019-08, 6)

På figuren ses grafen for funktionen f .



Funktionens forskrift er af typen

$$f(x) = A \cdot \sin(b \cdot x) + c.$$

- a) Brug figuren til at bestemme konstanterne A , b og c .

Benyt eventuelt vedlagte bilag.

2.D1.16 (2019-08, 10)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = (a \cdot x + b)^2,$$

hvor a og b er konstanter og $b < 0$.

Det oplyses, at $f'(0) = 2b$ og $f(1) = 4$.

a) Bestem a og b .

2.D1.17 (2019-12, 4)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sin(x) + 1.$$

■ a) Skitsér grafen for f i intervallet $[0; 2\pi]$. Benyt vedlagte bilag.

b) Bestem $f'(\pi)$.

2.D1.18 (2019-12, 7)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3x + 24.$$

Den omvendte funktion til f betegnes g .

a) Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem.

b) Bestem en forskrift for g .

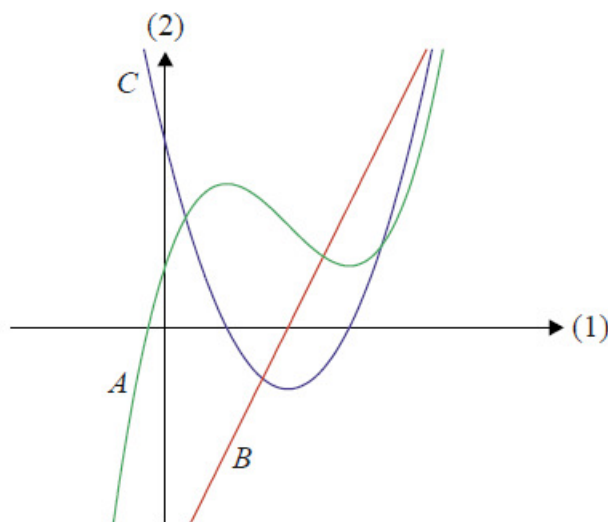
Benyt vedlagte bilag.

2.D1.19 (2020-05, 2)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

På figuren ses grafen for f sammen med grafen for dens afledede funktion f' samt grafen for en til f hørende stamfunktion F .



- a) Argumentér for, hvilken af graferne der hører til henholdsvis f' , f og F .

2.D1.20 (2020-05, 7)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3x - 6 \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

En linje l er givet ved ligningen $y = 2x - 7$. Grafen for f har netop én tangent t , der er parallel med l .

- a) Bestem førstekoordinaten til røringpunktet mellem t og grafen for f .

2.D1.21 (2022-05, 5)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^4 \cdot \sin(x).$$

- a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.22 (2020-06, 6)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 12x + 10,$$

hvor a og b er konstanter.

- a) Bestem antallet af løsninger til ligningen $f'(x) = 0$, når $a = 3$ og $b = 20$.
- b) Bestem a og b , når det oplyses, at $f'(-2) = 0$ og $f'(2) = 12$.

2.D1.23 (2020-08, 2)

En funktion f er bestemt ved forskriften

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{x-1}.$$

- a) Bestem $f(1)$.
- b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

2.D1.24 (2020-08, 3)

En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(t) = 6 \cdot \sin(\pi \cdot t) + 5.$$

- a) Angiv amplituden A .
- b) Bestem $f'(1)$.

2.D1.25 (2022-05, 3)

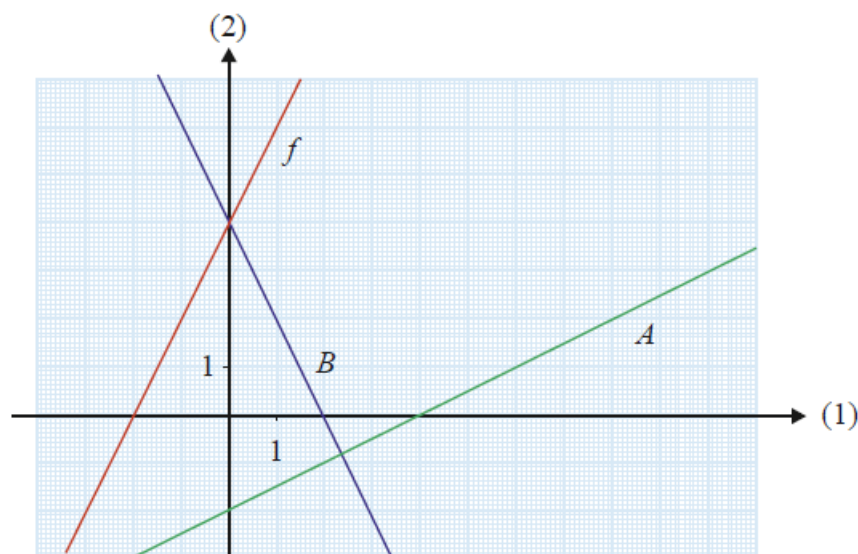
Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 + 5$$

$$g(x) = 4 \cdot \sqrt{x}.$$

- a) Bestem $f(2)$ og $g(f(2))$.

2.D1.26 (2020-08, 4)



En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x + 4.$$

På figuren ses grafen for f samt graferne A og B , hvoraf den ene er grafen for den omvendte funktion til f .

- a) Argumentér for, om A eller B er graf for den omvendte funktion til f .

Benyt eventuelt vedlagte bilag.

2.D1.27 (2020-08, 8)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 1.$$

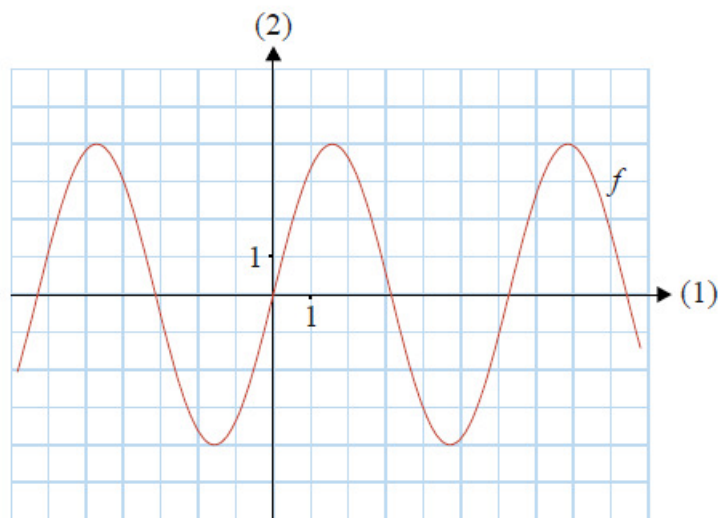
- a) Vis, at $f'(-1) = -1$.
- b) Bestem den anden værdi k , der opfylder, at $f'(k) = k$.

2.D1.28 (2020-12, 2)

En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(x) = A \cdot \sin(x),$$

hvor A er en konstant.



På figuren ses grafen for f , når $A = 4$.

- a) Tegn grafen for f , når $A = 2$.

Benyt eventuelt det vedlagte bilag.

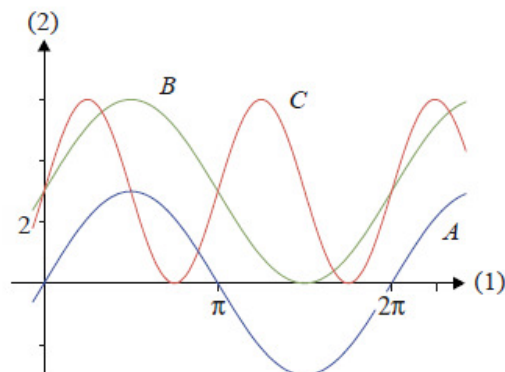
2.D1.29 (2021-05, 5)

På figuren ses graferne A , B og C for tre harmoniske svingninger.

En harmonisk svingning f er bestemt ved

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x) + 3.$$

- a) Gør rede for, hvilken af de tre grafer A , B og C , der er graf for f .
Benyt eventuelt vedlagte bilag.



2.D1.30 (2021-05, 5)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2 - x - 2) \cdot e^x.$$

- a) Bestem $f'(x)$.
- b) Løs ligningen $(x^2 - x - 2) \cdot e^x = 0$.

2.D1.31 (2021-05, 8)

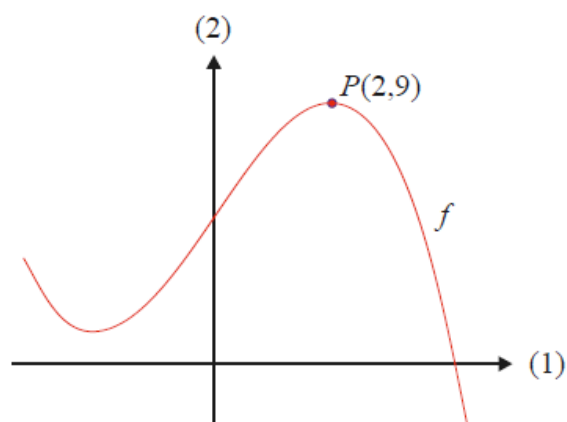
En funktion f er givet ved

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x + 5,$$

hvor a og b er konstanter.

Det oplyses, at f har et lokalt maksimum i $P(2,9)$.

- a) Bestem a og b .

**2.D1.32 (2021-06, 6)**

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(x) \cdot (x - 2), \quad x > 0.$$

- a) Løs ligningen $f(x) = 0$.
- b) Bestem $f'(1)$.

2.D1.33 (2021-08, 4)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

- a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.34 (2021-08, 3)

En harmonisk svingning f er givet ved

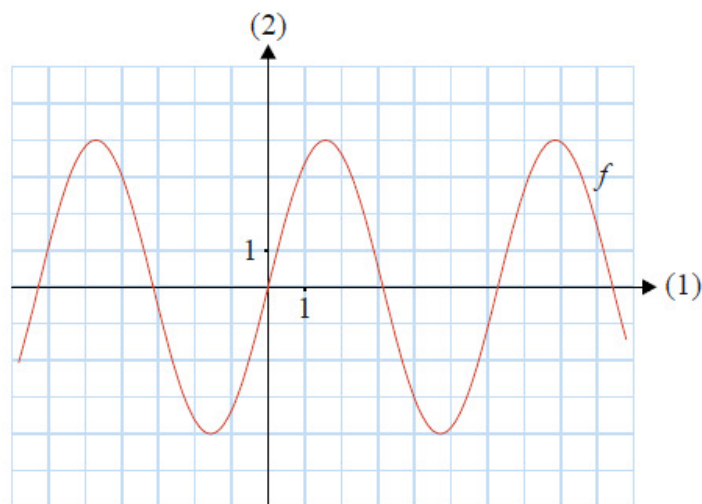
$$f(x) = A \cdot \sin(x),$$

hvor A er en konstant.

På figuren ses grafen for f .

- a) Bestem A .

Benyt eventuelt det vedlagte bilag.

**2.D1.35 (2021-08, 5)**

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{x^2-9}, \quad x > 0.$$

- a) Bestem $f(3)$.

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \sqrt{\ln(x) + 9}, \quad x > 0.$$

- b) Bestem $g(f(x))$.

2.D1.36 (2022-05, 8)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 4.$$

- a) Bestem $f'(x)$, og løs ligningen $f'(x) = 0$.

En funktion g er givet ved

$$g(x) = x^3 + k \cdot x + 4, \text{ hvor } k \text{ er et tal.}$$

- b) For hvilke værdier af tallet k har grafen for g ingen vandrette tangenter?

2.D1.37 (2022-06, 4)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(4 \cdot x^2 + 1) .$$

- a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.38 (2022-06, 7)

En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(t) = 4 \cdot \sin(t) + 10 .$$

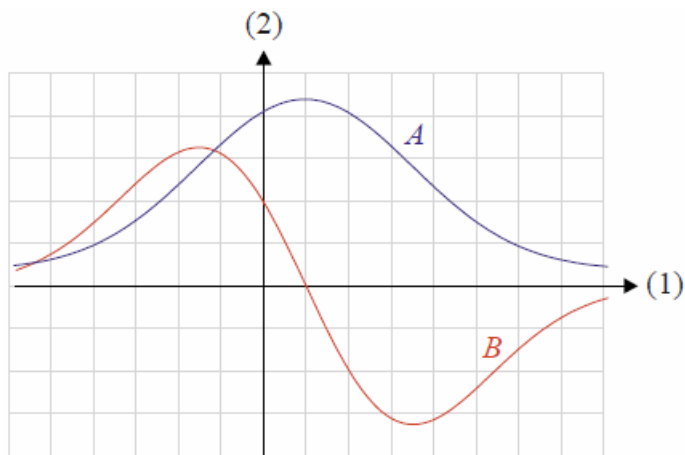
- a) Bestem størsteværdi og mindsteværdi for f .

2.D1.39 (2022-07, 6)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (2x + 3) \cdot \ln(x) .$$

- a) Bestem $f'(x)$.
b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

2.D1.40 (2022-07, 9)

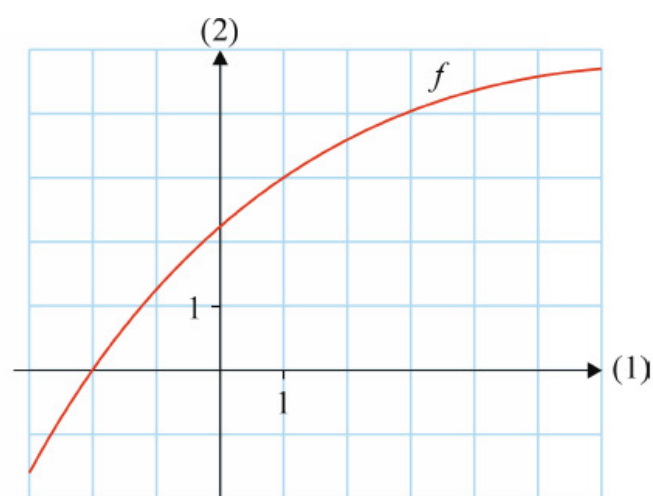
Figuren viser graferne for en funktion f og en stamfunktion F til f .

- a) Gør rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion.

2.D1.41 (2022-08, 6)

På figuren ses grafen for en funktion f , som er defineret i intervallet $[-3; 6]$.

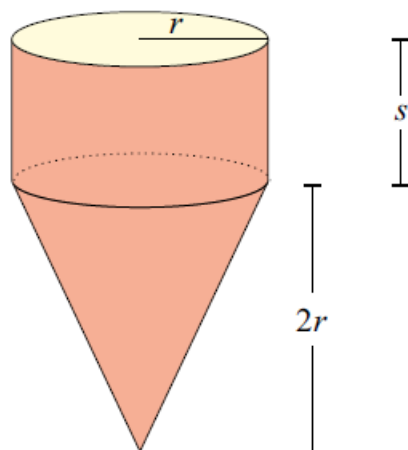
- a) Benyt bilaget til at bestemme $f^{-1}(3)$.



Delprøve 2:

2.D2.1 (2018-08, 18 – Vejledende 2)

En tragt er sammensat af en åben cylinder og en kegle (se figuren). Keglens grundflade og cylinderen har samme radius r , målt i dm. Keglens højde er det dobbelte af dens radius. Hele tragten kan rumme 40 dm^3 .



- a) Bestem cylinderens højde s som funktion af r .
- b) Gør rede for, at tragtens ydre overflade O som funktion af r kan beskrives ved

$$O(r) = \pi\left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right) \cdot r^2 + \frac{80}{r}.$$

- c) Bestem r , således at tragtens ydre overfladeareal er mindst mulig, når $0 < r < 4$.

2.D2.2 (2020-05, 9)

En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(x) = 7 \cdot \sin(2x - 5) + 3, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

- a) Bestem minimum for f .
- b) Bestem perioden for f .

2.D2.3 (2019-08, 16)

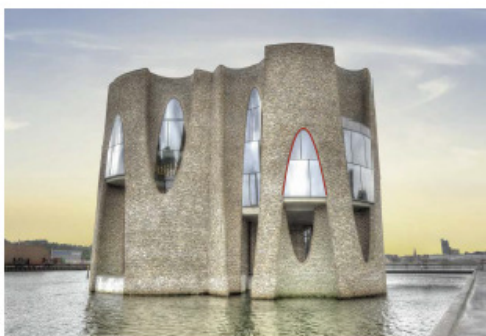
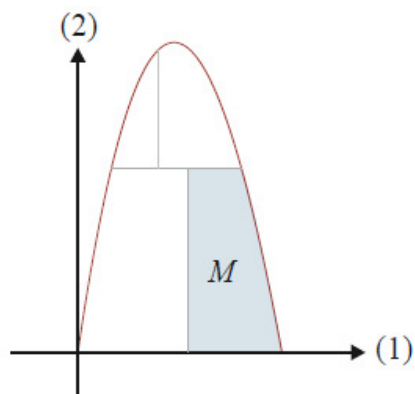


Foto: www.colourbox.dk



Ovenfor ses et billede af bygningen Fjordenhus samt en todimensional model af et af vinduerne indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. I modellen har vinduet form som en del af en parabel. Vinduet er 3,7 meter bredt for enden og har en højde på 5,5 meter.

a) Opstil en regneforskrift for den funktion, hvis graf beskriver parablen.

Vinduet er inddelt i fire felter. Det skraverede felt M på figuren er afgrænset af parablen, førsteaksen og linjerne med ligningerne $x = 2,3$ og $y = 3,1$.

b) Bestem arealet af feltet M .

2.D2.4 (2021-06, 12)



Dronning Alexandrines Bro (www.colourbox.dk)

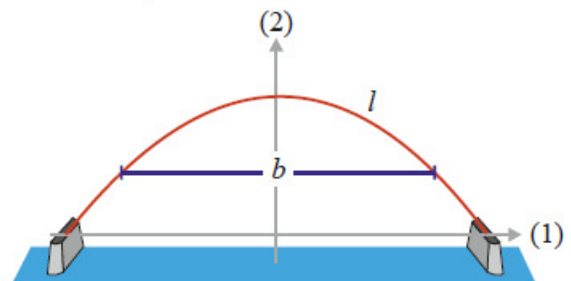
På billedet ses Dronning Alexandrines Bro, som består af en række buer fastgjort på bropiller og en kørebane.

I en model i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser kan den del af den midterste bue, der ligger over bropillerne, beskrives ved den positive del af grafen for

$$f(x) = -0,0104 \cdot x^2 + 41,7.$$

I modellen er kørebanen vandret og ligger 26 meter over bropillerne.

- a) Benyt modellen til at bestemme bredden b af buen målt langs kørebanen (se figur).
- b) Benyt modellen til at bestemme længden l af buen fra bropille til bropille (se figur).



Størelsesforholdene er ikke korrekte

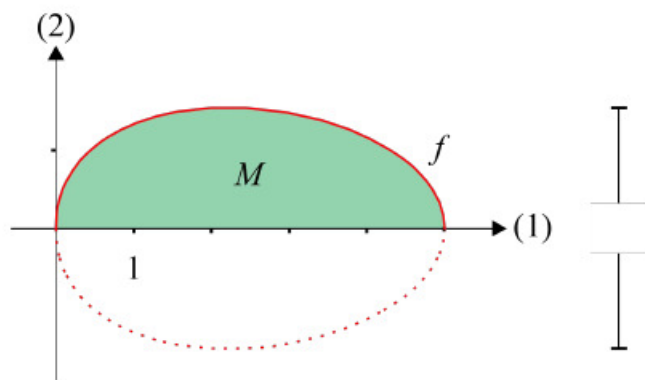
2.D2.5 (2022-08, 10)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 1,2 \cdot (\sqrt{5} \cdot x - x^{1,5})^{0,5}, \text{ hvor } 0 \leq x \leq 5.$$

- a) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M .



I en model kan formen af et æg beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° omkring førsteaksen i et koordinatsystem med enheden cm på begge akser.

- b) Benyt modellen til at bestemme rumfanget af ægget.
- c) Benyt modellen til at bestemme bredden b af ægget.

3. Integralregning

Delprøve 1:

3.D1.1 (2018-06, 2 – Vejledende 1)

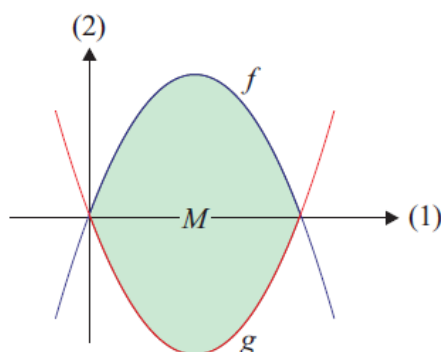
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1 \text{ .}$$

a) Bestem $\int_1^2 f(x) dx$.

3.D1.2 (2018-06, 10 – Vejledende 1)

Opgave 10 På figuren ses en skitse af graferne for to funktioner f og g .



Graferne for f og g afgrænser en punktmængde M , der har et areal.

Tabellen viser nogle funktionsværdier for funktionerne f , g , F og G , hvor F og G betegner henholdsvis en stamfunktion til f og en stamfunktion til g .

x	0	1	2
$f(x)$	0	49	0
$g(x)$	0	-47	0
$F(x)$	0	36	66
$G(x)$	0	-34	-62

(10 point) a) Bestem arealet af M .

3.D1.3 (2018-08, 1 – Vejledende 1)

- a) Bestem integralet

$$\int_1^2 (8x^3 + 6x^2) dx.$$

3.D1.4 (2019-05, 2)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 - 2x + 1.$$

- a) Bestem $\int f(x) dx$.

I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med førsteaksen samt linjerne $x = 1$ og $x = 3$ en punktmængde M , der har et areal.

- b) Bestem arealet af M .

3.D1.5 (2019-08, 4)

- a) Bestem integralet

$$\int_0^2 (3x^2 + 4x + 3) dx.$$

3.D1.6 (2019-12, 5)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(x) + 6x^2, \quad x > 0.$$

- a) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1, 5)$.

3.D1.7 (2020-05, 6)

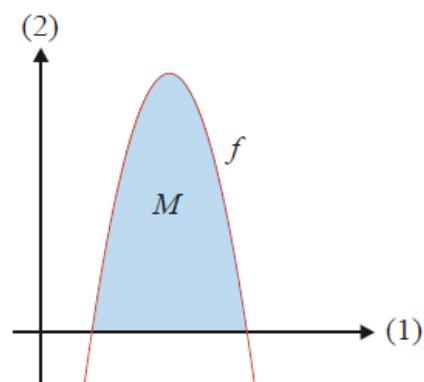
En funktion f er givet ved

$$f(x) = -3x^2 + 12x - 9.$$

- a) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M , der har et areal.

- b) Bestem arealet af M .



3.D1.8 (2020-06, 1)

- a) Bestem integralet

$$\int (e^x + 5) dx.$$

3.D1.9 (2020-08, 1)

- a) Bestem det ubestemte integral

$$\int (3x^2 + 2x + 6) dx.$$

3.D1.10 (2021-05, 2)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

- a) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem $P(1, 7)$.

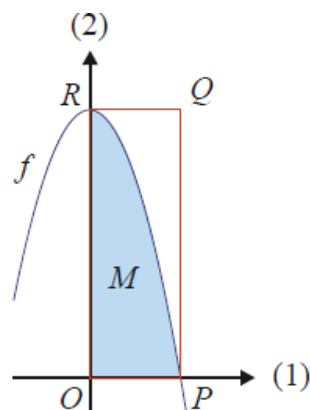
3.D1.11 (2020-12, 9)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = k^2 - x^2, \quad k > 0.$$

Grafen for f afgrænser i første kvadrant sammen med de to koordinataksler en punktmængde M , der har et areal.

På figuren ses grafen for f , punktmængden M samt et rektangel $OPQR$ i første kvadrant, hvor O er origo, P er grafens skæring med førsteaksen, og R er grafens skæring med andenaksen.



- Bestem koordinatsættet til punktet P udtrykt ved k .
- Vis, at arealet af M udgør $\frac{2}{3}$ af arealet af rektanglet $OPQR$.

3.D1.12 (2021-06, 2)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x.$$

- a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1,10)$.

3.D1.13 (2021-06, 8)

- a) Bestem integralet

$$\int 2x \cdot e^{x^2-4} dx.$$

3.D1.14 (2021-08, 10)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x}, \quad x > 0.$$

- a) Bestem $\int f(x) dx$.

3.D1.15 (2021-12, 1)

- a) Bestem

$$\int (e^x + 6 \cdot x^2 + 4) dx.$$

3.D1.16 (2022-05, 1)

- a) Bestem integralet

$$\int (x^2 + 8x) dx.$$

3.D1.17 (2022-06, 6)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 4x^3 - 2x.$$

- a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går igennem punktet $P(2, 18)$.

3.D1.18 (2022-07, 2)

- a) Bestem integralet

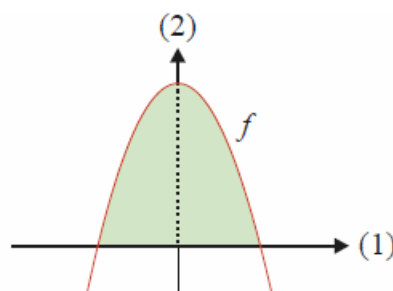
$$\int (4e^x + 3x^2) dx.$$

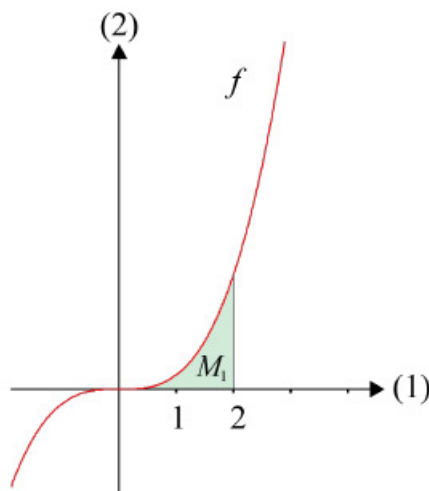
3.D1.19 (2022-07, 8)

Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

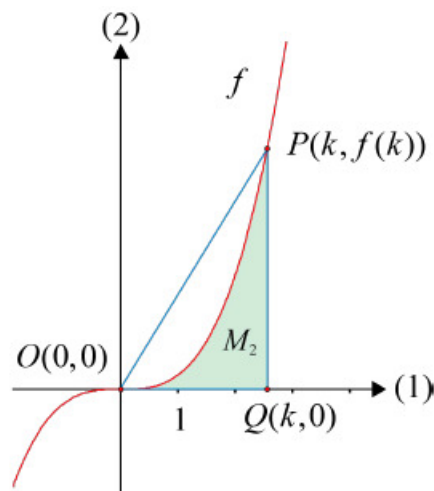
$$f(x) = 4 - x^2.$$

- a) Bestem arealet af det farvede område på figuren.





Figur 1



Figur 2

En funktion f er givet ved $f(x) = x^3$. Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i intervallet $0 \leq x \leq 2$ et område M_1 , se figur 1.

- a) Bestem arealet af området M_1 .

Figur 2 viser grafen for f og en trekant OPQ . Koordinaterne for punkterne O , P og Q fremgår af figuren.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i intervallet $0 \leq x \leq k$ et område M_2 .

- b) Gør rede for, at arealet af området M_2 er halvt så stort som arealet af trekant OPQ .

Delprøve 2:

3.D2.1 (2018-06 – Vejledende 1)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 6, & -15 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{-x^2 + 52x + 36}, & 0 < x \leq 44. \end{cases}$$

I en model danner grafen for f en kurve, der har samme form som hver af de 47 lameller, der udgør lampen på billedet nedenfor. Alle mål er i cm.



- a) Tegn grafen for f .
- b) Bestem længden af den krumme del af én af de 47 lameller.

3.D2.2 (2021-08, 12)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^x - 2x + 5.$$

- a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(0,10)$.

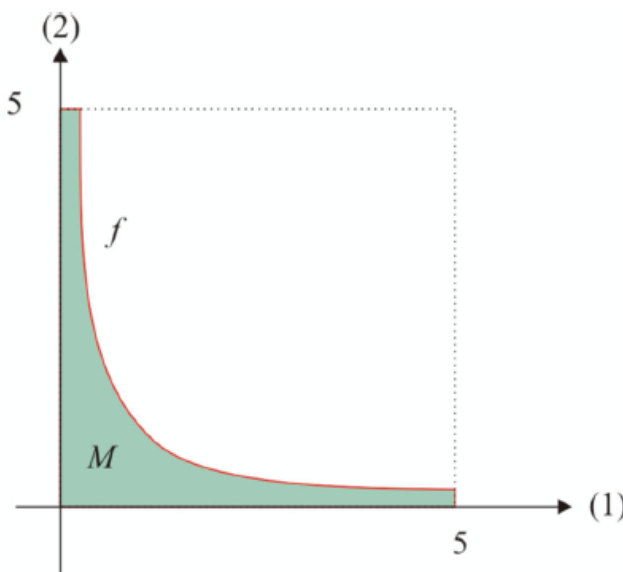
3.D2.3 (2018-06, 19 – Vejledende 1)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Et kvadrat med siden 5 er indlagt i et koordinatsystem (se figur). Kvadratet deles i to punktmængder af grafen for f . Den skraverede punktmængde kaldes M (se figur).

- a) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.



3.D2.4 (2018-08, 13 – Vejledende 2)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 25 \cdot x^4 - \frac{2}{x}, \quad x > 0.$$

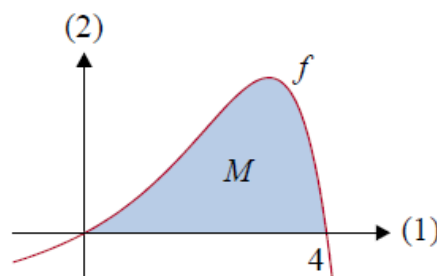
- a) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1, 8)$.

3.D2.5 (2019-05, 10)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (e^x - 1) \cdot (4 - x).$$

I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med førsteaksen en punktmængde M , der har et areal.



- a) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen.
- b) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(0, 0)$.

3.D2.6 (2019-12, 10)



Foto: www.colourbox.dk

En funktion f er givet ved

$$f(x) = -0,0034x^3 + 0,077x^2 - 0,3x + 2,46.$$

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser og linjen med ligningen $x = 14,5$ en punktmængde M , der har et areal.

- a) Tegn grafen for f , og bestem arealet af M .

I en model af et drikkeglas har det indre af glasset form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen. Enheden på akserne er cm.

- b) Bestem rumfanget af væsken i glasset, når glasset er fyldt til randen.

3.D2.7 (2020-05, 11)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{2x-4}.$$

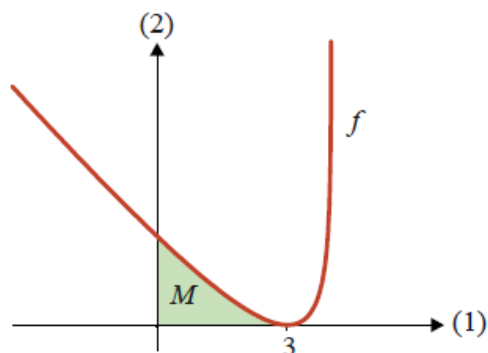
- a) Bestem $f'(x)$.
- b) Bestem kurvelængden af grafen for f i intervallet $1 \leq x \leq 3$.

3.D2.8 (2020-06, 7)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3 - x - \ln(4 - x), \quad x < 4.$$

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i første kvadrant en punktmængde M , der har et areal.



- a) Bestem arealet af M .
- b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

3.D2.9 (2020-12, 10)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(x) - 3x^2 + 10, \quad x > 0.$$

- a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1, 20)$.

3.D2.10 (2022-05, 11)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x-2} - x + 2.$$

- a) Bestem funktionens nulpunkter.

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for f et område M i første kvadrant.

- b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

3.D2.11 (2022-05, 11)

Den hastighed, som vandstanden i verdenshavene stiger med, kan beskrives ved modellen

$$f(t) = 0,084 \cdot t + 2,$$

hvor $f(t)$ er hastigheden (målt i mm/år), og t er antal år efter 1991.

- a) Hvilken hastighed stiger vandstanden med i 2022 ifølge modellen?
- b) Bestem $\int_0^{31} f(t) dt$, og forklar betydningen af dette tal.

3.D2.12 (2021-05, 11)

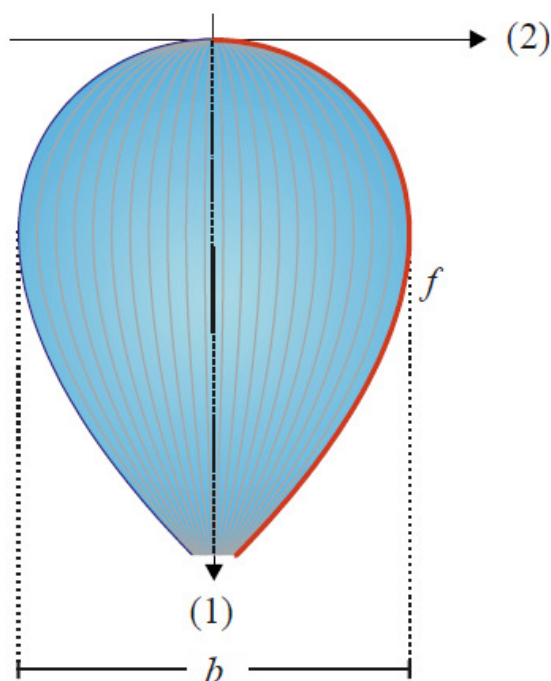
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 0,126 \cdot (45 - x^{1,2}) \cdot x^{0,5}, \quad 0 \leq x \leq 23.$$

Grafen for f , koordinatsystemets førsteakse og linjen med ligningen $x = 23$ afgrænser et område M , der har et areal.

I en model kan formen af en varmluftsballon beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° omkring førsteaksen i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.

- Benyt modellen til at bestemme volumen af ballonen.
- Benyt modellen til at bestemme bredden b af ballonen (se figuren).

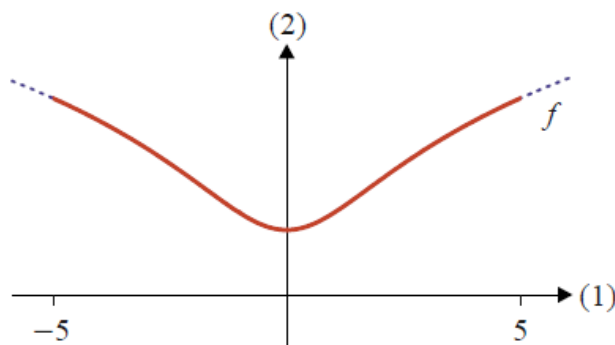


3.D2.13 (2020-08, 9)

På figuren ses grafen for en funktion f , der er givet ved

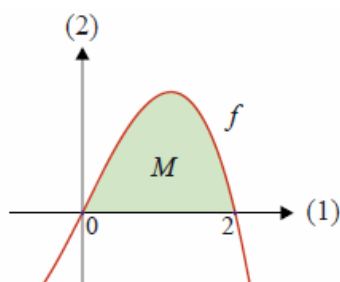
$$f(x) = \ln(x^2 + 3).$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjerne $x = -5$ og $x = 5$ en punktmængde M , der har et areal.

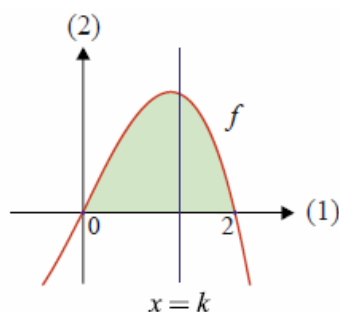


- Bestem arealet af M .
- Bestem kurvelængden for grafen for f i intervallet $-5 \leq x \leq 5$.

3.D2.14 (2021-12, 11)



Figur 1



Figur 2

Figur 1 viser grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^3.$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i første kvadrant et område M .

- a) Bestem arealet af M .

På figur 2 er området delt i to dele af en lodret linje med ligning $x = k$, hvor $0 < k < 2$.

- b) Bestem tallet k , så de to dele af området får samme areal.

3.D2.15 (2022-06, 15)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4x^2 - x^3.$$

- a) Bestem nulpunkterne for f .

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for f et område M_1 i første kvadrant.

- b) Bestem arealet af M_1 .

En anden funktion g er givet ved

$$g(x) = k \cdot x^2 - x^3, \text{ hvor } k \text{ er et positivt tal.}$$

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for g et område M_2 i første kvadrant.

- c) Bestem tallet k , så M_2 får arealet 44.

3.D2.16 (2022-07, 10)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{0,25 \cdot x} + e^{-0,50 \cdot x}.$$

- a) Bestem minimum for f ved brug af $f'(x)$.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse og linjerne $x = -2$ og $x = 3$ et område M .

Når M drejes 360° omkring førsteaksen, fremkommer der et omdrejningslegeme.

- b) Bestem rumfanget af omdrejningslegemet.
- c) Bestem kurvelængden af grafen for f i intervallet $-2 \leq x \leq 3$.

4. Differentialligninger

Delprøve 1:

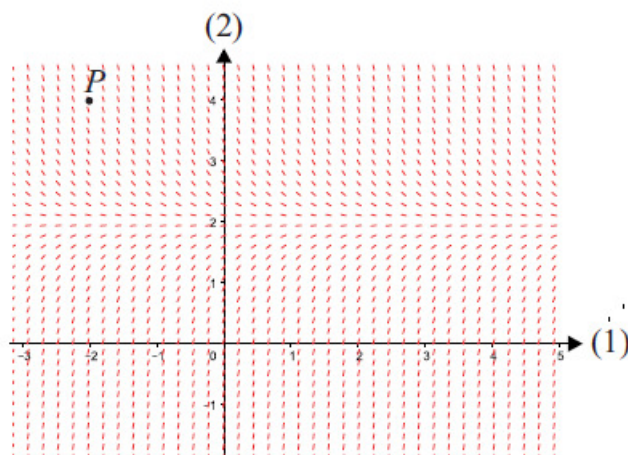
4.D1.1 (2018-06, 4 – Vejledende 1)

I en model kan udviklingen af træmassen i en bestemt skov beskrives ved en funktion M , hvor $M(t)$ betegner træmassen (målt i kg) til tidspunktet t (målt i år). I modellen er væksthastigheden i træmassen proportional med træmassen. Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er 1,04.

- a) Opskriv en differentialligning, som M må opfylde.

4.D1.2 (2018-06, 5 – Vejledende 1)

På figuren ses hældningsfeltet hørende til en differentialligning.



- a) Skitsér den løsningskurve, der går gennem punktet $P(-2, 4)$.

Vedlagte bilag kan indgå i besvarelsen.

4.D1.3 (2018-06, 7 – Vejledende 1)

En funktion f er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 3x + 1.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(2,6)$.

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P .

4.D1.4 (2018-08, 4 – Vejledende 2)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2 \cdot e^x - x^2 - 2x.$$

- a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

$$y' = x^2 + y - 2.$$

4.D1.5 (2018-08, 8 – Vejledende 2)



Foto: www.colourbox.com

I en model kan antallet af skarvkolonier i Danmark i perioden 1982-2008 beskrives ved en funktion S af tiden t (målt i år efter 1982). Den hastighed, hvormed antallet af skarvkolonier vokser til tidspunktet t , er proportional med produktet af antallet af skarvkolonier til tidspunktet t og forskellen mellem 67 og antallet af skarvkolonier til tidspunktet t .

Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er $k = 0,0029$.

- a) Opskriv en differentialligning, som S må opfylde.

4.D1.6 (2019-05, 4)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (y - 1),$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2,5)$.

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

4.D1.7 (2019-05, 9)



I en model kan temperaturudviklingen i et vandbad under afkøling beskrives ved en funktion f , hvor $f(t)$ betegner vandbadets temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$) til tidspunktet t (målt i minutter).

I modellen er væksthastigheden for vandbadets temperatur proportional med forskellen mellem omgivelsernes temperatur og vandbadets temperatur.

Det oplyses, at omgivelsernes temperatur er 22°C , og at proportionalitetskonstanten er $0,01\text{s}^{-1}$.

- a) Bestem væksthastigheden for vandbadets temperatur, når vandbadets temperatur er 50°C .
- b) Opskriv en differentialligning, som f må være en løsning til.

4.D1.8 (2019-08, 7)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 0,5 \cdot y.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0,6)$.

- a) Bestem linjeelementet i P , og gør rede for hvad dette fortæller om grafens forløb.
- b) Bestem en forskrift for f .

4.D1.9 (2019-12, 2)

En funktion f er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot y + 2}{x}.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(5, 2)$.

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P .

4.D1.10 (2020-05, 8)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 2y \cdot (8 - y).$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0, 2)$.

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .
- b) Bestem en forskrift for f .

4.D1.11 (2020-06, 5)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 6 - \frac{1}{2}y.$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem punktet $(0, 8)$.

- a) Bestem $f'(0)$.
- b) Bestem en forskrift for f .

4.D1.12 (2020-08, 5)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 0,1 \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(0,6)$.

■ a) Bestem linjeelementet i P .

b) Bestem en forskrift for f .

4.D1.13 (2020-12, 4)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{2x} + x^2.$$

■ a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 2 \cdot (y + x - x^2).$$

4.D1.14 (2020-12, 7)

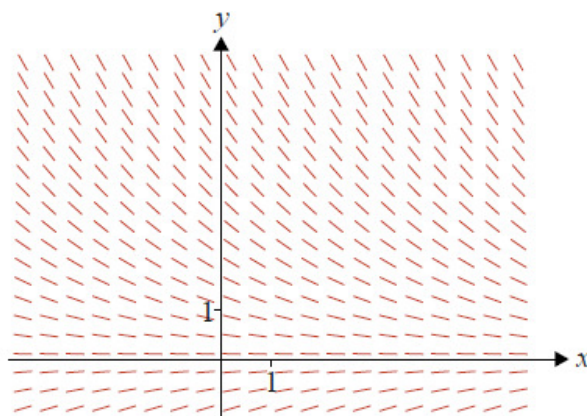
Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning på formen $y' = k \cdot y$.

Funktionerne f , g og h er givet ved

$$f(x) = e^{-0,3x}$$

$$g(x) = 4e^{-0,3x}$$

$$h(x) = 4e^{0,3x}.$$



a) Argumentér for, hvilken af funktionerne f , g og h , der ikke kan være en løsning til differentialligningen.

Benyt eventuelt det vedlagte bilag

4.D1.15 (2021-05, 4)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = x \cdot y + 5.$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem punktet $P(1, 10)$.

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

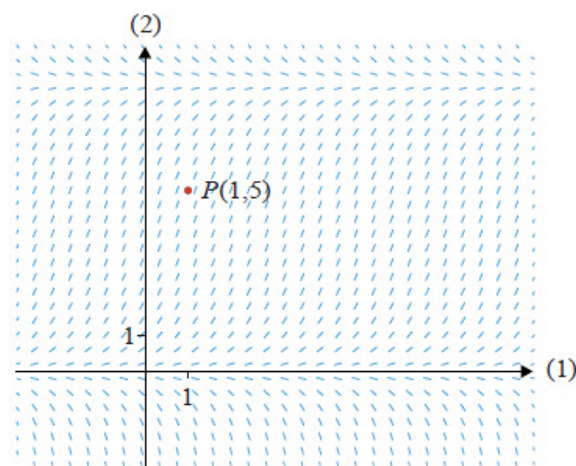
4.D1.16 (2021-06, 7)

På figuren ses et hældningsfelt hørende til differentialligningen

$$y' = a \cdot y \cdot (8 - y).$$

Funktionen f er løsning til differentialligningen. Grafen for f går gennem punktet $P(1, 5)$.

- a) Indtegn en skitse af grafen for f på det vedlagte bilag.
- b) Bestem a , når det oplyses, at $f'(1) = 3$.

**4.D1.17 (2021-08, 2)**

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = x \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2, 7)$.

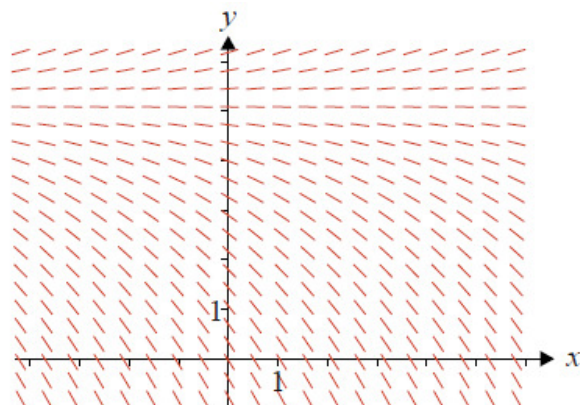
- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

4.D1.18 (2021-08, 8)

Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning.

Det oplyses, at funktionen f er en løsning til differentialligningen, samt at $f(0) = 4$.

- a) Benyt vedlagte bilag til at tegne grafen for f .



4.D1.19 (2021-12, 8)

En differentialligning er givet ved

$$y' = 20 - 4 \cdot y.$$

- a) Bestem linjeelementet for differentialligningen i punktet $P_0(x_0, y_0) = (0, 3)$.
- b) Bestem en forskrift for den løsning f til differentialligningen, hvis graf går gennem punktet P_0 .

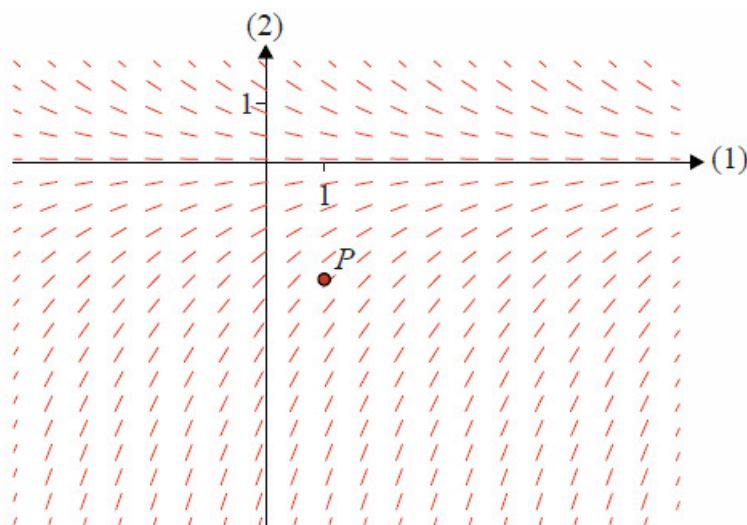
4.D1.20 (2022-05, 6)

På figuren ses hældningsfeltet hørende til differentialligningen

$$y' = -\frac{1}{2}y.$$

Grafen for en løsning f til differentialligningen går gennem punktet $P(1, -2)$.

- a) Skitsér grafen for f på bilaget.
- b) Bestem en forskrift for f .



4.D1.21 (2022-06, 9)

I en model kan antallet af en bestemt type bakterier i en madrest beskrives ved en funktion B af tiden t . Den hastighed, hvormed antallet af bakterier vokser til tidspunktet t (målt i minutter), er proportional med antallet $B(t)$ af bakterier (målt i mio.). Proportionalitetsfaktoren er $k = 0,035$.

- a) Opskriv en differentialligning, som B må opfylde.



Billedkilde: Colourbox

4.D1.22 (2022-07, 5)

Der er givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

- a) Bestem linjeelementet i punktet $P(0, 1)$.
- b) Gør rede for, at funktionen f med forskriften

$$f(x) = 3 \cdot e^x - 2 \cdot (x + 1)$$

er en løsning til differentialligningen.

4.D1.23 (2022-08, 4)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 \cdot \ln(x).$$

- a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 3 \cdot \frac{y}{x} + x^2.$$

4.D1.24 (2022-08, 7)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 0,01 \cdot y \cdot (20 - y).$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0, 10)$.

- a) Bestem linjeelementet i P .
- b) Bestem en forskrift for f .

Delprøve 2:

4.D2.1 (2018-06, 15 – Vejledende 1)



Grafik: www.colourbox.dk

I et akvarium kan temperaturen under opvarmning som funktion af tiden beskrives ved differentiaalligningsmodellen

$$\frac{dT}{dx} = 1,54 - 0,259 \cdot (T - 22),$$

hvor $T(x)$ betegner temperaturen (målt i $^{\circ}\text{C}$) i akvariet til tidspunktet x (målt i timer efter påbegyndt opvarmning). Det oplyses, at temperaturen i akvariet er 22°C , når opvarmningen starter.

- a) Bestem temperaturens væksthastighed, når temperaturen i akvariet er 26°C .

Akvariets ejer har købt en sart akvariefisk, der ikke tåler temperaturer under 27°C .

- b) Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid der går, fra opvarmningen er påbegyndt, til det er sikkert at slippe fisken ned i akvariet.

4.D2.2 (2018-08, 17 – Vejledende 2)

En bestemt beholder, der er fyldt med væske, har en aftapningshane i bunden. I en model kan væskehøjden i beholderen beskrives ved

$$\frac{dh}{dt} = -15 \cdot h^{-\frac{3}{2}},$$

hvor $h(t)$ betegner væskehøjden (målt i cm) til tidspunktet t (målt i sekunder efter åbning af hanen). Til tidspunktet $t = 0$ er væskehøjden 30 cm.

- a) Bestem en forskrift for h .
- b) Tegn et hældningsfelt sammen med grafen for den fundne løsning.
- c) Bestem det tidspunkt, hvor beholderen er tom.

4.D2.3 (2019-05, 15)



Nedenstående tabel viser sammenhørende værdier af befolkningstallet og befolknings-tilvæksten i Indien i en periode fra 1960 og frem.

Befolkningstal (mio.)	449	498	554	621	697	782	870	960	1053	1144	1231	1309
Befolkningstilvækst (mio. pr. år)	8	9,8	11,2	13,4	15,2	17	17,6	18,0	18,6	18,2	17,4	15,6

(Tabellen findes også i bilaget "Indiens_befolkningstal.xlsx")

I en model kan sammenhængen beskrives ved en differentialligning af typen

$$y' = a \cdot y^2 + b \cdot y + c,$$

hvor y og y' betegner henholdsvis befolkningstallet (målt i mio.) og befolknings-tilvæksten (målt i mio. pr. år) til tidspunktet t (målt i år efter 1960).

- a) Benyt tabellens data til at bestemme a , b og c .

Det oplyses, at befolkningstallet i Indien i 1960 var 449 mio.

- b) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen sammen med løsningskurven for udviklingen i Indiens befolkningstal efter 1960.
- c) Benyt modellen til at bestemme det maksimale befolkningstal i Indien efter 1960.

4.D2.4 (2020-12, 12)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 8 - 2y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(0,2)$.

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

4.D2.5 (2019-08, 14)



Foto: www.colourbox.dk

I et område lever en bestand af rensdyr. I en model kan udviklingen i antallet af rensdyr i bestanden beskrives ved en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 0,23 \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{1073}\right) - s \cdot y,$$

hvor y betegner antallet af rensdyr i bestanden (målt i tusinde) til tidspunktet t (målt i år), og s betegner andelen af rensdyr, der bliver skudt om året.

- a) Tegn et hældningsfelt når $s = 0,01$ i vinduet $[0;10] \times [0;1200]$.

Det oplyses, at bestanden af rensdyr er 900 tusinde til tidspunktet $t = 0$.

- b) Bestem en løsning til differentialligningen når $s = 0,01$.

Man ønsker, at bestanden af rensdyr i området holdes konstant på 900 tusinde.

- c) Benyt modellen til at bestemme antallet af rensdyr, der skal skydes om året.

4.D2.6 (2021-06, 9)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 5y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(1,3)$.

- a) Bestem en forskrift for f .

4.D2.7 (2019-12, 12)



Foto: www.colourbox.dk

I en model kan udviklingen af antallet af bjørne i et bestemt habitat beskrives ved differentialligningen

$$N' = -0,00001 \cdot N^3 + 0,0051 \cdot N^2 - 0,05 \cdot N,$$

hvor $N(t)$ betegner antallet af bjørne til tidspunktet t (målt i år).

- a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen sammen med løsningskurven gennem punktet $(0,100)$.
- b) Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden for antallet af bjørne, når der er 100 bjørne i habitatet.
- c) Bestem henholdsvis det mindste og det største antal bjørne, der kan være i habitatet, så antallet af bjørne ifølge modellen er voksende.

4.D2.8 (2020-05, 15)

I et tomt tragtformet kar påbegyndes en løbende tilføring af en flygtig væske. Væsken fordamper løbende fra overfladen. I en model kan udviklingen i væskemængden i karret beskrives ved en funktion V , der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = 0,1 - 0,016 \cdot V^{\frac{2}{3}},$$

hvor $V(t)$ betegner væskemængden i karret (målt i L) til tidspunktet t (målt i timer efter påfyldningen begyndte).

- a) Bestem den hastighed, hvormed væskemængden i karret ændres, når væskemængden i karret er 10 L.
- b) Bestem den øvre grænse for væskemængden i karret.

4.D2.9 (2020-06, 9)



Foto: Freepik.com

I en model kan udviklingen i verdens samlede kapacitet til produktion af vedvarende energi i perioden 2001 – 2018 beskrives ved en funktion K , der er løsning til differentialligningen

$$K' = 0,00106 \cdot K \cdot (222,9 - K),$$

hvor $K(t)$ betegner kapaciteten (målt i GW) til tidspunktet t (målt i antal år efter 2001).

Det oplyses, at verdens samlede kapacitet af vedvarende energi i 2001 var 18 GW.

- a) Bestem en forskrift for K .
- b) Giv en fortolkning af tallet 222,9 i modellen.
- c) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt t , hvor kapaciteten vokser hurtigst.

Kilde: The International Energy Agency (IEA).

4.D2.10 (2021-05, 11)

En differentialligning er givet ved

$$y' = y + x^2.$$

- a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

Det oplyses, at funktionen f er løsning til differentialligningen, og at grafen for f går gennem punktet $P(0, -1)$.

- b) Bestem en forskrift for f .

4.D2.11 (2020-08, 10)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0,045 \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(0,100)$.

- a) Bestem en forskrift for f .

I en model kan udviklingen i temperaturen af en portion suppe beskrives ved ovenstående differentialligning, hvor y betegner suppens temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$) til tidspunktet t (målt i minutter).

- b) Bestem væksthastigheden for suppens temperatur, når suppens temperatur er 50°C .



4.D2.12 (2021-08, 14)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = y + x - x^2.$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem $P(1,3)$.

- a) Bestem en forskrift for f .

4.D2.13 (2021-08, 14)

Befolkningsudviklingen i Taiwan i perioden 1996-2019 kan i en model beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dP}{dt} = 0,003641 \cdot P \cdot (23,95 - P),$$

hvor $P(t)$ er antallet af indbyggere i Taiwan (målt i millioner), og t er antal år efter 1996. I 1996 var der 21,53 millioner indbyggere i Taiwan.

- a) Bestem en forskrift for P .
- b) Bestem $P'(23)$, og forklar betydningen af dette tal.

4.D2.14 (2021-12, 10)



Billedkilde: Miljøstyrelsen

En fiskeribiolog undersøger udviklingen i antallet af fisk i et stort bassin. Udviklingen kan beskrives ved differentialligningen

$$y' = 0,5 \cdot y \cdot (1 - 0,0002 \cdot y) - 0,06 \cdot y,$$

hvor y er antallet af fisk i bassinet t år efter undersøgelsens start. Ved undersøgelsens start er der 3500 fisk i bassinet.

- a) Med hvilken hastighed vokser antallet af fisk i bassinet ved undersøgelsens start?
- b) Bestem antallet af fisk i bassinet efter 5 år.

4.D2.15 (2022-08, 13)

Når en bestemt type brusetablet bliver opløst i vand, kan rumfanget $V(t)$ af tabletten (målt i cm^3) i en model beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = -1,1 \cdot V^{\frac{2}{3}},$$

hvor t er tiden (målt i minutter), efter at tabletten er lagt ned i vandet. Det oplyses, at $V(0) = 0,44$.



Billedkilde: Colourbox

- a) Bestem en forskrift for $V(t)$

En anden brusetablet er lidt større. Udviklingen i rumfanget af den store tablet, når den er blevet lagt ned i vandet, kan beskrives ved samme model som ovenfor. Den store tablet er opløst efter 2,3 minutter.

- b) Bestem rumfanget af den store tablet, inden den blev lagt ned i vandet.

4.D2.16 (2022-06, 10)

Der er givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{y}{x}.$$

- a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

En funktion f er løsning til differentialligningen.

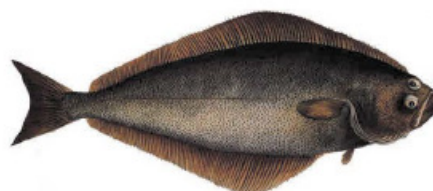
Grafen for f går gennem punktet $P(2,3)$.

- b) Bestem $f'(2)$.

4.D2.17 (2022-07, 12)

Den samlede biomasse af en population af helleflyndere i et område af Stillehavet kan beskrives ved modellen

$$\frac{dy}{dx} = 0,71 \cdot \left(1 - \frac{y}{80,5}\right) \cdot y,$$



Billedkilde: Wikipedia

hvor $y = f(x)$ er populationens samlede biomasse (målt i mio. kg),
og x er tiden (målt i år).

Til tidspunktet $x = 0$ er den samlede biomasse 20,1 mio. kg.

- a) Med hvilken hastighed vokser den samlede biomasse til tidspunktet $x = 0$?
- b) Bestem et udtryk for den samlede biomasse $f(x)$.
- c) Til hvilket tidspunkt når den samlede biomasse op på 75 mio. kg?

4.D2.18 (2022-06, 13)

I en model kan vægten af en hund af racen Basset Hound beskrives ved differentialligningen

$$y' = 0,0069 \cdot y \cdot (26,6 - y),$$

hvor $y = f(x)$ er hundens vægt i kg x uger efter fødslen.

Hundens vægt 6 uger efter fødslen er 1,3 kg.

- a) Bestem en forskrift for $f(x)$.
- b) Hvor gammel er hunden ifølge modellen, når dens vægt vokser hurtigst?



Billedkilde: hundeo.com

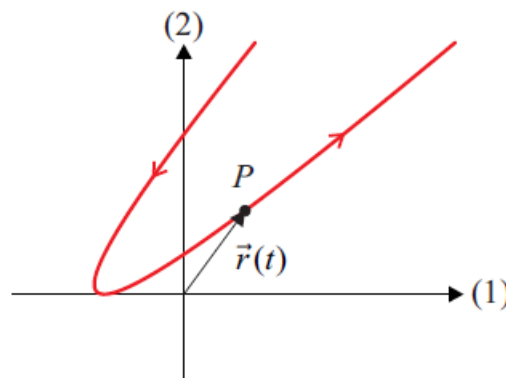
5. Vektorfunktioner

Delprøve 1:

5.D1.1 (2018-06, 1 – Vejledende 1)

I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at til tidspunktet t er stedvektoren $\vec{r}(t)$ til P er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t - 2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad -4 \leq t \leq 4.$$



- a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 2$.

5.D1.2 (2018-08, 7 – Vejledende 2)

I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at stedvektoren til P til tidspunktet t er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ \frac{1}{2}t^2 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 0$.

Linjen l er bestemt ved ligningen

$$l: x - y = 2.$$

- b) Bestem de to tidspunkter, hvor hastighedsvektoren er parallel med l .

5.D1.3 (2019-05, 1)

I et koordinatsystem er en vektorfunktion $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem $\vec{r}(1)$.
- b) Undersøg, om punktet $Q(7,8)$ ligger på banekurven for $\vec{r}$.

5.D1.4 (2019-08, 8)

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved forskriften

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2-4 \\ t-3 \end{pmatrix}.$$

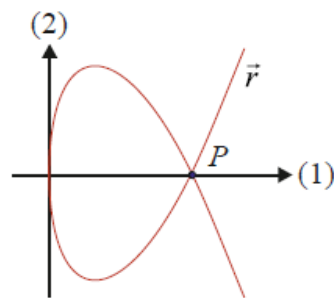
- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem koordinatsystemets akser og parameterkurven for $\vec{r}$.

5.D1.5 (2019-12, 3)

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3-4t \end{pmatrix}.$$

På parameterkurven for $\vec{r}$ er punktet P et dobbeltpunkt hørende til t -værdierne $t=2$ og $t=t_0$.



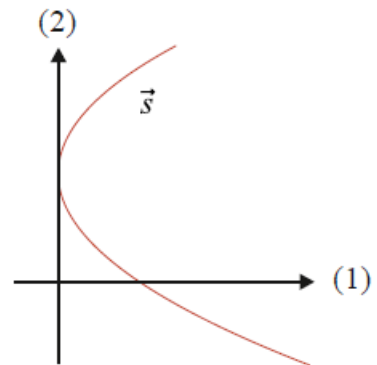
- a) Bestem koordinatsættet til punktet P .
- b) Bestem t_0 .

5.D1.6 (2020-05, 1)

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot t^2 \\ 2 \cdot t + 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestem $\vec{s}(1)$.
- b) Undersøg, om parameterkurven for $\vec{s}$ går igennem punktet $P(2,10)$.

**5.D1.7 (2020-06, 3)**

En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \cdot \cos(t) \\ 6 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Parameterkurven for $\vec{s}$ er en cirkel.

- a) Bestem centrum og radius for cirklen.
- b) Bestem $\vec{s}(0)$.
- c) Bestem $\vec{s}'(t)$.

5.D1.8 (2020-12, 1)

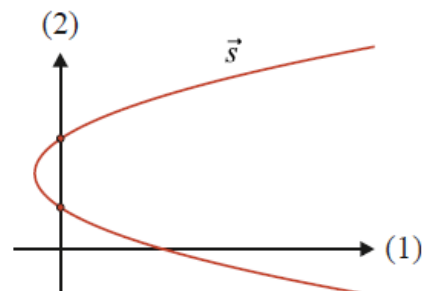
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 7t + 10 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestem $\vec{s}'(t)$.

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ skærer andenaksen i punkterne P og Q .

- b) Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne P og Q .



5.D1.9 (2020-12, 5)

En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 5 + 5 \cdot \cos(t) \\ 7 + 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Parameterkurven for $\vec{s}$ er en cirkel.

- a) Bestem centrum og radius for cirklen.

Linjen l er tangent til cirklen i punktet $P(8,11)$.

- b) Bestem en ligning for l .

5.D1.10 (2021-05, 1)

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ t^2 - 4t \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem $\vec{s}(1)$.

- b) Bestem $\vec{s}'(t)$.

5.D1.11 (2021-06, 5)

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2t - 3 \\ t + 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem parameterkurven for $\vec{r}$ og andenaksen.

5.D1.12 (2021-08, 6)

En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 5 + 7 \cdot \cos(t) \\ -1 + 7 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a) Bestem $\vec{s}(0)$.

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ er en cirkel.

- b) Bestem en ligning for cirklen.

5.D1.13 (2021-05, 9)

En parameterkurve er givet ved stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot (\sin(t))^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}(t)$.
 ■ b) Bestem hastighedsfunktionen $\vec{s}'(t)$.

5.D1.14 (2022-06, 3)

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 9 \\ t + 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem $\vec{s}(-1)$.
 b) Bestem en ligning for tangenten til bane kurven for $\vec{s}$ i punktet P_0 svarende til parameterværdien $t_0 = -1$.

5.D1.15 (2022-07, 4)

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{3}t^3 - 9t \end{pmatrix}.$$

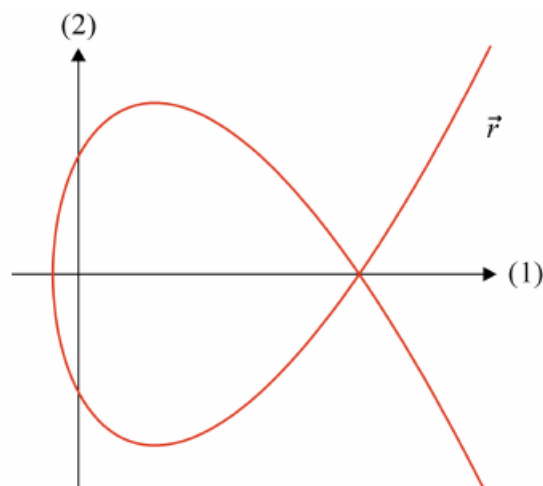
- a) Bestem hastighedsfunktionen $\vec{v}(t)$.
- b) For hvilke parameterværdier t har banekurven en vandret tangent?

5.D1.16 (2022-08, 2)

På figuren ses banekurven for vektorfunktionen $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{3}t^3 - 4t \end{pmatrix}, \quad -4 \leq t \leq 4.$$

- a) Bestem hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$.
- b) Bestem koordinatsættet til det punkt, hvor banekurven har lodret tangent.



Delprøve 2:

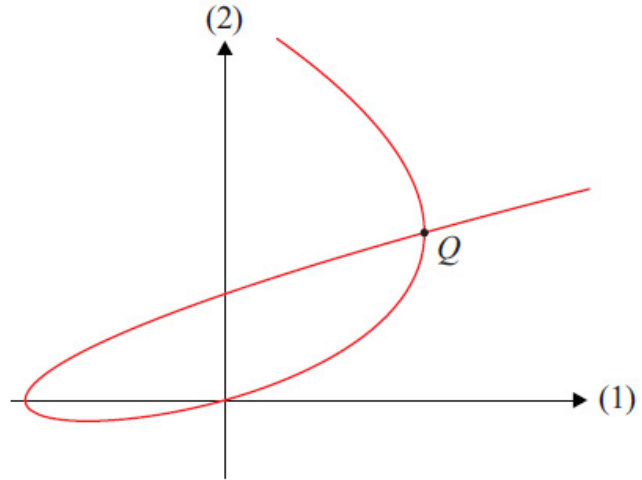
5.D2.1 (2018-06, 16 – Vejledende 1)

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

På banekurven for $\vec{r}$ er punktet Q et dobbelpunkt hørende til t -værdierne $t = -2$ og $t = t_0$.

- a) Bestem koordinatsættet til punktet Q , og bestem t_0 .



- b) Bestem den spidse vinkel mellem banekurvens to tangenter i punktet Q .

5.D2.2 (2018-08, 15 – Vejledende 2)

I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at til tidspunktet t er stedvektoren $\vec{r}$ til P givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^5 - t \end{pmatrix}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Punktet P passerer punktet $Q(1,0)$ til tidspunkterne t_1 og t_2 .

- a) Bestem t_1 og t_2 .

Mellem de to tidspunkter t_1 og t_2 afsnører banekurven i 1. og 4. kvadrant en punktmængde M , der har et areal T . Det oplyses, at

$$T = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}'(t) \cdot \hat{\vec{r}}(t) dt.$$

- b) Bestem arealet T af punktmængden M .

5.D2.3 (2019-05, 13)

I et koordinatsystem er tre punkter A , B og C bestemt ved stedvektorerne

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorfunktionen $\vec{r}$ er bestemt ved

$$\vec{r}(t) = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot \overrightarrow{OB} + t^2 \cdot \overrightarrow{OC}.$$

- a) Gør rede for, at koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ til $\vec{r}(t)$ er givet ved

$$x(t) = -21 \cdot t^2 + 32 \cdot t + 2$$

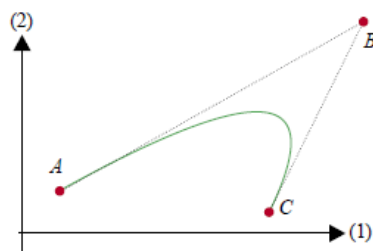
$$y(t) = -17 \cdot t^2 + 16 \cdot t + 2.$$

- b) Undersøg, om $\vec{r}'(0)$ er parallel med $\overrightarrow{AB}$.

Bezier-kurver anvendes blandt andet i computergrafik til at frembringe skalerbare glatte kurver. Den kvadratiske Bezier-kurve med A og C som endepunkter er den del af banekurven for $\vec{r}$, der svarer til $0 \leq t \leq 1$.

Det oplyses, at buelængden af en banekurve i intervallet $a \leq t \leq b$ kan bestemmes ved

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$



- c) Bestem længden af den kvadratiske Bezier-kurve fra A til C .

5.D2.4 (2021-12, 13)

Logoet for TV-stationen Australian Broadcasting Corporation har form som parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a) Tegn parameterkurven for $\vec{r}$.
b) Bestem koordinatsættet til hvert af parameterkurvens skæringspunkter med andenaksen.

Parameterkurven for $\vec{r}$ har et dobbeltpunkt for $t = \frac{\pi}{3}$ og $t = \frac{5\pi}{3}$.

- c) Bestem vinklen mellem hastighedsvektorerne i dette dobbeltpunkt.

5.D2.5 (2019-08, 13)



En jæger skyder med bue og pil efter en flyvende gås. I en model i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser kan pilespidsens og gåsens bevægelser beskrives ved

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}(t) &= \begin{pmatrix} 65 \cdot t \\ -4,91 \cdot t^2 + 37,5 \cdot t + 1,8 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OG}(t) &= \begin{pmatrix} 141 - 29 \cdot t \\ 46 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

hvor $\overrightarrow{OP}(t)$ og $\overrightarrow{OG}(t)$ betegner stedvektorene til pilespidsens henholdsvis gåsens position til tidspunktet t (målt i sekunder efter skuddet).

- a) Tegn banekurverne for pilespidsens og gåsens bevægelser i samme koordinatsystem.
- b) Benyt modellen til at bestemme pilespidsens fart til tidspunktet $t = 1$.
- c) Benyt modellen til at afgøre, om pilespiden rammer gåsen.

5.D2.6 (2020-05, 14)

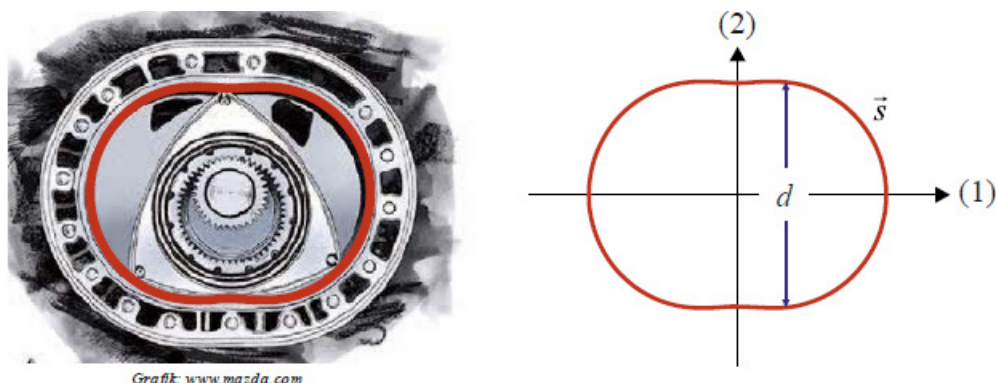
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^3 + t^2 - 4t \end{pmatrix}, \quad -3 \leq t \leq 3.$$

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ har et dobbeltpunkt P på andenaksen.

- a) Bestem de to parameterværdier hørende til P .
- b) Bestem koordinatsættet til hvert af de to punkter på parameterkurven, hvor tangenten til parameterkurven er vandret.

5.D2.7 (2019-12, 14)



Figuren viser et lodret snit af en Wankelmotor. I en model har randen af det indre af forbrændingskammeret form som parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \cos(t) + \frac{7}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}t\right) \\ \frac{1}{2} \cdot \sin(t) + \frac{7}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}t\right) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 6\pi.$$

Det oplyses, at parameterkurven er symmetrisk omkring begge akser, og at parameterkurven beskriver randen af det indre af forbrændingskammeret, netop når t -værdien gennemløber intervallet $[0; 6\pi]$. Enheden på begge akser er cm.

- a) Benyt modellen til at bestemme den største lodrette afstand d i det indre af forbrændingskammeret.

Længden L af en parameterkurve i intervallet $[a; b]$ kan bestemmes ved

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

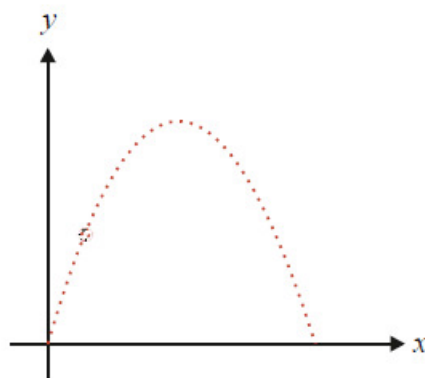
hvor $x(t)$ og $y(t)$ angiver koordinatfunktionerne for vektorfunktionen hørende til parameterkurven.

- b) Benyt modellen til at bestemme længden af randen af det indre af forbrændingskammeret.

5.D2.8 (2020-06, 12)



Foto: www.colourbox.dk



Ved et spark til en fodbold, kan fodboldens bevægelse beskrives ved banekurven for vektorfunktionen $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot t \\ 10t - 3t^2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

hvor k er en konstant, $0 < k < 8$. Koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ betegner henholdsvis fodboldens vandrette og lodrette position (målt i meter) til tidspunktet t (målt i sekunder efter sparket).

- Bestem fodboldens fart $|\vec{r}'(t)|$ til tidspunktet $t = 1$, når $k = 2$.
- Bestem det tidspunkt, hvor fodbolden rammer jorden.

Ved et bestemt spark rammer fodbolden jorden 26 meter fra det sted, hvorfra den blev sparket til.

- Bestem k for dette spark.

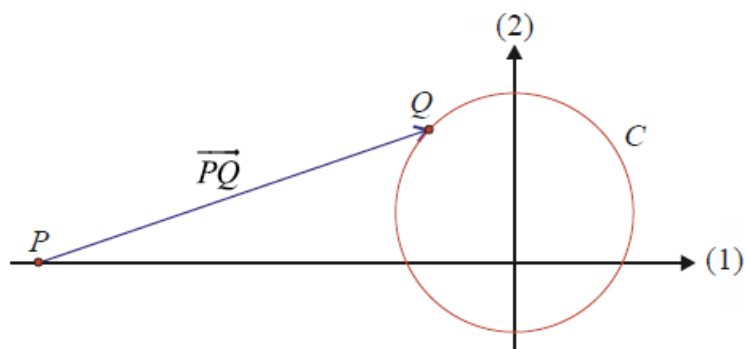
5.D2.9 (2022-08, 9)

En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - e^t + 2 \\ -t^3 - e^{-t} + 4 \end{pmatrix}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

- Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.
- Bestem t -værdien for det punkt, hvor parameterkurven for $\vec{s}$ skærer andenaksen.

5.D2.10 (2020-08, 14)



En cirkel C er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(t) \\ 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Det oplyses, at $Q(x, y)$ er et punkt på cirklen C , og at punktet P har koordinaterne $(-12, 0)$.

- a) Gør rede for, at afstanden mellem P og Q kan beskrives ved funktionen

$$d(t) = \sqrt{173 + 120 \cdot \cos(t) + 20 \cdot \sin(t)}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

- b) Bestem koordinatsættet til det punkt Q på cirklen C , der har den mindste afstand til punktet P .

5.D2.11 (2021-08, 15)

En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ t^3 - 4t + 3 \end{pmatrix}, \quad -3 \leq t \leq 3.$$

- a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ har et dobbeltpunkt P svarende til parameterværdien $t = 2$.

- b) Bestem den anden parameterværdi hørende til dobbeltpunktet P .
- c) Bestem den spidse vinkel mellem de to tangenter til parameterkurven for $\vec{s}$ i P .

5.D2.12 (2020-12, 13)



Foto: www.colourbox.dk

En cykel har monteret en refleks på forhjulet (se billedet). Når cyklen sættes i bevægelse, kan refleksens position i en model beskrives ved banekurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,95 \cdot t - 0,23 \cdot \sin(15 \cdot t) \\ 0,33 - 0,23 \cdot \cos(15 \cdot t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

hvor $x(t)$ og $y(t)$ måles i meter, og t måles i sekunder, efter cyklen sættes i bevægelse.

- a) Tegn banekurven for refleksens position.
- b) Benyt modellen til at bestemme refleksens maksimale højde over jorden.



Grafik: www.colourbox.dk

En krage flyver hen over en sti og taber en nød. I en model kan nøddens position i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser beskrives ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 30 - 4,91 \cdot t^2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

hvor $\vec{s}(t)$ betegner stedvektoren til nøddens position over stien til tidspunktet t (målt i sekunder).

- a) Benyt modellen til at bestemme nøddens fart $|\vec{s}'(t)|$ til tidspunktet $t = 1$.

Det oplyses, at længden af en parameterkurve med koordinatfunktioner x og y samt parameteren t i intervallet $[t_1, t_2]$ kan beregnes ved formlen

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

- b) Benyt modellen til at bestemme længden af den bane kurve nødden følger, inden den rammer stien.

5.D2.14 (2021-06, 14)



Grafik : colourbox.com

En mus kravler ud af sit musehul og går en tur langs en lukket rute. I en model kan ruten beskrives ved parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot t - t^2 \\ t^3 - 9 \cdot t^2 + 20 \cdot t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4,$$

hvor $(x(t), y(t))$ betegner musens position til tidspunktet t (målt i minutter) i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. Musehullet er placeret i punktet $(0, 0)$.

- a) Tegn musens rute.
- b) Bestem $|\vec{s}'(1)|$, og giv en fortolkning af dette tal.
- c) Bestem det tidspunkt, hvor musen er længst væk fra musehullet.

6. Funktioner af to variable

Delprøve 1:

6.D1.1 (2021-05, 3)

En funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x, y) = x^3 + 4x + x \cdot y + y^2.$$

- a) Bestem $f(2, 3)$.
- b) Bestem gradienten for f i punktet $(2, 3, f(2, 3))$.

6.D1.2 (2021-06, 1)

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 \cdot y + 2y.$$

- a) Bestem $f(2, 5)$.
- b) Bestem de partielle afledede $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$.

6.D1.3 (2021-12, 3)

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = 3x^2 + 8y^2 - 2y + 3.$$

- a) Bestem den partielle afledede $\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y))$.

6.D1.4 (2022-05, 7)

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x.$$

Det oplyses, at f har ét stationært punkt.

- a) Bestem koordinatsættet til det stationære punkt.
- b) Bestem arten af det stationære punkt.

6.D1.5 (2022-06, 1)

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 11.$$

- a) Bestem $f(5, 2)$.

6.D1.6 (2022-07, 1)

En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + y.$$

- a) Bestem $f(3, -2)$.

6.D1.7 (2022-08, 1)

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 4x.$$

- a) Bestem $f(3, 1)$.

Det oplyses, at f har ét stationært punkt P_0 .

- b) Bestem koordinatsættet til P_0 .

Delprøve 2:

6.D1.1 (2018-06, 18 – Vejledende 1)

En funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x, y) = x^3 - 3x \cdot y + y^3.$$

- a) Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Det oplyses, at grafen for f har netop to stationære punkter.

- b) Bestem arten af hvert af de to stationære punkter.

6.D2.2 (2018-08, 16 – Vejledende 2)

En funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x, y) = 0,1 \cdot x^2 - 0,8 \cdot x + 0,1 \cdot y^2.$$

- a) Tegn grafen for f .

I en model har lampeskærmen til en bestemt standerlampe form som en del af grafen for f . I modellen er lampen monteret på en stang i punktet $P(0, 0, 0)$. Stangens endeblade i monteringspunktet P er en del af tangentplanen α til grafen for f i P .

- b) Bestem en ligning for α .

Den cirkulære ydre kant af lampen kan i modellen beskrives som niveaukurven, der er givet ved $f(x, y) = 0,9$.

- c) Bestem radius i denne cirkel.

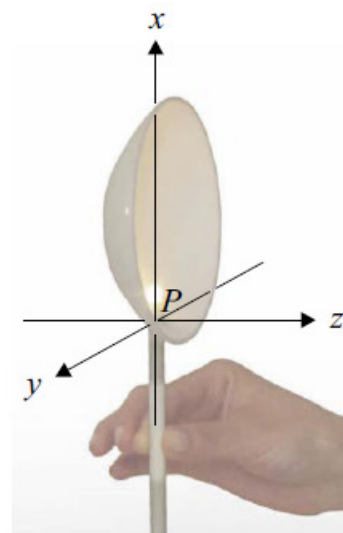


Foto: www.archiexpo.com

6.D2.3 (2019-05, 14)



Foto: www.colourbox.com

I en model for overskuddet fra produktionen af et bestemt produkt i en virksomhed er overskuddet som funktion af antal arbejdstimer og investering i maskiner bestemt ved

$$f(x, y) = 100 \cdot x^{0,6} \cdot y^{0,4} - 250 \cdot x - 0,1 \cdot y,$$

hvor $f(x, y)$ betegner overskuddet (målt i kr.), x betegner antallet af arbejdstimer (målt i timer), og y betegner investeringen i maskiner (målt i kr.).

- a) Bestem overskuddet fra produktionen, når der bruges 2000 arbejdstimer, og der investeres 100 000 kr. i maskiner.
- b) Bestem gradienten for f , når $x = 2000$ og $y = 100\,000$, og giv en fortolkning af denne.

6.D2.4 (2022-06, 13)

En funktion f af to variable er givet ved

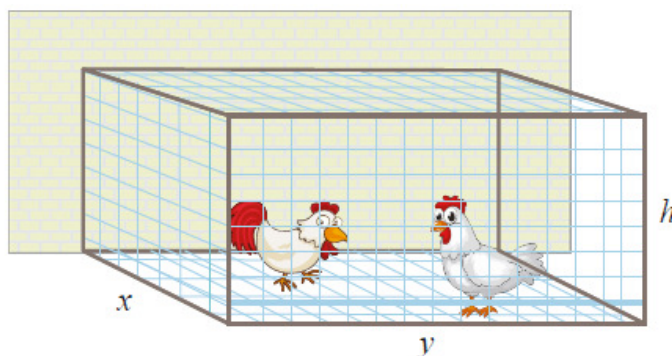
$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + x + 2y + 1.$$

- a) Tegn grafen for f .

Funktionen har minimum i $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- b) Bestem koordinatsættet til punktet P .

6.D2.5 (2019-12, 15)



En kasseformet hønsegård skal indhegnes med trådnæt. Hønsegården er placeret langs en mur, så en del af muren udgør hønsegårdens ene side. Den del af hønsegården, der skal indhegnes med trådnæt, består således af bunden, toppen og tre sider.

Bredden af hønsegården betegnes med x , længden betegnes med y , og højden betegnes med h . Det oplyses, at det samlede areal af trådnettet er 48 m^2 .

- a) Gør rede for, at voluminet V af hønsegården som funktion af x og y er bestemt ved

$$V(x, y) = xy \cdot \frac{48 - 2xy}{2x + y},$$

hvor $V(x, y)$ betegner voluminet af hønsegården (målt i m^3) med bredde x (målt i m) og længde y (målt i m).

- b) Tegn grafen for V i grafvinduet $[0; 20] \times [0; 20] \times [0; 35]$.

Det oplyses, at $P(2, 4, 32)$ er et stationært punkt for V .

- c) Bestem arten af P , og forklar, hvad P og arten af P fortæller om hønsegården.

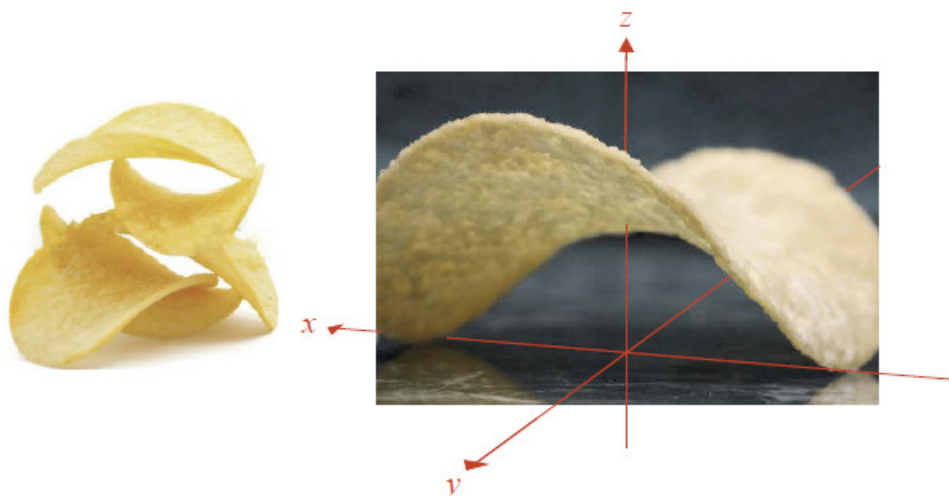
6.D2.6 (2021-08, 17)

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{24 \cdot x}{x^2 + y^2 + 4}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af de to stationære punkter for funktionen f .
- b) Argumentér for, at niveaukurven bestemt ved ligningen $f(x, y) = 4$ er en cirkel.

6.D2.7 (2020-05, 13)



På billedet til venstre ses en bestemt type chips. På figuren til højre er én af disse chips indlagt i et koordinatsystem med enheden cm på alle akser.

I en model kan chipsens form beskrives som en del af grafen for en funktion f givet ved

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4},$$

hvor $f(x, y)$ angiver chipsens højde over bordet.

- a) Tegn grafen for f i området $-3 \leq x \leq 3$ og $-2 \leq y \leq 2$.

Det oplyses, at chipsens form i modellen har et saddelpunkt P .

- b) Bestem koordinatsættet til punktet P .

6.D2.8 (2020-06, 10)

En funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x, y) = e^{x^2 - 4x + y^2 + 6y}.$$

- a) Bestem gradienten for f , når $x = 1$ og $y = 0$.

Det oplyses, at f har netop et stationært punkt P .

- b) Bestem koordinatsættet til P .

6.D2.9 (2020-08, 13)

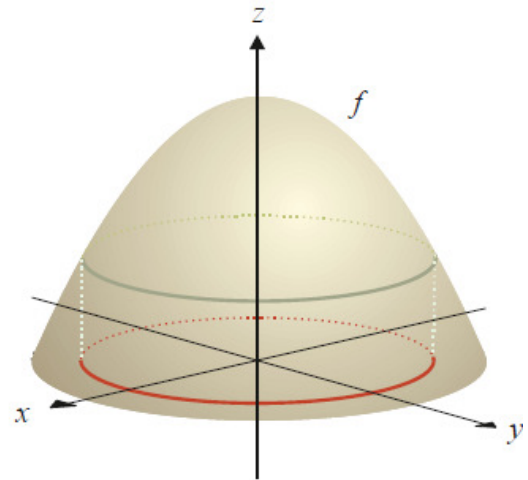


Foto: www.colourbox.dk

I en model kan toppen af et bjerg beskrives som grafen for en funktion f givet ved forskriften

$$f(x, y) = -0,1 \cdot x^2 - 0,1 \cdot y^2 + 5,$$

hvor $f(x, y) \geq 0$, og hvor alle mål er i km.



- a) Bestem $f(3, 4)$.
- b) Bestem gradienten når $x = 3$ og $y = 4$, og giv en fortolkning af resultatet.

Figuren viser modellen af bjerget med niveaukurven $f(x, y) = 2,5$ indtegnet i xy -planen. En gruppe vandrere går én gang rundt om bjerget i 2,5 kilometers højde.

- c) Argumentér for, at niveaukurven $f(x, y) = 2,5$ er en cirkel med radius 5 og bestem, hvor langt vandrerne går.

6.D2.10 (2022-07, 14)

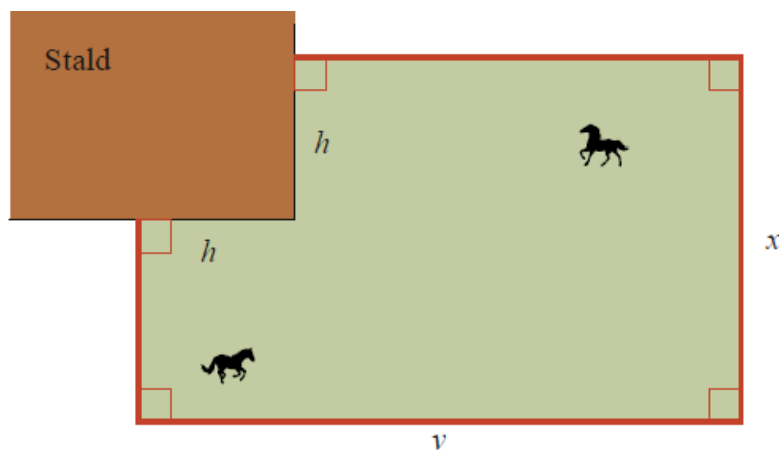
En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - 8x - y^2 + 2y + 19.$$

- a) Tegn grafen for f i grafvinduet $[-5; 10] \times [-5; 10] \times [-5; 10]$.

Grafen for f har et saddelpunkt i $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- b) Bestem koordinatsættet til P .
- c) Gør rede for, at enhver snitkurve for f i x -retningen bliver en parabel, når y holdes fast.

6.D2.11 (2020-12, 16)

En hestefold skal anlægges i forbindelse med en stald og indhegnes med hegn. I hjørnet op mod stalden skal der ikke opsættes hegn. Hestefolden har således fire sider, hvor der skal opsættes hegn. På figuren ovenfor ses hestefoldens form samt betegnelser på hestefoldens dimensioner.

Det oplyses, at den samlede længde af hegnet er 360 m.

- a) Gør rede for, at arealet A af hestefolden udtrykt som funktion af x og y er givet ved

$$A(x, y) = -x^2 - y^2 - x \cdot y + 360x + 360y - 32400,$$

hvor $A(x, y)$ betegner arealet af hestefolden (målt i m^2) med bredde x (målt i m) og længde y (målt i m).

- b) Bestem de værdier for x og y , hvor arealet af hestefolden er størst.

6.D2.12 (2021-05, 14)

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^3 + 4.$$

- a) Tegn grafen for f i grafvinduet $[0, 2] \times [0, 4] \times [0, 10]$.

Det oplyses, at grafen for f har et stationært punkt i $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- b) Bestem x_0 og y_0 .

6.D2.13 (2021-06, 13)



Nyhavnrejser.dk

På billedet ses en bygning, som står på en bro. I en model kan bygningens tag beskrives ved grafen for funktionen

$$f(x, y) = 0,88 \cdot y \cdot \sin(0,63x) + 2,2, \quad -7,5 \leq x \leq 7,5 \text{ og } -2,5 \leq y \leq 2,5,$$

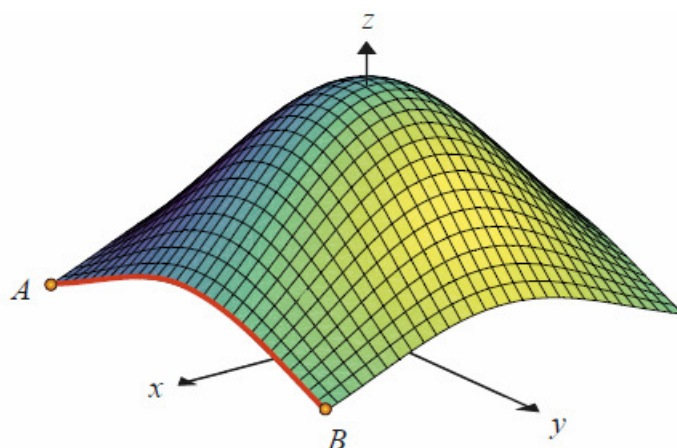
hvor $f(x, y)$ beskriver tagets højde over broen (målt i meter).

I modellen er broen placeret i xy -planen.

- a) Bestem tagets højde over broen, når $x = 0$ og $y = 0$.
- b) Tegn grafen for f .

Mod syd kan afgrænsningen af taget beskrives ved snitkurven givet ved $g(x) = f(x, 2.5)$.

- c) Benyt snitkurven til at bestemme tagets maksimale højde over broen mod syd.



Figuren viser en model af en stor lampeskærm i et tredimensionalt koordinatsystem med enheden meter. I modellen kan lampeskærmen beskrives som grafen for funktionen

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}, \quad \text{hvor } -1 \leq x \leq 1 \text{ og } -1 \leq y \leq 1.$$

Punkterne $A(1, -1, f(1, -1))$ og $B(1, 1, f(1, 1))$ ligger på en af lampeskærmens kanter.

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A og B .

Den ene af lampeskærmens kanter svarer til den del af snitkurven, der går fra punktet A til punktet B .

- b) Bestem længden af lampeskærmens kant fra punktet A til punktet B .

7. Vektorer og analytisk geometri

Delprøve 1:

7.D1.1 (2019-05, 7)

I et koordinatsystem er to punkter givet ved $A(4,3)$ og $B(11,4)$. Punktet P ligger på førsteaksen og har samme afstand til A og B .

- a) Tegn en model af situationen, og bestem førstekoordinaten til P .

7.D1.2 (2019-12, 9)

En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 + a \cdot x - 6 \cdot y = 0,$$

hvor a er en konstant.

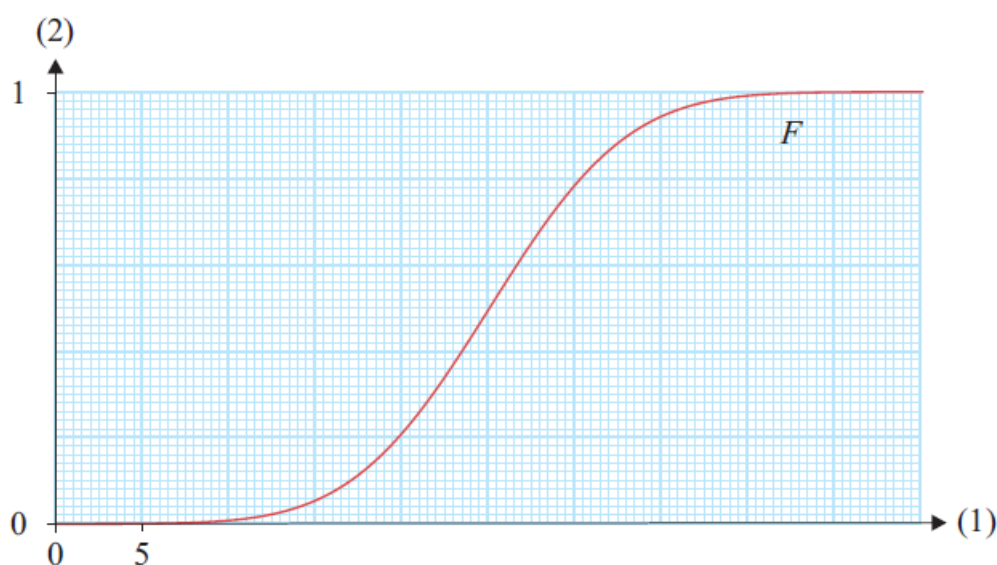
- a) Bestem a , så cirklen går igennem punktet $P(2,6)$.
- b) Bestem de to værdier for a , for hvilke cirklen har radius 5.

8. Sandsynlighedsregning

Delprøve 1:

8.D1.1 (2018-06, 6 – Vejledende 1)

En bestemt type korn hældes i poser. Vægten af de enkelte poser med korn noteres. Den stokastiske variabel X angiver den faktiske vægt af korn i en pose (målt i kg). Det oplyses, at X er normalfordelt. På figuren ses grafen for fordelingsfunktionen F for X .



- a) Bestem $E(X)$, og forklar betydningen af dette tal.

Vedlagte bilag kan indgå i besvarelsen.

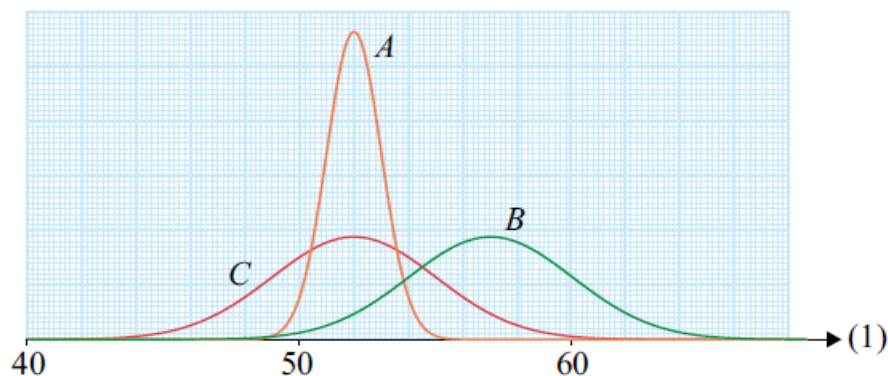
8.D1.2 (2018-08, 10 – Vejledende 2)

En stokastisk variabel X er binomialfordelt, $X \sim b(4, \frac{1}{3})$.

- a) Vis, at $P(X = 2) = \frac{24}{81}$.

8.D1.3 (2018-08, 5 – Vejledende 2)

Nedenstående figur viser graferne for tæthedsfunktionerne hørende til tre normalfordelte stokastiske variable.



- a) Gør rede for, hvilken af graferne A , B eller C der hører til tæthedsfunktionen for den normalfordelte stokastiske variabel, der har middelværdi 52 og spredning 3.

Vedlagte bilag kan indgå i besvarelsen.

8.D1.4 (2019-08, 2)



Grafik: www.colourbox.dk

En klasse bestiller maden til et studentergilde hos et cateringfirma. Firmaet annoncerer med følgende udbud: 3 forretter, 4 hovedretter, 5 desserter. Heraf kan man frit sammensætte én af følgende to menutyper:

Menu med 2 retter: hovedret og dessert

Menu med 3 retter: forret, hovedret og dessert

Klassen kan ikke blive enige om en menu og vælger derfor at trække lod blandt de mulige menuer.

- a) Bestem sandsynligheden for, at klassen vælger en 3-retters menu, hvis valget blandt de forskellige menuer foretages ved lodtrækning.

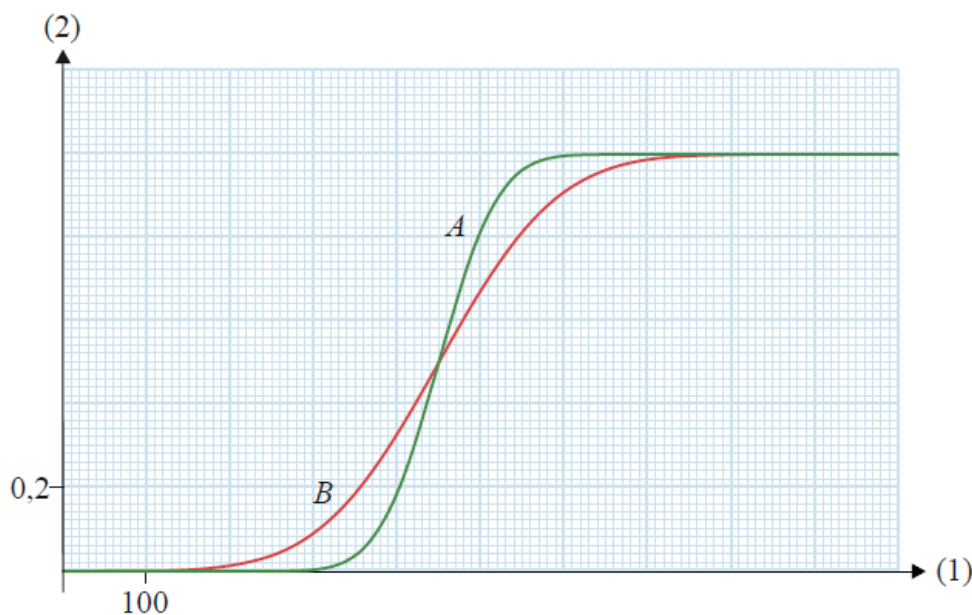
8.D1.5 (2019-05, 9)

En binomialfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 0,4 og antalsparameter 4.

- Bestem sandsynlighedsparameteren for X , og bestem $P(X = 2)$.
- Bestem spredningen for X .

8.D1.6 (2019-12, 6)

På to forskellige fabrikker A og B fyldes pasta i poser. For begge fabrikker antages det, at vægten (målt i gram) af de enkelte poser er normalfordelt. På figuren ses graferne for de to tilhørende fordelingsfunktioner.



- Benyt figuren til at bestemme, hvor meget poserne fra fabrik A vejer i gennemsnit.
- Afgør, om det er poserne fra fabrik A eller B , der varierer mest i vægt.

Benyt vedlagte bilag.

8.D1.7 (2021-08, 9)

Lad f betegne tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X .

- Forklar, hvad integralet $\int_{-\infty}^{13} f(x) dx$ fortæller om den stokastiske variabel X .

8.D1.8 (2020-06, 2)



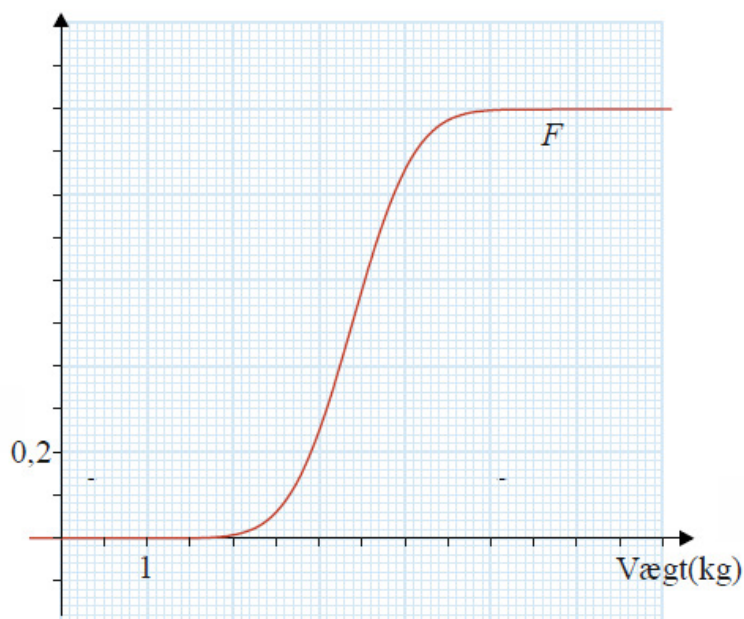
Foto: www.colourbox.dk

Fødselsvægten for danske piger født i 2017 er ifølge en model normalfordelt med middelværdi $\mu = 3,38$ og spredning $\sigma = 0,57$.

- a) Bestem intervallet for de normale udfald for fødselsvægten for danske piger født i 2017.

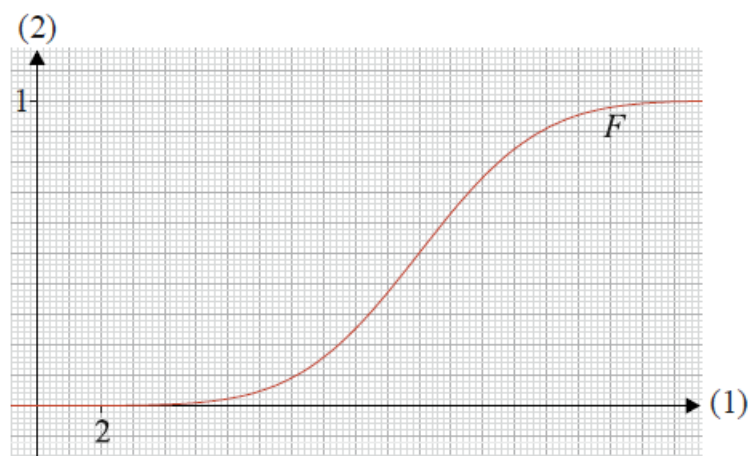
På figuren ses grafen for fordelingsfunktionen F for fødselsvægten for piger født i 2017.

- b) Benyt bilaget til at bestemme sandsynligheden for at fødselsvægten for en pige er mindre end 4 kg.



Kilde: www.statistikbanken.dk

8.D1.9 (2020-05, 4)



Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen F for en normalfordelt stokastisk variabel X .

- a) Bestem middelværdien for X .

Benyt eventuelt det vedlagte bilag.

8.D1.10 (2020-08, 6)

Fra en bestemt producent af cornflakes kan vægten af pakker med cornflakes beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 500$ g og spredning $\sigma = 8$ g.

- a) Bestem intervallet for de normale udfald for vægten af pakker med cornflakes.
- b) Bestem sandsynligheden for, at en pakke cornflakes vejer mellem 492 g og 508 g.



8.D1.11 (2020-12, 8)

Lad f betegne tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X .

- a) Forklar, hvad integralet $\int_7^{13} f(x) dx$ fortæller om den stokastiske variabel X .

Det oplyses, at X har middelværdi 10, og at $\int_7^{13} f(x) dx = 0,8$.

- b) Argumentér for, at X ikke har spredningen 3.

8.D1.12 (2021-06, 4)



Foto: www.colourbox.dk

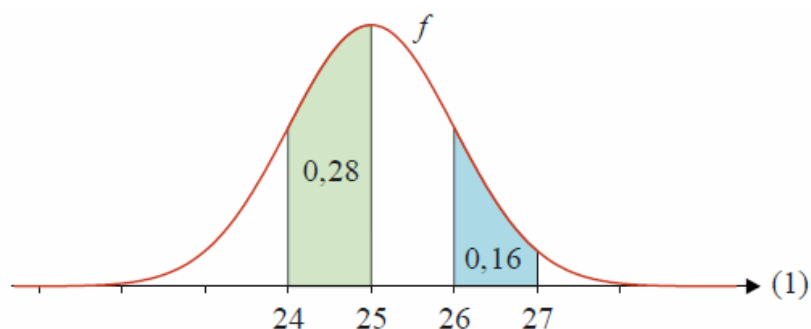
I en model kan vægten af kyllingelår (målt i gram) beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 100$ og spredning $\sigma = 14$.

- a) Undersøg om et kyllingelår på 80 gram er et normalt udfald.

Tæthedsfunktionen for X betegnes f .

- b) Forklar, hvad $\int_{100}^{120} f(x) dx = 0,423$ fortæller om vægten af kyllingelår.

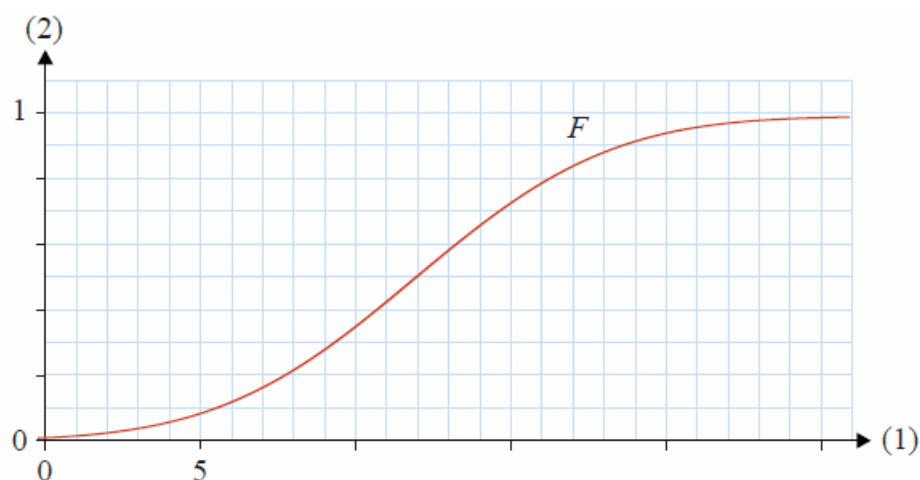
8.D1.13 (2021-12, 4)



Figuren viser grafen for tæthedsfunktionen f for en normalfordelt stokastisk variabel X . Middelværdien for X er 25. Arealet af hvert af de to farvede områder er angivet på figuren.

- a) Bestem sandsynligheden $P(24 \leq X \leq 25)$.
- b) Bestem sandsynligheden $P(X \geq 27)$.

8.D1.14 (2022-06, 2)



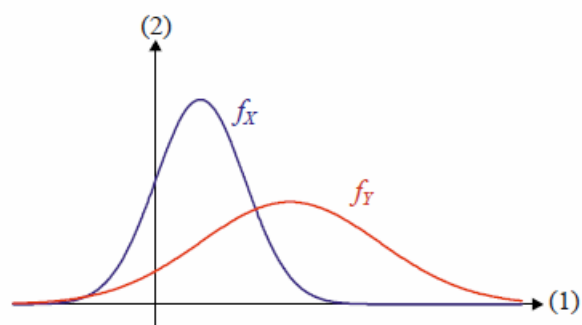
Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen F for en normalfordelt stokastisk variabel X .

- a) Bestem middelværdien μ . Brug bilaget.
- b) Bestem $P(10 \leq X \leq 21)$. Brug bilaget.

8.D1.15 (2022-07, 3)

Figuren viser graferne for tæthedsfunktionerne f_X og f_Y for to normalfordelte stokastiske variable X og Y .

- a) Hvilken af de to stokastiske variable har den største middelværdi? Begrund svaret.



Delprøve 2:

8.D2.1 (2018-06, 14 – Vejledende 1)

Tabellen viser sandsynlighedsfeltet for en stokastisk variabel X , der angiver en spillers fortjeneste (målt i kr.) i et bestemt spil.

Det oplyses, at a er et positivt tal.

Fortjeneste (kr.)	-10	a	a^2
Sandsynlighed	0,70	0,20	0,10



Grafik: www.colourbox.dk

Middelværdien for X angiver gennemsnittet for en spillers fortjeneste.

- a) Bestem gennemsnittet for en spillers fortjeneste, når $a = 5$.
- b) Bestem de værdier af a , som gør, at en spiller i gennemsnit vinder penge på at spille.

8.D2.2 (2018-08, 12 – Vejledende 2)



Foto: www.colourbox.com

En fabrik udleder en fosforforbindelse i sit spildevand. I en periode undersøges fabrikkens spildevand, og det viser sig, at den dagligt udledte mængde af fosfor-forbindelsen er normalfordelt med middelværdien 0,53 kg og spredningen 0,20 kg.

- a) En given dag måles en udledning af 1 kg af fosforforbindelsen. Afgør, om denne mængde er et exceptionelt udfald.
- b) Bestem sandsynligheden for, at der på en tilfældig dag i perioden udledes mindre end 0,70 kg af fosforforbindelsen.

8.D2.3 (2019-05, 11)



Foto: www.colourbox.com

Fra en bestemt producent har man udtaget en stikprøve på 200 poser med økologiske kartofler. Tabellen viser vægten af hver af de 200 poser.

	Pose 1	Pose 2	...	Pose 199	Pose 200
Vægt (g)	1404	1497	...	1505	1523

(Resten af tabellen findes i bilaget "vægt_af_kartofler.xlsx")

I en model kan vægten af en pose økologiske kartofler fra producenten beskrives ved en stokastisk variabel X .

- a) Gør rede for, at X tilnærmelsesvis er normalfordelt.
- b) Benyt stikprøven til at bestemme middelværdi og spredning af X .
- c) Benyt modellen til at bestemme sandsynligheden for, at en pose økologiske kartofler fra producenten vejer mindre end 1450 g.

8.D2.4 (2020-12, 11)

En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(3, 2)$.

- a) Tegn grafen for fordelingsfunktionen hørende til X .
- b) Bestem $P(0,5 \leq X \leq 4)$.
- c) Bestem tallet k , så $P(X \leq k) = 0,6$.

8.D2.5 (2019-08, 12)



Foto: www.colourbox.dk

Et firma producerer kattermad i poser. Vægten af poserne med kattermad er normalfordelt med middelværdien 5 kg og spredningen 0,11 kg.

- a) En bestemt pose med kattermad fra firmaet vejer 4,85 kg. Afgør, om vægten af denne pose er et normalt udfald.

Firmaet producerer også kattermad i større poser. Firmaet oplyser, at vægten af disse poser er normalfordelt med middelværdien 10 kg. Desuden oplyses, at 10% af poserne vejer mindre end 9,8 kg.

- b) Bestem spredningen for vægten af disse poser.

8.D2.6 (2021-08, 13)

En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(5,1)$.

- a) Tegn grafen for fordelingsfunktionen hørende til X .
- b) Bestem tallet k , så $P(X \leq k) = 0,4$.

8.D2.7 (2022-06, 11)

Nedenstående tabel viser vægten af 200 tilfældigt udvalgte attenårige mænd fra Hongkong.

Vægt i kg	51,3	61,9	57,8	58,0
-----------	------	------	------	------

Alle tabellens 200 værdier findes i den vedhæftede fil: *Hongkong_vægt*

- a) Gør rede for, at mændenes vægt med god tilnærmelse kan antages at være normalfordelte.
- b) Bestem intervallet for de normale udfald i denne normalfordeling.

Kilde: *SOCR Data*

8.D2.8 (2020-06, 8)



Foto: www.colourbox.dk

202 tilfældigt udvalgte danske skolebørn gennemfører en test. Tabellen viser de opnåede pointtal.

117	157	...	124	102
-----	-----	-----	-----	-----

(Hele tabellen med alle 202 pointtal findes i bilaget "point_fra_test.xlsx")

- a) Gør rede for, at børnenes pointtal i stikprøven tilnærmelsesvis er normalfordelte.

I en model baseret på stikprøven kan fordelingen af danske skolebørns pointtal ved en tilsvarende type test beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 151,4$ og spredning $\sigma = 40,4$.

- b) Benyt modellen til at bestemme sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt dansk skolebarn får mere end 200 point i en test af denne type.

8.D2.9 (2020-08, 11)

En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(6, 0.7)$. Tæthedsfunktionen for X betegnes f .

- a) Tegn grafen for f .
- b) Bestem $\int_5^8 f(x) dx$, og forklar, hvad resultatet fortæller om X .

8.D2.10 (2021-05, 9)

En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi $\mu = 60$ og spredning $\sigma = 5$.

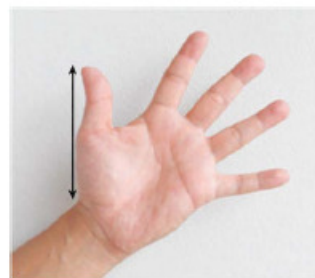
- a) Bestem $P(X \leq 70)$.

8.D2.11 (2021-12, 14)

På et gymnasium målte 41 elever længden af deres venstre tommelfinger.

Tabellen herunder viser nogle af resultaterne.

Længden af venstre tommelfinger (mm)	63	91	...	102	112
--------------------------------------	----	----	-----	-----	-----



Alle tabellens 41 resultater findes i den vedhæftede fil: *Tommelfinger.xlsx*

- a) Gør rede for, at længden af elevernes venstre tommelfinger med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X .

Den mindste længde var 63 mm.

- b) Undersøg, om denne længde er et exceptionelt udfald.

8.D2.12 (2022-05, 10)

På et gartneri udvælger man på tilfældig måde 200 fuldt udvoksede tulipaner af en bestemt art. Man måler længden af deres stilke, og tabellen herunder viser nogle af målingerne.

Længde (mm)	300	271	...	280	261
-------------	-----	-----	-----	-----	-----

Hele tabellen med alle 200 målinger findes i bilaget "*Tulipanstilke.xlsx*"

- a) Gør rede for, at længden af tulipanernes stilke med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X .

- b) Bestem middelværdi og spredning for X .

På gartneriet udvælger man en tilfældig tulipan af denne art.

- c) Bestem sandsynligheden for, at længden af stilken er mellem 270 mm og 330 mm.

8.D2.13 (2022-07, 11)

I en model kan koncentrationen af hæmoglobin i blodet hos kvinder beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X .

Målt i mmol/L har X middelværdien $\mu = 8,4$ og spredningen $\sigma = 0,55$.

- a) Bestem de normale udfald for X .
- b) Bestem sandsynligheden $P(X \leq 8,0)$ for, at en tilfældigt udvalgt kvinde har en koncentration af hæmoglobin i blodet på højst 8,0 mmol/L.

Kilde: *min.medicin.dk*

8.D2.14 (2022-08, 11)

Tabellen viser vingelængden, målt i tiendedele millimeter, for 100 stuefluer.

Vingelængde	36	41	50	55
-------------	----	----	----	----

Alle tabellens 100 data findes i den vedhæftede fil: *vingelængde.xlsx*

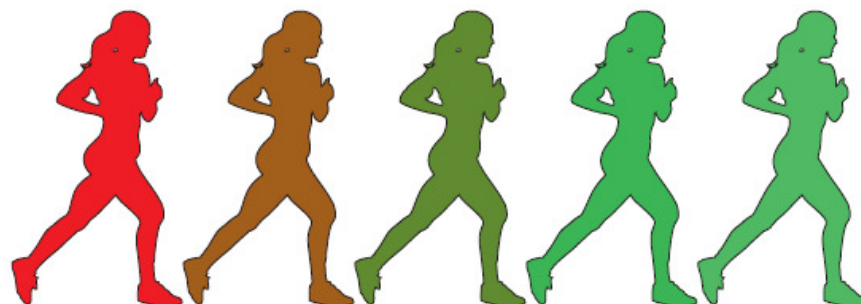
- a) Gør rede for, at vingelængderne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X .
- b) Bestem $P(X \geq 52)$.
- c) Hvilke af de 100 vingelængder er ikke normale udfald?

Kilde: *Sokal, R.R., and P.E.Hunter. 1955*

9. Statistik (regression)

Delprøve 2:

9.D2.1 (2018-06, 13 – Vejledende 1)



En kvinde har gennem en periode i forbindelse med sine løbeture noteret sammenhørende værdier af den gennemsnitlige løbetid pr. km og sin vægt umiddelbart før løbeturen. Resultaterne fremgår af tabellen nedenfor.

Vægt (kg)	83,1	83,0	...	75,5	75,2
Gennemsnitlig løbetid pr. km (minutter)	6,59	6,49	...	6,29	6,23

(Resten af tabellen findes i bilaget: ”stx11 Bilag 1 Opgave 13 Data for løb.xlsx”)

I en model antages det, at den gennemsnitlige løbetid pr. km (målt i minutter) som funktion af vægten (målt i kg) kan beskrives ved en lineær funktion. Modellen bestemmes ved lineær regression på tabellens data.

- a) Benyt residualplottet til at vurdere modellen.
- b) Gør rede for, at residualerne med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte, og bestem et 95%-konfidensinterval for hældningskoefficienten i modellen.

9.D2.2 (2019-08, 15)



Foto: www.colourbox.dk

I et laboratorium har man undersøgt sammenhængen mellem substratkoncentration og initialhastighed ved nedbrydning af ethanol med et enzym. Tabellen viser sammenhørende målte værdier af substratkoncentration og initialhastighed.

Substratkoncentration (mM)	1,0	2,5	3,1	5,4	10,7	12,3	15,2	21,0
Initialhastighed (mM pr. sekund)	0,028	0,061	0,072	0,105	0,152	0,161	0,175	0,195

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$\frac{1}{v} = a \cdot \frac{1}{s} + b,$$

hvor s betegner substratkoncentrationen (målt i mM), og v betegner initialhastigheden (målt i mM pr. sekund).

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- Benyt modellen til at bestemme initialhastigheden, når substratkoncentrationen er 7,0 mM.

9.D2.3 (2019-12, 13)

Tabellen viser en række målinger af sammenhørende værdier af nogle kronblades bredde og længde for en bestemt blomsterart.

Bredde (cm)	2,0	1,9	...	2,2	1,5
Længde (cm)	5,1	5,8	...	6,2	5,1

(Resten af data findes i bilaget *Blomsterdata.xlsx*)



Foto: www.colourbox.dk

I en lineær regressionsmodel kan sammenhængen mellem bredden og længden af et kronblad beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner længden (målt i cm) af et kronblad med bredden x (målt i cm).

- a) Gør rede for, at residualerne i modellen med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte.

En gruppe biologer formoder, at den lineære sammenhæng mellem længden og bredden af et kronblad er voksende.

- b) Bestem et 95% konfidensinterval for hældningskoefficienten i modellen, og benyt dette til at afgøre, om biologernes formodning er troværdig.



Grafik: freepik.com



Tabellen viser sammenhørende værdier for statsgæld og arbejdsløshed i et bestemt land.

Arbejdsløshed (målt i % af arbejdsstyrken)	7,10	6,90	...	8,63	7,36
Statsgæld (målt i % af BNP)	81,6	79,1	...	73,2	69,5

(Hele tabellen med alle 42 datapunkter findes i bilaget "Arbejdsløshed_Statsgæld.xlsx")

En arbejdsmarkedsforsker formoder, at statsgælden som funktion af arbejdsløsheden kan beskrives ved en lineær model

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner statsgælden (målt i % af BNP), og x betegner arbejdsløsheden (målt i % af arbejdsstyrken).

- a) Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for f .
- b) Bestem et 95% konfidensinterval for hældningskoefficienten for f , og afgør, om arbejdsmarkedsforskerens formodning er rimelig.

Kilde: <http://www.oecd.org>

9.D2.5 (2020-12, 15)

I en sportshal har nogle elever målt sammenhørende værdier af hastigheden og højden over gulvet for en basketball, der springer op efter at have ramt gulvet. Tabellen viser elevernes målinger.

Højde (m)	0,36	0,45	0,55	0,63	0,76	0,85	0,91
Hastighed (m/s)	3,25	2,94	2,64	2,34	1,73	1,11	0,49

I en model er der en lineær sammenhæng mellem h og v^2 givet ved

$$v^2 = a \cdot h + b,$$

hvor v betegner boldens hastighed (målt i meter pr. sekund), og h betegner boldens højde over gulvet (målt i meter).

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- Benyt modellen til at bestemme boldens hastighed, da den var 0,20 meter over gulvet.

9.D2.6 (2021-05, 13)



Grafik: www.colourbox.dk

En isproducent har undersøgt det daglige isforbrug blandt en række forbrugere. Tabellen viser sammenhørende værdier for det daglige isforbrug og middeltemperaturen den pågældende dag.

Middeltemperatur (målt i °C)	5,0	13,3	...	17,8	21,7
Isforbrug (målt i liter)	0,82	0,79	...	0,92	1,16

(Hele tabellen med alle 30 datapunkter findes i bilaget *IsForbrug.xlsx*)

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner det daglige isforbrug (målt i liter), og x betegner middeltemperatur (målt i °C).

- a) Benyt regression på tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- b) Bestem et 95% konfidensinterval for a , og benyt dette til at afgøre, om der er statistisk belæg for, at sammenhængen mellem det daglige isforbrug og middeltemperaturen er voksende.

9.D2.7 (2021-06, 10)



Foto: www.colourbox.dk

En æbleavler har udtaget en stikprøve blandt årets æblehøst og målt vægt og rumfang af æblerne. Tabellen viser resultatet af målingerne.

Volumen (cm ³)	126,0	140,5	...	150,6	150,5
Vægt (gram)	164,3	185,9	...	202,1	199,4

(Hele tabellen med alle 204 datapunkter findes i bilaget *Aebler.xlsx*)

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$M(V) = a \cdot V + b,$$

hvor $M(V)$ betegner vægten (målt i gram) af et æble med et volumen på V (målt i cm³).

- a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- b) Gør rede for, at residualerne med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte.

9.D2.8 (2021-08, 11)



Grafik: freepik.com

Tabellen viser sammenhørende værdier for kilometerstand og brugt vognspris for et bestemt bilmærke.

Kilometerstand (1000 km)	58	56	...	25	38
Brugt vognspris (1000 kr.)	173,3	152,7	...	188,4	193,7

(Hele tabellen med alle 130 datapunkter findes i bilaget Biler.xlsx)

I en model kan sammenhængen mellem kilometerstand og brugt vognspris beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner brugt vognsprisen (målt i 1000 kr.), og x betegner kilometerstanden (målt i 1000 km).

- a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- b) Gør rede for, at residualerne med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte.

10. Forberedelsesmaterialer

A. MATRIX-REGNING (2018):

Delprøve 1:

10A.D1.1 (2018-06, 3 – Vejledende 1)

En vektor $\vec{v}$ og en matrix M er givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem $M^2 \cdot \vec{v}$.

10A.D1.2 (2018-08, 6 – Vejledende 1)

En matrix M er givet ved

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem M^{-1} .

Et ligningssystem er givet ved

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

b) Bestem løsningen til ligningssystemet.

Delprøve 2:

10A.D2.1 (2018-06, 17 – Vejledende 1)

På et bestemt gymnasium sælges to slags sodavand A og B . På gymnasiet gennemføres jævnligt spørgerunde blandt de elever, der drikker sodavand, om de vælger A eller B . Det antages, at 10 % af eleverne skifter fra A til B , og 22 % skifter fra B til A fra spørgerunde til spørgerunde.

Antallet af elever, der drikker henholdsvis sodavand A og sodavand B i spørgerunde n , betegnes henholdsvis a_n og b_n .

- a) Gør rede for, at udviklingen i fordelingen mellem antal elever, der drikker sodavand A og sodavand B , kan beskrives ved

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,22 \\ 0,1 & 0,78 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- b) Bestem en egenvektor for $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,22 \\ 0,1 & 0,78 \end{pmatrix}$, når egenværdien er 1, og forklar, hvad egenvektoren fortæller om forholdet mellem antallet af elever, der vælger sodavand A henholdsvis B .

10A.D2.2 (2018-08, 14 – Vejledende 2)

I en model opdeles en dyrepopulation i de unge dyr og de gamle dyr, hvor x_n betegner antallet af unge dyr, og y_n betegner antallet af gamle dyr i år n . Matricen M givet ved

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \text{ beskriver udviklingen i populationen fra år } n \text{ til år } n+1.$$

Dyrepopulationen starter med at bestå af ingen unge dyr og 10 gamle dyr.

- a) Bestem antallet af unge og gamle dyr i populationen efter 6 år.
- b) Bestem egenværdierne for M , og forklar betydningen af egenværdierne for fordelingen af unge og gamle dyr i populationen.

B. GRAF-TEORI (2019):

Delprøve 1:

10B.D1.1 (2019-05, 8)



Foto: www.colourbox.com

I et boligområde i en storby er der etableret et gangsystem mellem seks boligblokke markeret $A - F$.

Tabellen viser en oversigt over gangsystemet samt den tid (målt i minutter), det tager at gå fra en boligblok til en anden.

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	-	7	-	1
B	2	-	6	-	8	-
C	-	6	-	6	3	-
D	7	-	6	-	2	-
E	-	8	3	2	-	-
F	1	-	-	-	-	-

- Tegn en vægtet graf, der repræsenterer tabellen, hvor boligblokkene udgør hjørnerne, og gangstierne udgør kanterne med angivelse af gåtiden mellem blokkene.
- Udfyld en Dijkstra-tabel, og benyt denne til at bestemme den hurtigste gåroute i gangsystemet fra boligblok F til boligblok E .

Benyt eventuelt vedlagte bilag.

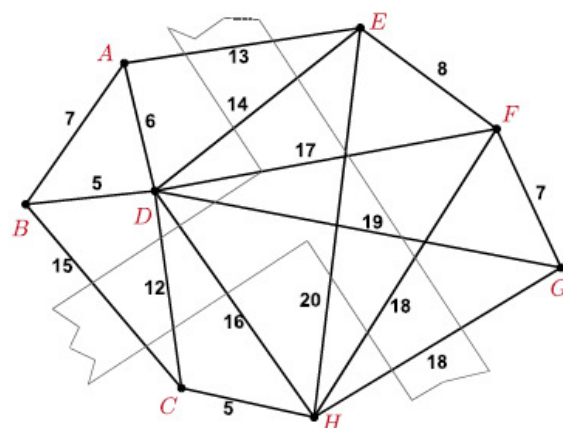
10B.D1.2 (2019-08, 5)



Foto: www.colourbox.dk

En fibernetudbyder har besluttet, at der skal lægges fibernet ud til alle husene i en landsby, der ligger omkring et T-kryds. Teknikerne er ude i landsbyen for at undersøge, hvorledes fibernettet når rundt til alle husene på den billigste måde.

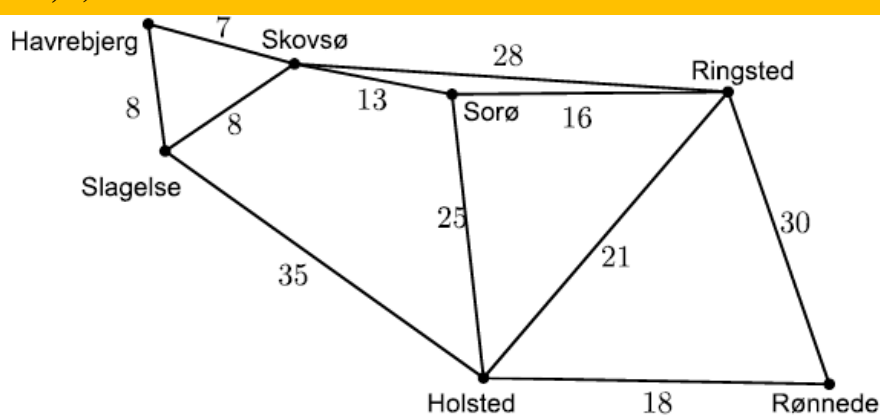
Resultatet af undersøgelsen ses på grafen på figuren, hvor alle husene i landsbyen udgør hjørnerne og er markeret med bogstaverne A til H . Kanternes vægte angiver prisen målt i tusinde kr. for fiberkablet mellem to huse.



- a) Bestem ved hjælp af Prims algoritme den laveste pris for at få lagt fibernet ud til alle husene i landsbyen

Benyt eventuelt det vedlagte bilag.

10B.D1.3 (2019-12, 8)



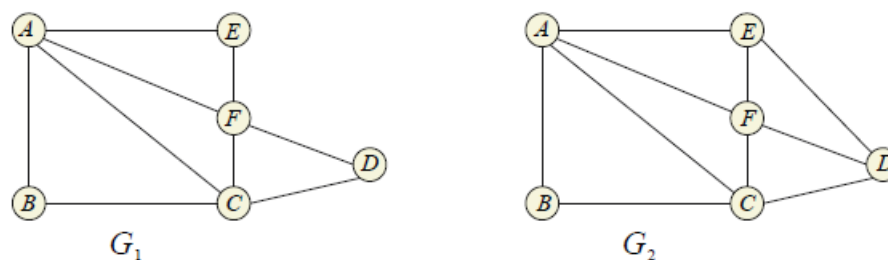
Grafen ovenfor angiver afstande (målt i km) mellem en række byer på Sjælland.

- a) Udfyld en Dijkstra-tabel, og benyt denne til at bestemme den korteste rute fra Havrebjerg til Rønnede. Benyt vedlagte bilag.

Delprøve 2:

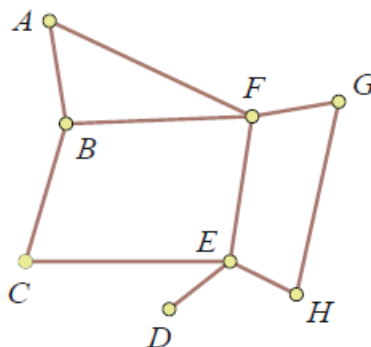
10B.D2.1 (2019-05, 12)

Figuren viser to grafer G_1 og G_2 .



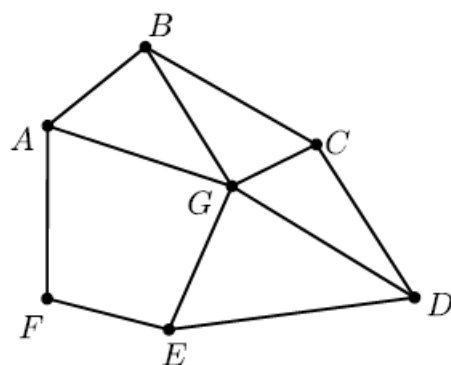
- Gør rede for, at G_1 er en Eulergraf.
- Bestem en Eulertur i G_2 .

10B.D2.2 (2019-05, 11)



Figuren viser en graf, der repræsenterer vejene og vejkrydsene i et rekreativt område. En løber ønsker at planlægge en løberute i området.

- Angiv graden af hvert af hjørnerne i grafen.
- Argumentér for, at løberen ikke kan planlægge en rute, der er en lukket Eulertur i området.
- Argumentér for, at en Eulertur i området enten starter i hjørne B eller slutter i hjørne B .
- Angiv et eksempel på en Eulertur i området.



Figuren ovenfor viser en graf.

- Afgør, om der kan laves en Eulertur i grafen.
- Angiv et udspændende træ i grafen. Begrund dit svar.

C. DIFFERENSLIGNINGER (2020):

Delprøve 1:

10C.D1.1 (2020-05, 5)



Udviklingen i beløbet på en bankkonto kan beskrives ved differensligningen

$$y_{n+1} = 1,10 \cdot y_n + 2000, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

hvor y_n betegner beløbet på bankkontoen (målt i kr.) til tidspunktet n (målt i år).

a) Bestem renten i procent, og angiv beløbet, der hvert år indsættes på kontoen.

På kontoen blev der indsat et startbeløb på 5000 kr.

b) Bestem beløbet på kontoen til tidspunktet $n = 1$.

10C.D1.2 (2021-05, 7)

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 3 \cdot y_n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Det oplyses, at $y_0 = 10$.

a) Bestem y_1 og y_2 .

b) Opskriv løsningen til differensligningen på lukket form.

10C.D1.3 (2020-06, 6)



Foto: www.colourbox.dk

I en model kan udviklingen i antal bakterier i en bestemt bakteriekoloni beskrives ved differensligningen

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 8, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

hvor y_n betegner antallet af bakterier i bakteriekolonien (målt i millioner) til tidspunktet n (målt i timer).

Til tidspunktet $n = 0$ er der 51 millioner bakterier.

- Benyt modellen til at bestemme antallet af bakterier til tidspunktet $n = 2$.
- Bestem et udtryk for y_n på lukket form.

10C.D1.4 (2020-08, 7)

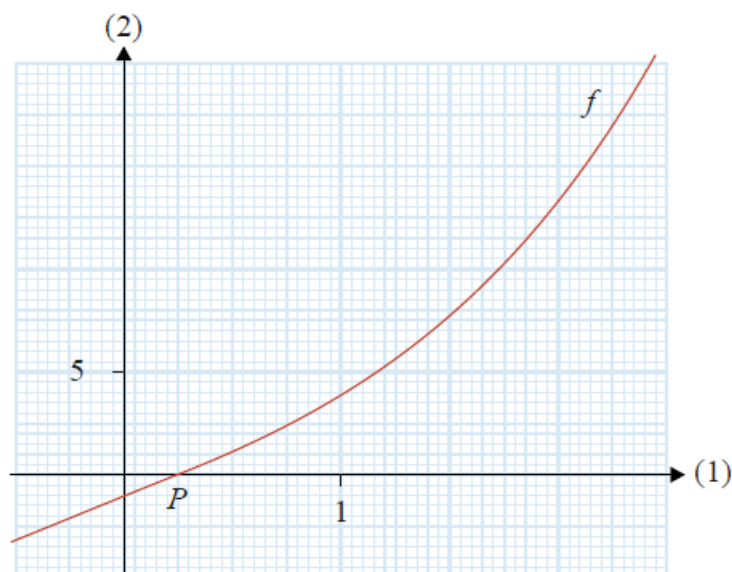
En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 3y_n - \frac{1}{2}y_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Tegn et cobwebdiagram for differensligningen. Benyt det vedlagte bilag.
- Bestem fikspunkterne for differensligningen, og ~~undersøg for hvert af fikspunkterne, om det er stabilt eller ustabil.~~ **gør rede for, at mindst et af fikspunkterne er frastødende.**

10C.D1.5 (2020-12, 6)

På figuren ses grafen for en differentiabel funktion f , der har et nulpunkt i P .



- a) Tegn på bilaget de to tangenter til bestemmelse af x_1 og x_2 i talfølgen hørende til Newton-Raphsons metode med startgættet $x_0 = 2$.

Det oplyses, at funktionen f er givet ved

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + 4x - 1.$$

- b) Beregn x_1 i talfølgen, der er løsning til differensligningen hørende til Newton-Raphsons metode, når $x_0 = 2$.

10C.D1.6 (2021-06, 3)

En andenordens differensligning er bestemt ved

$$y_{n+1} = 6 \cdot y_n + 2 \cdot y_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Det oplyses, at $y_1 = 5$ og $y_2 = 32$.

- a) Bestem y_0 .

10C.D1.7 (2021-08, 7)

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 1,5 \cdot y_n + 2.$$

Det oplyses, at $y_0 = 4$.

- a) Bestem y_1 og y_2 .

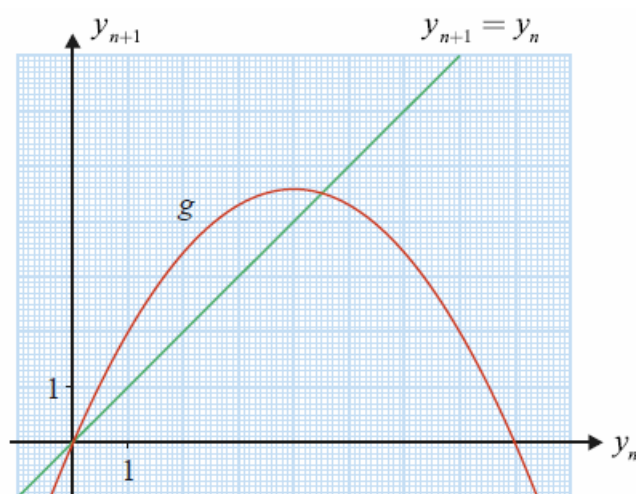
10C.D1.8 (2021-12, 6)

Figuren viser cobwebdiagrammet for differensligningen

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Det oplyses, at $y_0 = 7$.

- a) Bestem y_1 og y_2 ved hjælp af cobwebdiagrammet. Benyt bilaget som en del af besvarelsen.



Delprøve 2:

10C.D2.1 (2020-05, 12)

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n^2 + 2y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Vis, at $\tilde{y} = 2$ er et fikspunkt for differensligningen.
- b) Undersøg, om fikspunktet $\tilde{y} = 2$ er stabilt eller ustabilt.

10C.D2.2 (2020-06, 11)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \cos(x) + x - 3.$$

- a) Tegn grafen for f .
- b) Benyt Newton-Raphsons metode med udgangspunkt i begyndelsesværdien $x_0 = 5$ til at bestemme nulpunktet for f med 5 betydende cifre.

10C.D2.3 (2021-08, 16)

En andenordens differensligning er bestemt ved

$$y_{n+1} = 6 \cdot y_n - 9 \cdot y_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Det oplyses, at $y_0 = 5$ og $y_1 = 10$.

- a) Tegn et punktplot for udviklingen i y_n , når $n = 0, 1, 2, \dots, 10$.
- b) Opskriv løsningen til differensligningen på lukket form.

10C.D2.4 (2020-08, 12)

I en model kan udviklingen i et bestemt lands bruttonationalprodukt beskrives ved en løsning til differensligningen

$$y_{n+1} = 1,02 \cdot y_n - 0,01 \cdot y_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

hvor y_n betegner landets bruttonationalprodukt (målt i mia. kr.) til tidspunktet n (målt i antal år).

Det oplyses, at bruttonationalproduktet var 1000 mia. kr. til tidspunktet $n = 0$ og 1001 mia. kr. til tidspunktet $n = 1$.

- Benyt modellen til at tegne et punkplot over udviklingen i landets bruttonationalprodukt for $n = 0, 1, 2, \dots, 10$.
- Benyt modellen til at bestemme, hvor mange år der går, før landets bruttonationalprodukt overstiger 1080 mia. kr.

Kilde: R.J. Ball og E. Smolensky.

10C.D2.5 (2021-12, 12)



Billedkilde: Kviklån

Micky tager et forbrugslån i sin bank på $y_0 = 10000$ kr.

Hver termin betaler han 1300 kr. til banken. Udviklingen i restgælden på forbrugslånet kan beskrives ved differensligningen

$$y_{n+1} = 1,02 \cdot y_n - 1300, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

hvor y_n er restgælden i kr. efter n terminer.

- Tegn et punkplot for udviklingen i restgælden på forbrugslånet for $n = 0, 1, 2, \dots, 6$.
- Efter hvor mange terminer kommer restgælden y_n under 1300 kr.?

10C.D2.6 (2020-12, 14)



Foto: www.colourbox.dk

I en diskret model kan udviklingen i antallet af smittede i en bestemt population beskrives ved en løsning til differensligningen

$$y_{n+1} = y_n + 0,001 \cdot y_n \cdot (2000 - y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

hvor y_n betegner antallet af smittede i populationen til tidspunktet n (målt i måneder). Det oplyses, at der til tidspunktet $n = 0$ er 8 smittede i populationen.

- a) Benyt modellen til at bestemme antallet af smittede til tidspunktet $n = 10$.

I en kontinuert model kan differensligningen omskrives til en differentialligning på formen

$$y' = a \cdot y \cdot (M - y).$$

- b) Benyt den diskrete model til at bestemme a og M .
- c) Tegn i samme koordinatsystem løsningen til differentialligningen sammen med løsningen til differensligningen for de første 10 måneder.

10C.D2.7 (2021-05, 12)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + x - 5.$$

- a) Bestem de to næste elementer x_1 og x_2 i talfølgen, der er løsning til differensligningen hørende til Newton-Raphsons metode med startgættet $x_0 = 1$.
- b) Løs ligningen $f(x) = 0$, og sammenlign resultatet med x_2 i løsningen til differensligningen hørende til Newton Raphsons metode med startgæt $x_0 = 1$.

10C.D2.8 (2021-06, 11)

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

hvor $g(x) = \frac{4 \cdot x}{1 + 0,02 \cdot x}$.

Det oplyses, at $y_0 = 2$.

a) Bestem y_5 .

Det oplyses, at $\tilde{y} = 150$ er et fikspunkt for differensligningen.

b) Gør rede for, at fikspunktet er stabilt.

D. KEGLESNIT (2022):

Delprøve 1:

10D.D1.1 (2022-05, 4)

En parabel er givet ved ligningen

$$y^2 = 6 \cdot x.$$

- a) Vis, at punktet $P(6, -6)$ ligger på parabelen.
- b) Bestem en ligning for tangenten til parabelen i punktet P .

10D.D1.2 (2022-06, 8)

Der er givet en parabel med ligningen $y^2 = x$.

- a) Bestem brændpunkt og ledelinje for parabelen.
- b) Tegn parabelen i koordinatsystemet på vedlagte bilag.

10D.D1.3 (2022-07, 7)

En cirkel har ligningen

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 - 23 = 0.$$

- a) Omskriv denne ligning til den generelle andengradsligning i to variable.

10D.D1.3 (2022-08, 5)

Der er givet en parabel med ligningen

$$y^2 = 16x.$$

- a) Tegn parabelen. Brug bilaget.

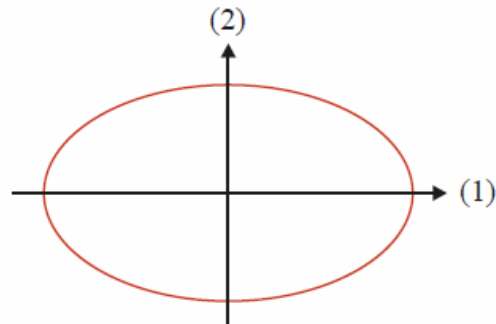
Delprøve 2:

10D.D2.1 (2022-05, 12)



Figur 1

Billedkilde: Living in harmony



Figur 2

Figur 1 viser et spisebord med en ellipseformet bordplade.

Figur 2 viser en model af bordpladen indlagt i et koordinatsystem med begyndelsespunkt i ellipsens centrum.

Bordpladen måler 180 cm på den lange led og 105 cm på den korte led.

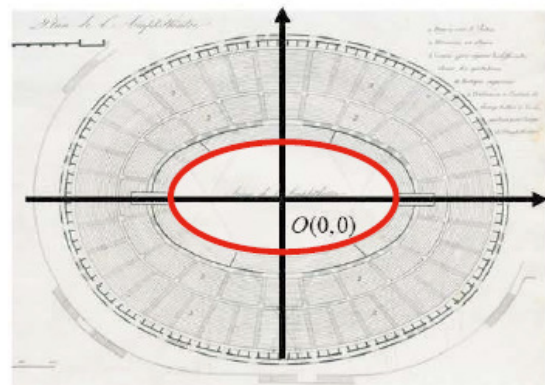
- Bestem ellipsens ligning på normalform.
- Bestem koordinatsættet til hvert af ellipsens brændpunkter.

10D.D2.2 (2022-06, 12)



Figur 1.

Billedkilde: Khanacademy



Figur 2.

Billedkilde: Antiqueprints

Fotoet på figur 1 viser det ældste bevarede romerske amfiteater, som ligger i Pompeji.

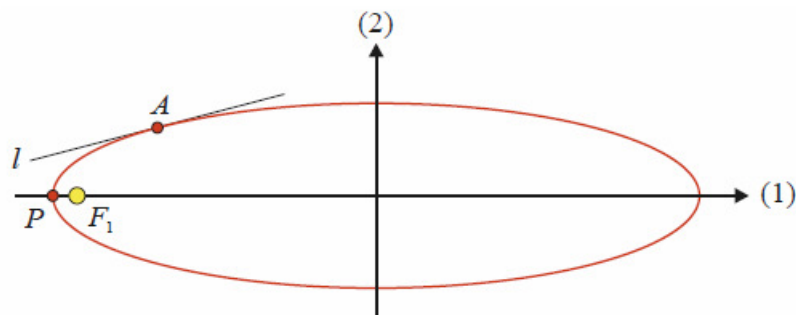
Figur 2 viser en model af amfiteatret. Randen på arenaen beskrives i modellen ved en ellipse med en storakse på 67 meter og en lilleakse på 34 meter.

I modellen antages ellipsen at have centrum i $(0, 0)$.

- Bestem en ligning for denne ellipse.
- Bestem arealet af Pompejis arena ifølge modellen.



Kometen Halley
Billedkilde: NASA



Kometen Halleys ellipseformede bane er indtegnet i et koordinatsystem.
Ellipsens centrum er $(0, 0)$.

Ellipsen på figuren viser en model af kometen Halleys bane om Solen.
Solen befinder sig i det ene brændpunkt F_1 . Ellipsens halvakser er 17.8 og 4.53.
Alle længdemål er angivet i AE (astronomiske enheder).

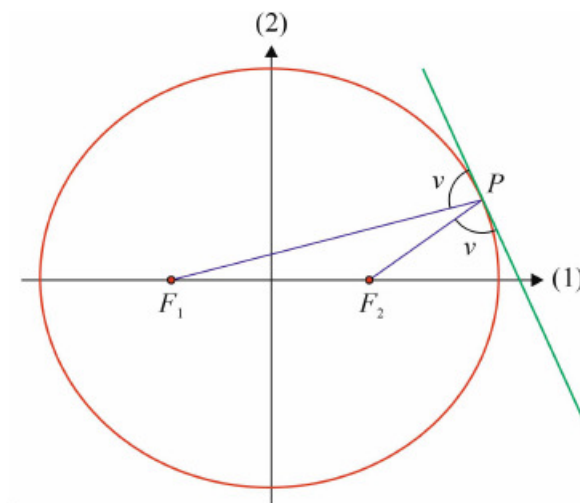
- a) Bestem en ligning for tangenten l til ellipsen i punktet $A(-14.24, 2.718)$.

I positionen P er kometen tættest på Solen. Se figuren.

- b) Bestem afstanden $|PF_1|$.



Figur 1



Figur 2

Loop, en form for Pool, spilles på et ellipseformet bord (se figur 1).

I en model er det grønne spilområde afgrænset af en ellipse med centrum i $(0, 0)$, se figur 2. Ellipsens storakse er 130 cm, og lilleaksen er 118 cm.

- a) Bestem en ligning på normalform for denne ellipse.

Punktet P på ellipsen har koordinaterne $\left(60, \frac{295}{13}\right)$.

- b) Bestem en ligning for tangenten til ellipsen i P .

En kugle afsendt fra brændpunktet F_1 reflekteres i tangenten til ellipsen i P og sendes tilbage til det andet brændpunkt F_2 , hvor der er et hul i bordet (se figur 2).

- c) Bestem den spidse vinkel v mellem tangenten og linjen gennem P og brændpunktet F_2 .

Billedkilde: homecrux.com