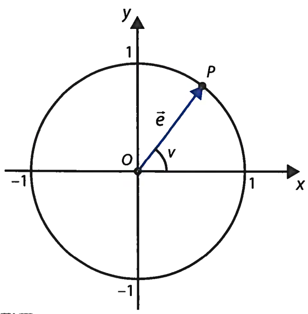
10. Vektorer og trigonometri

10.1 Polære koordinater og retningsvinkel

1 Introduktion

Ligesom en kompasnål viser en retning ved at dreje rundt i en cirkel, kan vi tale om en vektors retning i en cirkel.

Vi starter med at se på stedvektorer med længden 1.



2 Definition

En cirkel med centrum i origo $O(0,0)$ og radius 1 kaldes en **enhedscirkel**.

Vektoren $\vec{e} = \overrightarrow{OP}$ er tegnet fra centrum til periferien i enhedscirklen, så dens længde er 1.

En vektor med længden 1 kaldes en **enhedsvektor**.

Vinklen v, der dannes mellem førsteaksen og vektoren $\overrightarrow{OP}$, kaldes vektorens **retningsvinkel**. Som vi vender tilbage til, regnes vinkler som positive mod urets retning og negative med.

Punktet P kaldes et **retningspunkt** for vinklen v.

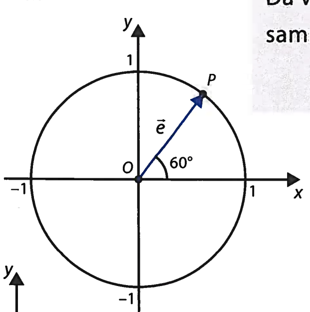
Koordinaterne til punktet P og til vektoren $\overrightarrow{OP}$ vil ændre sig, når vinklen v ændres. Vi vil nu indføre funktioner, som beregner x- og y-koordinaterne som funktion af vinklen v.

3 Definition

De to funktioner **cos(v) og sin(v) defineres som koordinaterne til vinklens retningspunkt**: $P(\cos(v), \sin(v))$.

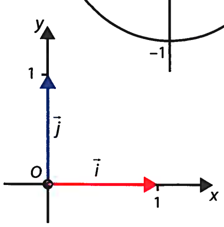
Da vektor $\overrightarrow{OP}$ er stedvektor til retningspunktet P for vinklen v, har enhedsvektoren $\overrightarrow{OP}$ samme koordinater som P:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$



4 Eksempel

Koordinaterne til retningspunktet for en vinkel på 60° er: $P(\cos(60), \sin(60))$.
Angivet med 2 decimaler: $P(0{,}50;0{,}87)$.
Stedvektoren $\vec{e} = \overrightarrow{OP}$ har samme koordinater som punktet P: $\vec{e} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}87 \end{pmatrix}$



5 Eksempel

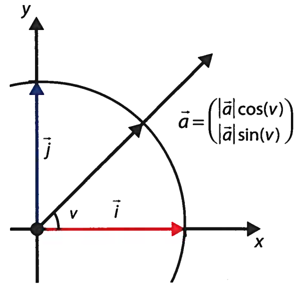
De to vektorer $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ har også længden 1.
De kaldes koordinatsystemets **basisvektorer**.

6 Polære koordinater

Alle vektorer kan beskrives ud fra deres længde og deres retningsvinkel.

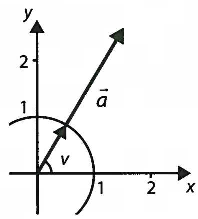
En vektor $\vec{a}$ danner vinklen v med førsteaksen. Hvis $\vec{a}$ har længden $|\vec{a}|$, skal vi blot gange enhedsvektorens koordinater med denne længde for at få koordinaterne til $\vec{a}$.

De **polære koordinater** til vektor $\vec{a}$ er dermed: $\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}|\cos(v) \\ |\vec{a}|\sin(v) \end{pmatrix}$



7 Eksempel

De polære koordinater til en vektor $\vec{a}$ med en retningsvinklen på 59°, og som har længden 3, er: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(59) \\ 3 \cdot \sin(59) \end{pmatrix}$



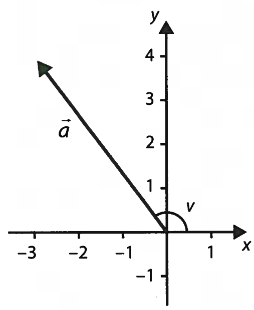
8 Eksempel

En vektor er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vi vil beregne dens retningsvinkel.

Vi udregner først længden af $\vec{a} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

Vi ved nu, at $\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}|\cos(v) \\ |\vec{a}|\sin(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(v) \\ 5\sin(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vi kan beregne retningsvinklen ud fra x-koordinatligningen: $5\cos(v) = -3$.
Først divideres med 5 på begge sider af lighedstegnet. Vi har da $\cos(v) = -\frac{3}{5}$.
Vi kan beregne dette tal i CAS med den indbyggede funktion $\cos^{-1}$.
Vi finder, at $v = \cos^{-1}(-\frac{3}{5}) = 126{,}87°$.



9 Øvelse

a. Beregn koordinaterne til retningspunkterne P_{30} og P_{135} for vinklerne 30° og 135°, angiv facit med 2 decimaler.

10 Øvelse

a. Beregn koordinaterne til enhedsvektoren $\vec{e_{45}}$ med retningsvinklen 45°, angiv facit med 2 decimaler.

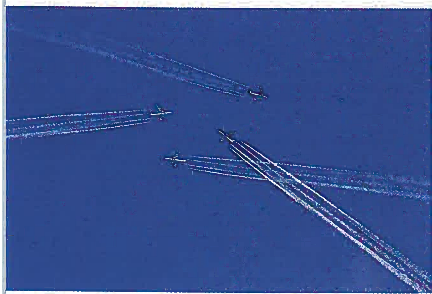
11 Øvelse

a. Opskriv de polære koordinater til den vektor $\vec{a}$, der har retningsvinklen 50° og længden 4.
b. Beregn de almindelige koordinater til $\vec{a}$.

12 Øvelse

En vektor er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

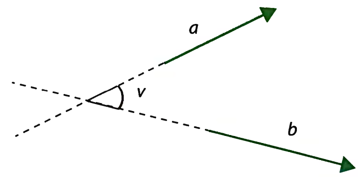
a. Beregn længden af vektor $\vec{a}$.
b. Beregn retningsvinklen til $\vec{a}$, angiv facit med 1 decimal.



10.2 Vinkler mellem to vektorer

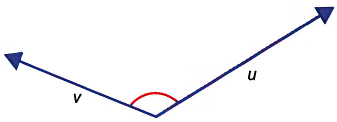
13 Eksempel

Flyenes varme udstødningsgasser danner iskrystaller, som hænger i luften og viser flyenes flyvevinkel i forhold til hinanden.



I dette afsnit skal vi se på vinklen mellem to vektorer. Tænkemåden minder en del om de spor, som flyene trækker efter sig på himlen.

Vi starter med at præcisere, hvordan vi skal forstå vinklen mellem to vektorer.



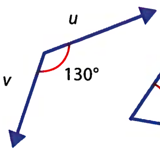
14 Definition

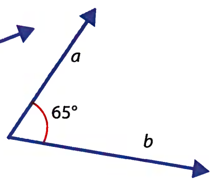
Vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$ skriver vi symbolsk på denne måde: $\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Vektorvinklen er altid den mindste af de to vinkler, som to vektorer danner, når de afsættes fra samme punkt.

$\angle(\vec{a},\vec{b})$ er større end eller lig med 0° og mindre end eller lig med 180°.

Nulvektoren, $\vec{o}$, danner ikke en vinkel med nogen vektor.





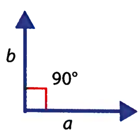
15 Eksempel

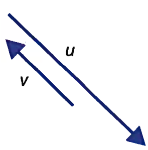
$\angle(\vec{a},\vec{b}) = 65°$ og $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 130°$.

16 Definition

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ siges at være **parallelle**, hvis der findes et tal k, så $\vec{b} = k\vec{a}$, vi skriver $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ siges at være **ortogonale**, hvis vinklen mellem dem er 90°, vi skriver $\vec{a} \perp \vec{b}$.





17 Eksempel

På tegningen ses vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale. Vektorerne $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle, og der vil derfor eksistere en konstant k, så $\vec{u} = k\vec{v}$. Da $\vec{u}$ er dobbelt så lang og modsat rettet $\vec{v}$, kan vi indse, at $k = -2$. Altså at $\vec{u} = -2\vec{v}$.

Der gælder en meget nyttig sætning om sammenhængen mellem to vektorers skalarprodukt og vinklen mellem dem. Det skal vi se nærmere på nu.

18 Sætning

Vinklen, v, mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$, er givet ved:

$$\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \quad \text{og dermed:} \quad v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right).$$

Sætningen bevises i afsnit 10.8.

19 Eksempel

Vi vil beregne vinklen v mellem vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Det gør vi ved at beregne skalarproduktet og længden af de to vektorer og indsætte alle tre størrelser i formlen i sætning 18. Her er det vigtigt at undgå afrundinger undervejs, da der skal regnes videre med tallene. For at undgå dette problem, kan man blot udregne det hele på en gang.

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\right) = 45°$$

I CAS kan vi udnytte de indbyggede kommandoer "dotp" og "norm" til beregning af henholdsvis skalarprodukt og længde.

Først defineres de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og vi skriver så :

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{dotp(\vec{a},\vec{b})}{norm(\vec{a})\cdot norm(\vec{b})}\right)$$

20 Sætning

Skalarproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lig med nul netop i de tilfælde, hvor vektorerne er ortogonale. Så hvis vektorerne er ortogonale, da er skalarproduktet lig med nul, og hvis skalarproduktet lig med nul, så er vektorerne ortogonale. Vi skriver:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ er ensbetydende med, at $v = 90°$.

21 Bevis for sætning 20

Vi tager udgangspunkt i ligningen fra sætning 18: $\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Hvis $v = 90°$, så er $\cos(v) = 0$, og dermed er venstre side lig med nul. Hvis højresiden skal give nul, må det være tælleren med skalarproduktet, der er lig med nul. Altså: hvis $v = 90°$, så er $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.
Omvendt, hvis $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, så er højresiden lig med nul. Og venstresiden, $\cos(v)$, er kun lig med nul for $v = 90°$, når v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Derfor: hvis $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, så er $v = 90°$. Dermed er beviset slut.

22 Øvelse

a. Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, og angiv svaret med 1 decimal.

23 Øvelse

a. Undersøg, om vektorerne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ er ortogonale.

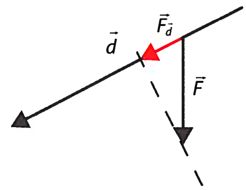
24 Øvelse

a. Undersøg, om vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ er ortogonale eller parallelle.

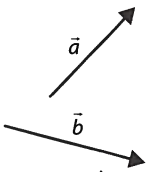
10.3 Projektion

25 Introduktion

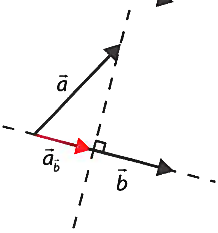
Hvis bremsen slippes, vil tyngdekraften sørge for, at gondolen på billedet vil bevæge sig nedad med stor hastighed. Hvis kablerne hang stejlere, ville det gå endnu hurtigere. Helt lodret ville tyngdekraften få fuld virkning, og gondolen ville være i frit fald.



Tegningen er en model over situationen med gondolen. Tyngdekraften er repræsenteret af vektor $\vec{F}$, og kørselsretningen af vektor $\vec{d}$. Den lille røde vektor $\vec{F_{\vec{d}}}$ er den del af tyngdekraften $\vec{F}$, der går i kørselsretningen $\vec{d}$.



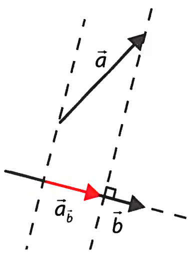
I afsnittet her skal vi se nærmere på, hvor stor en del af en vektors retning der kan overføres til en anden retning. Man kalder $\vec{F_{\vec{d}}}$ for projektionen af vektor $\vec{F}$ på vektor $\vec{d}$.



26 Definition

Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ findes ved at afsætte vektorerne ud fra samme punkt. Herefter projiceres $\vec{a}$'s endepunkt vinkelret ned på linjen, der går gennem $\vec{a}$.

Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ skrives $\vec{a}_{\vec{b}}$.

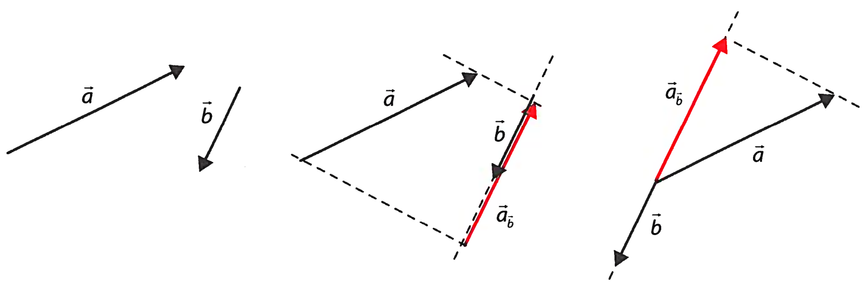


27 Eksempel

Projektionen $\vec{a}_{\vec{b}}$ kan også konstrueres ved at tegne parallelle linjer gennem $\vec{a}$'s begyndelses- og endepunkt vinkelret ned på linjen, der går gennem $\vec{b}$.

28 Eksempel

Her ses endnu et eksempel på geometrisk konstruktion af en projektion $\vec{a}_{\vec{b}}$ af en vektor $\vec{a}$ på en vektor $\vec{b}$ på de to måder. Begge måder giver naturligvis samme resultat.



Der findes en formel, hvormed man kan beregne koordinaterne til projektionsvektoren. Den skal vi se på her.

29 Sætning

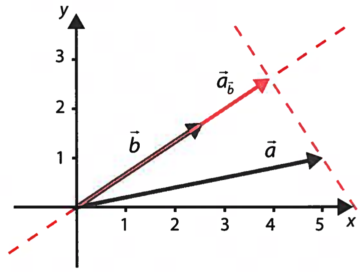
Koordinaterne til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er givet ved:

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

30 Eksempel

Vi beregner koordinaterne til $\vec{a}_{\vec{b}}$, hvor $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ved hjælp af sætning 29:

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right|^2}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \frac{15+2}{3^2+2^2}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \frac{17}{13}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{51}{13}\\\frac{34}{13}\end{pmatrix}$$



Længden af projektionsvektoren kan naturligvis beregnes med længdeformlen, når man først har fundet dens koordinater med ovenstående formel. Men der er en lettere måde, som fremgår af følgende sætning.

31 Sætning

Længden af projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er givet ved:

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

32 Eksempel

Vi beregner længden af projektionen af $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ på $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, hvis koordinater vi fandt ovenfor:

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|17|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{17}{\sqrt{13}} \approx 4,7$$

33 Øvelse

To vektorer er givet ved af $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ på $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

a. Tegn vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og konstruer projektionen $\vec{a}_{\vec{b}}$ på tegningen.

b. Bestem koordinaterne til $\vec{a}_{\vec{b}}$.

34 Øvelse

To vektorer er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ på $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

a. Tegn vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og konstruer projektionen $\vec{a}_{\vec{b}}$ på tegningen.

b. Bestem koordinaterne til $\vec{a}_{\vec{b}}$.

c. Bestem længden af $\vec{a}_{\vec{b}}$.

10.4 Determinant af et vektorpar

35 Introduktion

På billedet ses Gottfried Wilhelm Leibnitz 1646-1716, der opfandt determinant-begrebet og undersøgte og beskrev dets egenskaber. En af dets allervigtigste anvendelser er i løsninger af systemer af ligninger, hvoraf det enkleste er to ligninger med to ubekendte.

Vi har tidligere, i afsnit 5.6, set på, hvordan man ved hjælp af determinanter kan udregne arealer af parallelogrammer og trekanter udspændt af to vektorer.

Vi skal her se på nogle sætninger om determinanter og på, hvordan determinanter også kan bruges til bestemmelse af vektorers placering i forhold til hinanden.

I modsætning til skalarproduktet kan man ikke uden videre bytte rundt på rækkefølgen, når man tager determinanten til to vektorer. Hvis rækkefølgen ændres, skifter determinanten fortegn:

36 Sætning

Der gælder følgende regneregel for determinanten af et vektorpar $\vec{a}$ og $\vec{b}$:
$\det(\vec{a},\vec{b}) = -\det(\vec{b},\vec{a})$.

37 Bevis for sætning 36

Vi udregner determinanterne på hver side af lighedstegnet:
Venstre side: $\det(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_2 - a_2b_1$
Højre side: $-\det(\vec{b},\vec{a}) = -(b_1a_2 - b_2a_1) = -b_1a_2 + b_2a_1 = a_1b_2 - a_2b_1$
Vi får det samme resultat i begge udregninger og har dermed vist det, vi skulle.

En væsentlig egenskab ved determinanten er, at den kan bruges til at afgøre, om to vektorer er parallelle.

38 Sætning

$\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$ er ensbetydende med, at $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

39 Bevis for sætning 38

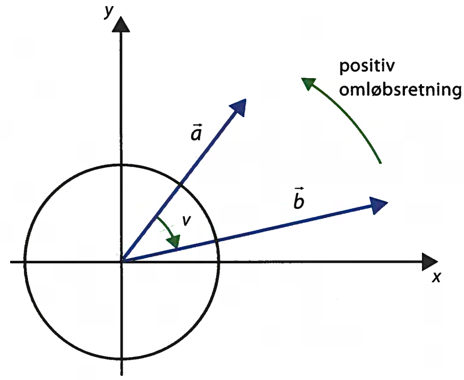
Determinanten er defineret ved $\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{\vec{a}}\cdot\vec{b}$. Derfor ved vi, ifølge sætning 20, at hvis determinanten er lig med nul, så er $\hat{\vec{a}}$ og vektor $\vec{b}$ ortogonale. Men i så fald er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.
Og omvendt, hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, så er $\hat{\vec{a}}$ og vektor $\vec{b}$ ortogonale, og i så fald er deres skalarprodukt lig med nul og dermed $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$. Hermed er beviset slut.

40 Eksempel

Vi vil afgøre, om vektorerne $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ parallelle og bestemmer determinanten af vektorparret:

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-3) - 1\cdot 6 = 6 - 6 = 0$$

Da $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$, er vektorerne ifølge sætning 38 parallelle.



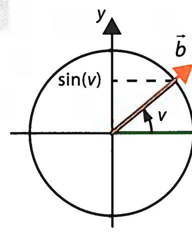
Determinanter kan også forbindes med vinkler, som det fremgår af nedenstående sætning.

Sætningen bevises senere ved at bruge **polære koordinater**, og derfor gælder sætningen kun, når vi regner med "orienterede" vinkler.
Dvs. at vinklen v i sætningen skal forstås som vinklen *fra a* til b og ikke *mellem* $\vec{a}$ og $\vec{b}$. På illustrationen er vinklen *fra* $\vec{a}$ til $\vec{b}$ altså negativ, fordi vi går *imod* den positive omløbsretning, for at komme fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.

41 Sætning

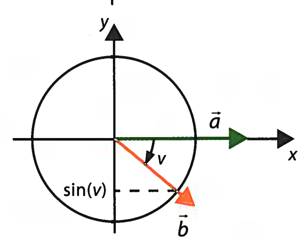
Når v betegner vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, kan **determinanten af vektorparret** skrives:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

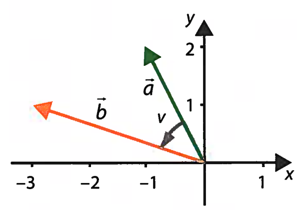


Determinantens fortegn fortæller dermed noget om, hvor $\vec{a}$ ligger i forhold til $\vec{b}$:
Hvis $\det(\vec{a},\vec{b})$ er negativ, skal man åbenbart gå *imod* omløbsretningen for at komme fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, når vektorerne afsættes med samme begyndelsespunkt.
Når vinklen v fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er negativ, bliver sinus til vinklen, $\sin(v)$, også negativ grundet den måde som $\sin(v)$ er defineret i forhold til enhedscirklen.

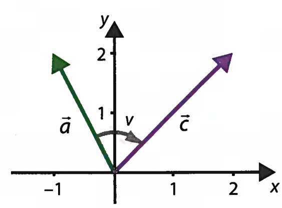
Vinklen v fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$	Sinus	Determinanten
$0° < v < 180$	$\sin(v) > 0$	$\det(\vec{a},\vec{b}) > 0$
$v = 0°$ eller $v = 180°$	$\sin(v) = 0$	$\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$
$-180° < v < 0°$	$\sin(v) < 0$	$\det(\vec{a},\vec{b}) < 0$



42 Eksempel



Lad der være givet tre vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Vi beregner determinanterne $\det(\vec{a},\vec{b}) = 7$ og $\det(\vec{a},\vec{c}) = -6$.
Da $\det(\vec{a},\vec{b})$ er positiv, er vinklen *fra* $\vec{a}$ *til* $\vec{b}$ også positiv.
Da $\det(\vec{a},\vec{c})$ er negativ, er vinklen *fra* $\vec{a}$ *til* $\vec{c}$ også negativ.



43 Øvelse

To vektorer er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

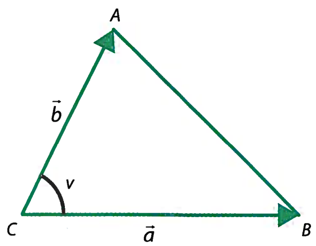
a. Udregn $\det(\vec{a},\vec{b})$, og gør rede for fortegnet af vinklen *fra* $\vec{a}$ *til* $\vec{b}$.

10.5 Arealer og sinusrelationer

44 Introduktion

På billedet ses sammenløbet af floderne Eufrat og Tigris i det sydlige Irak. I oldtidens Mesopotamien arbejdede matematikkyndige her med at konstruere kunstvanding, således at man kunne dyrke afgrøder. Arealberegning indgik i arbejdet, og formentligt stammer det at udtrykke størrelsen af en flade herfra.

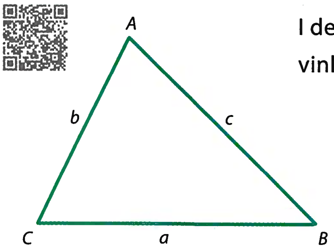
Vi har i kapitel 5 udregnet arealer af trekanter ved hjæp af determinanter, og vi skal her se på yderligere en måde at udregne arealet af en trekant på.



45 Sætning

Arealet af en trekant udspændt af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med vinklen v mellem sig, er: $T = \frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(v)$

Sætningen bevises i afsnit 10.10.



I den almindelige trigonometri, hvor vi ikke benytter vektorer, men blot længder og vinkler, gælder også en sætning om arealer af trekanter:

46 Sætning

For en vilkårlig trekant med figurens betegnelser, kan **arealet T beregnes** således: $T = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(A) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin(B) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(C)$

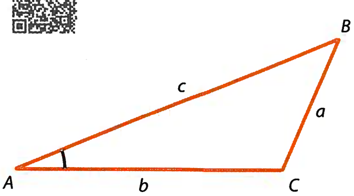
47 Bevis for sætning 46

Da vi kun er interesseret i trekantens vinkler og sidelængder, kan vi benytte de sædvanlige betegnelser for sidelængder i trekanter, hvor vi med småt betegner sidelængden med det samme bogstav som vinkelspidsen overfor.

Derved kan formlen i sætning 45 omskrives til: $T = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(C)$

Trekanten ved sætning 45 kan også betragtes som udspændt af vektorerne $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}$ eller $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{BA}$, og i så tilfælde var vi kommet frem til formlerne: $T = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin(B)$ og $T = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(C)$
Formlerne kan da sættes lig hinanden. Hermed er sætningen bevist.

48 Eksempel



I trekant ABC er $A = 22°$, $b = 4$ og $c = 5$. Vi vil beregne arealet.
De tre kendte størrelser svarer til dem, der indgår efter det sidste lighedstegn. Vi bruger altså formlen: $T = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(A)$
og får:

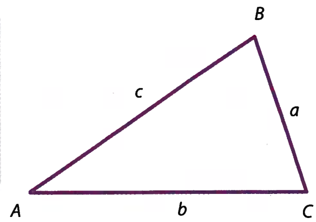
$$T = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\sin(22) = 3{,}75$$

Arealet af trekanten er altså 3,75.

Ud fra arealformlerne er det muligt at udlede nogle meget nyttige sammenhænge mellem sider og vinkler, man kalder sinusrelationerne.

49 Sætning

For en vilkårlig trekant med figurens betegnelser, gælder **sinusrelationerne**, der kan skrives således: (1) $\frac{\sin(A)}{a}=\frac{\sin(B)}{b}=\frac{\sin(C)}{c}$ eller således: (2) $\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}$



50 Bevis for sætning 49

Ved division med $\frac{1}{2}abc$ i ligningen i sætning 46, kommer vi frem til (1):

$\frac{\sin(A)}{a}=\frac{\sin(B)}{b}=\frac{\sin(C)}{c}$. Denne kan omformes til sætning 49 (2). Du kan se en forklaring ved at scanne QR-koden. Hermed er sætningen bevist.

51 Eksempel

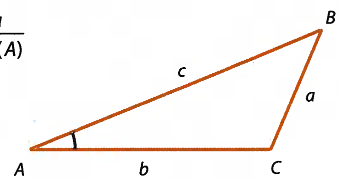
I trekant ABC er $A=19{,}9°$, $C=104{,}7°$ og $a=16{,}5$. Vi vil beregne længden af siden c.

Vi tager udgangspunkt i $\frac{a}{\sin(A)}=\frac{c}{\sin(C)}$, som vi omformer til $c=\sin(C)\cdot\frac{a}{\sin(A)}$

De oplyste størrelser indsættes, og vi får med 1 decimal:

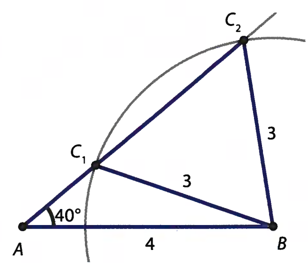
$$c=\sin(104{,}7)\cdot\frac{16{,}5}{\sin(19{,}9)}=46{,}9$$

Altså er længden af siden $c=46{,}9$.



52 Eksempel

Sinusrelationerne kan også bruges til at bestemme vinkler med.
Men her skal man passe på det såkaldte **dobbelttydige tilfælde**.
Af tegningen fremgår det, at der er to muligheder for beliggenheden af punktet C (her kaldet C_1 og C_2), der svarer til oplysningerne $A=40°$, $a=3$ og $c=4$.



53 Øvelse

I en trekant ABC er $B=70°$, $a=6$ og $c=7$.

a. Beregn arealet af trekanten med 1 decimal.

54 Øvelse

I en trekant ABC er $A=40°$, $B=85°$ og $a=6$.

a. Beregn længden af siden b, og angiv svaret med 1 decimal.

55 Øvelse

I en trekant ABC er $A=30°$, $a=3$ og $c=5$.

a. Konstruer de to trekanter, der opfylder betingelserne på samme måde som i eksempel 52.

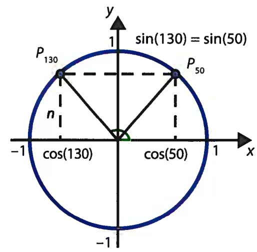
b. Bestem de to tilhørende vinkler C, og angiv svaret med 2 decimaler.

10.6 Cosinusrelationer

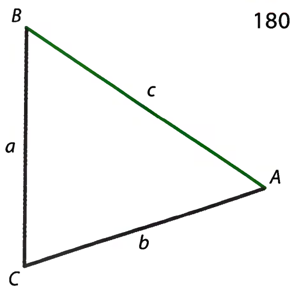
56 Introduktion

At kunne beregne vinkler er vigtigt i konstruktion, design og bygning. Her ses bygningen 8tallet fra Ørestaden i København.

Vi skal nu se på de såkaldte cosinusrelationer som, på samme måde som sinusrelationerne, kan bruges til at beregne sidelængder og vinkler i vilkårlige trekanter.



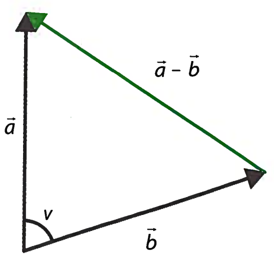
Når man skal beregne vinkler, er det smart at bruge cosinusrelationerne, hvis man kan. Vi kan se på enhedscirklen, at **cosinusfunktionen** i modsætning til sinusfunktionen giver **entydige *x*-værdier** for "trekantsvinklerne" imellem 0 og 180 grader".



57 Sætning

For en vilkårlig trekant med betegnelser som i figuren gælder **cosinusrelationerne**:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$



58 Bevis for sætning 57

Trekant *ABC* kan betragtes som værende udspændt af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Herved er den sidste side givet ved $\vec{a} - \vec{b}$.

Med reglen $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$, som vi beviser i næste afsnit, kan vi bestemme længden i anden af siden *c* (da $c = |\vec{a}-\vec{b}|$).

Først vil vi finde et smart udtryk for skalarproduktet $\vec{a}\cdot\vec{b}$ i sidste led. Vi tager udgangspunkt i sætning 18 fra afsnit 10.2:

$$\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Denne ligning multipliceres med nævneren på begge sider af lighedstegnet, hvorved vi får:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(v)$$

Vi har her et udtryk for skalarproduktet $\vec{a}\cdot\vec{b}$, og det indsætter vi nu i

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

hvorved vi får:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(v)$$

Vi skifter herefter betegnelserne tilbage til trekant ABC, hvor $|\vec{a}-\vec{b}|$ var siden c, og får da:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(v)$$

Vi har nu udledt en af de tre cosinusrelationer.

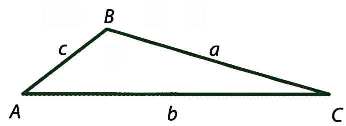
De to andre kan udledes ved at lade trekanten udspænde af enten vektorparrene $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}$ eller $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{BA}$, og derved kan vi på tilsvarende vis udlede de to andre cosinusrelationer.

Dermed har vi bevist cosinusrelationerne.

59 Eksempel

I trekant ABC er $A = 29°$, $b = 40$ og $c = 15{,}9$. Vi vil beregne længden af siden a.

$$a = \sqrt{40^2 + 15{,}9^2 - 2 \cdot 40 \cdot 15{,}9 \cdot \cos(29)} = 27{,}2083$$



Da oplysningerne blev givet med 1 decimal, afrunder vi også facit til 1 decimal. Altså er svaret, at $a = 27{,}2$.

60 Sætning

I **cosinusrelationerne** kan **vinklerne isoleres**. Så skrives de således:

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right), \quad B = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \text{ og } C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

61 Eksempel

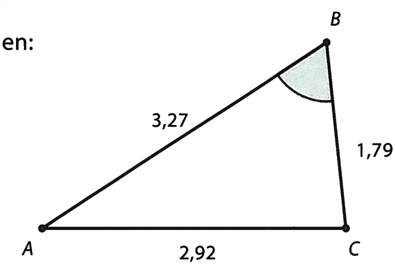
Vi vil beregne vinkel B i trekanten ABC. Vi bruger derfor cosinusrelationen:

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

og får de indsatte sidelængder:

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{1{,}79^2 + 3{,}27^2 - 2{,}92^2}{2 \cdot 1{,}79 \cdot 3{,}27}\right) = 62{,}69$$

Altså er $B = 62{,}69°$.



62 Øvelse

I trekant ABC er $B = 41°$, $a = 29{,}7$ og $c = 42{,}4$.

a. Tegn en skitse af trekant ABC.

b. Beregn længden af siden b.

63 Øvelse

I en trekant ABC er $a = 4$, $b = 6$ og $c = 5$.

a. Tegn en skitse af trekanten.

b. Beregn vinkel A, angiv svaret med 1 decimal.

c. Beregn de to resterende vinkler.

10.7 Ræsonnementer og beviser – skalarproduktet

64 Introduktion

I afsnittet her vil vi bevise nogle sætninger, der på forunderlig vis drager paralleller mellem vektorregning og talregning.
Endvidere danner disse sætninger grundlaget for de sætninger, der forbinder vinkler og vektorer, eksempelvis i sætningen om sammenhængen mellem skalarprodukt og cosinus til vinklen mellem vektorerne, som vi allerede har brugt flittigt.

Vi starter med at genopfriske fire regneregler for skalarproduktet fra kapitel 5.

[52 Sætning, fra kapitel 5]

Der gælder følgende regneregler for skalarprodukter:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c})$
3. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

I forlængelse af dem gælder yderligere to regneregler:

65 Sætning

For regning med skalarproduktet gælder to regneregler, som minder meget om kvadratsætninger for tal.

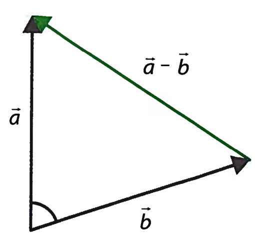
5. $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$
6. $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

66 Bevis for sætning 65.6

Vi skal vise, at $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

Sætningen bevises ved at udnytte tre af de andre regneregler fra sætning 52 fra kapitel 5.

Vi regner med koordinater og får:



$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$	Vi udnytter regel 4.
$= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$	Vi udnytter regel 2.
$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$	Vi udnytter regel 4 igen.
$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b}$	Vi rykker rundt på leddene, som nu bare er talstørrelser.
$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$	Vi udnytter regel 4 på de to første led.

Vi er kommet frem til det, vi skulle vise. Beviset er dermed slut.

Beviset, vi netop har afsluttet, danner grundlag for den næste sætning, som omhandler en nødvendig egenskab ved skalarproduktet, som vi stiltiende har brugt gennem en stor del af kapitlet.

67 Sætning

Skalarproduktet af to vektorer afhænger **kun** af vektorernes længder og de to vektorers beliggenhed i forhold til hinanden.

68 Bevis for sætning 67

Ovenfor beviste vi sætningen $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

I denne sætning isolerer vi nu skalarproduktet $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2$	Vi har lagt $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ til på begge sider af lighedstegnet.
$2\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2 - \lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2$	Vi har trukket $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2$ fra på begge sider af lighedstegnet.
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(\lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2 - \lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2)$	Vi har multipliceret begge sider af lighedstegnet med $\frac{1}{2}$.

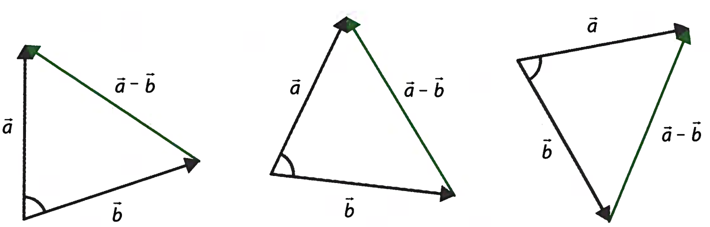
På højre side indgår kun længderne af $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$.

Da længden af $\vec{a}-\vec{b}$ altså kun afhænger af længderne af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ samt den indbyrdes beliggenhed af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ (dvs. vinklen mellem dem), og ikke af deres koordinater, er det samme gældende for skalarproduktet. Sætningen er hermed bevist.

Sætningen og beviset, som vi netop har færdiggjort, er tankevækkende, eftersom det nu er bevist, at skalarproduktet ikke afhænger af vektorernes koordinater. Selvom vi jo netop definerede skalarproduktet ud fra vektorens koordinater!

69 Eksempel

Skalarproduktet af disse vektorpar er ens.



70 Øvelse

a. Bevis sætning 65.5 ved at bruge samme metode som i beviset for 65.6.

71 Øvelse

a. Skriv alle sætninger, tegninger og beviser fra afsnittet ned på et stykke papir.
b. Marker eventuelt steder, hvor du er i tvivl om, hvordan ræsonnementet skal forstås, og formuler konkrete spørgsmål, hvis svar kan hjælpe dig.

10.8 Ræsonnementer og beviser – vinkler mellem vektorer

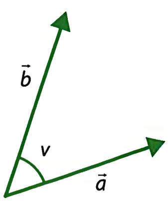
72 Introduktion

Vi skal i afsnittet her gå i dybden med ræsonnementerne bag skalarproduktets egenskaber i relation til vinklen mellem vektorer.

Sætningen $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ er meget vigtig i vektorregningen og geometrien. Vi vil derfor bevise dens gyldighed og se nærmere på nogle af de smarte egenskaber, man kan udlede fra den.

[18 Sætning]

Vinklen, v, mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$ er givet ved: $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

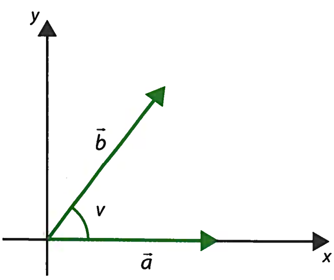


73 Bevis for sætning 18

Vi ved fra beviserne i forrige afsnit, at skalarproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kun afhænger af deres længde og indbyrdes placering. To givne vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan derfor drejes samlet (mens vinklen mellem dem forbliver den samme) og afsættes således, at $\vec{a}$ bliver ensrettet med x-aksen.

Koordinaterne til $\vec{a}$ bliver derved: $\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vektor $\vec{b}$ danner vinklen v med vektor $\vec{a}$ og dermed med førsteaksen.



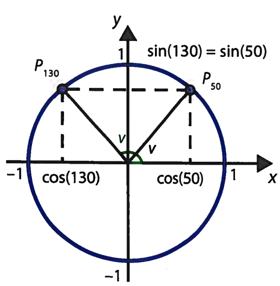
Ved hjælp af polære koordinater kan koordinaterne for vektor $\vec{b}$ nu skrives:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{b}|\cos(v) \\ |\vec{b}|\sin(v) \end{pmatrix}$$

Vi udregner nu $\vec{a} \cdot \vec{b}$ med de beskrevne koordinater:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\vec{b}|\cos(v) \\ |\vec{b}|\sin(v) \end{pmatrix} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos(v) + 0 \cdot |\vec{b}|\sin(v) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos(v)$$

Vi ser altså, at $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos(v)$, hvilket kan omformes til $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, og det var, hvad vi skulle vise. Beviset er dermed slut.



Vinkler mellem vektorer er altid større end eller lig med 0° og mindre end eller lig med 180°.

For disse vinkler kan vi se på enhedscirklen, at cosinusfunktionen, som vi aflæser på x-aksen, giver entydige værdier.

74 Sætning

Der gælder følgende sammenhæng mellem prikproduktets fortegn og vinklen, v, mellem to vektorer:

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ er ensbetydende med, at $0 \leq v < 90°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ er ensbetydende med, at $v = 90°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ er ensbetydende med, at $90° < v \leq 180°$

75 Bevis for sætning 74

Vi så ovenfor, at $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(v)$, og da $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ er et positivt tal, har $\cos(v)$ samme fortegn som $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Da $\cos(v)$ er førstekoordinaten til retningspunktet for v på enhedscirklen, gælder at:
$\cos(v)$ er positiv for $0 \leq v < 90°$, og her er skalarproduktet derfor også positivt.
$\cos(v)$ er negativ for $90° < v \leq 180°$, og her er skalarproduktet derfor også negativt.
$\cos(90) = 0$, og her er skalarproduktet derfor også lig med 0.

Da $\cos(v)$ er entydigt bestemt mellem 0 og 180 grader, kan vi også ræsonnere den anden vej:

Hvis skalarproduktet er positivt, er $\cos(v)$ positiv, og derfor gælder om v: $0 \leq v < 90°$.
Hvis skalarproduktet er negativt, er $\cos(v)$ negativ, og derfor gælder der om v:
$90° < v \leq 180°$
Hvis skalarproduktet er lig med nul, er $\cos(v) = 0$, og vinklen er derfor 90°.

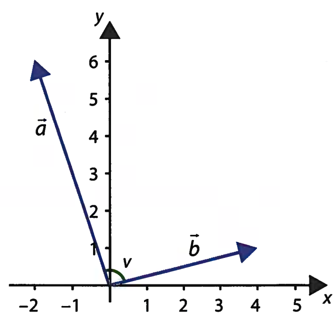
Hermed er sætningen bevist.

76 Eksempel

To vektorer er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = -8 + 6 = -2$ og altså negativt, konkluderer vi ud fra sætning 74, at vinklen mellem vektorerne er stump.

Som det måske fremgår af tegningen af de to vektorer, er det ikke altid helt let at afgøre med det blotte øje, om vektorerne er ortogonale.



77 Øvelse

a. Skriv alle sætninger, tegninger og beviser fra afsnittet ned på et stykke papir.
b. Marker eventuelt steder, hvor du er i tvivl om, hvordan ræsonnementet skal forstås, og formuler konkrete spørgsmål, hvis svar kan hjælpe dig.

10.9 Ræsonnementer og beviser – projektion og arealformler

78 Introduktion

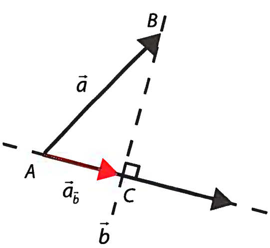
Vektorregningen er et godt eksempel på den måde, som matematisk teori bygges op på. Først indføres nogle objekter og en række regler ved hjælp af definitioner og tilhørende forklaringer. Herefter kan man ræsonnere sig frem til forskellige sammenhænge, som kan ses i sætninger og beviser.
I 1.g udelades nogle af beviserne, eller vi udskyder måske beviser, til man har vænnet sig til at bruge sætningen.

I afsnittet her skal vi bevise en række af de sætninger, vi har anvendt uden at bevise dem. Allerede i afsnit 3 og 4 og indirekte i afsnit 5 har vi anvendt de sætninger, som vi skal bevise rigtigheden af her.

[29 Sætning]
Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er givet ved:

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

79 Bevis for sætning 29



Med figurens betegnelser har vi $\vec{a} = \vec{a}_{\vec{b}} + \overrightarrow{CB}$.

Og da $\vec{a}_{\vec{b}}$ er parallel med $\vec{b}$, gælder: $\vec{a}_{\vec{b}} = k \cdot \vec{b}$ (*)

Dette indsættes ovenfor, så vi nu har: $\vec{a} = k \cdot \vec{b} + \overrightarrow{CB}$

Vi udregner nu:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(k \cdot \vec{b} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{CB} \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} + 0 = k \cdot |\vec{b}|^2$$

Da $\overrightarrow{CB}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, er deres skalarprodukt nul, og en vektor prikket med sig selv giver dens længde i anden).
Nu har vi derfor $\vec{a} \cdot \vec{b} = k \cdot |\vec{b}|^2$ og i denne ligning isoleres k, og vi finder at

$$k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

Dette udtryk for k indsættes i (*), hvorved vi får $\vec{a}_{\vec{b}} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$
- hvilket var det, vi skulle vise. Beviset er slut.

[31 Sætning]
Længden af projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er givet ved:

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

80 Bevis for sætning 31

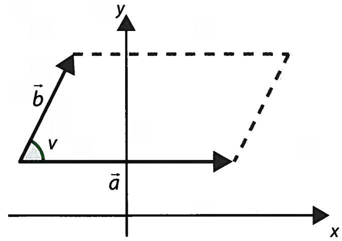
Vi omskriver udtrykket for længden af $\vec{a}_{\vec{b}}$ og forkorter til sidst med $|\vec{b}|$:

$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}\right| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|^2}\cdot|\vec{b}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$. Dette var hvad vi skulle vise. Beviset er slut.

[65 Sætning, kapitel 5]

(1) Arealet A af det parallelogram, vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder, er lig med den numeriske værdi af determinanten af vektorparret: $A = |\det(\vec{a},\vec{b})|$.

(2) Arealet T af den trekant, vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder, er lig med $\frac{1}{2}$ gange den numeriske værdi af determinanten af vektorparret $T = \frac{1}{2}|\det(\vec{a},\vec{b})|$.



81 Bevis for sætning 65, kapitel 5

På illustrationen ses et parallelogram udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Arealet af et parallelogram findes ved: højde gange grundlinje.

Grundlinjen er i vores tilfælde længden af $\vec{a}$, altså $|\vec{a}|$.

Højden i parallelogrammet er højden af $\vec{b}$ projiceret ind på $\vec{a}$'s tværvektor, dvs.

$h = |\vec{b}_{\hat{a}}|$.

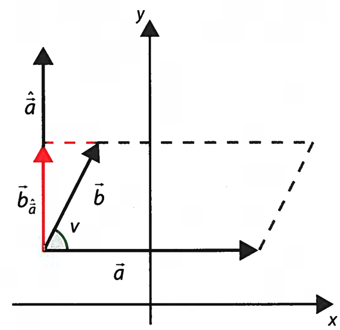
Arealet er højde gange grundlinje, hvilket altså med de indførte størrelser er:

$A = |\vec{b}_{\hat{a}}|\cdot|\vec{a}|$

Vi finder nu et udtryk for $|\vec{b}_{\hat{a}}|$ ved hjælp af sætning 31:

$|\vec{b}_{\hat{a}}| = \frac{|\vec{b}\cdot\hat{\vec{a}}|}{|\hat{\vec{a}}|}$ som vi omformer til

$|\vec{b}\cdot\hat{\vec{a}}| = |\vec{b}_{\hat{a}}|\cdot|\hat{\vec{a}}| = |\vec{b}_{\hat{a}}|\cdot|\vec{a}|$.



I denne ligning er venstre side lig med den numeriske værdi af determinanten $|\det(\vec{a},\vec{b})|$, og højre side er lig arealet af parallelogrammet. Hermed er første del af sætningen bevist.

Diagonalen deler parallelogrammet i to lige store trekanter. Derfor er arealet af den trekant, som $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder, det halve af parallelogrammets og dermed lig med det halve af den numeriske værdi af determinanten af vektorparret $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Hermed er beviset slut.

82 Øvelse

a. Skriv alle sætninger, tegninger og beviser fra afsnittet ned på et stykke papir.

b. Marker eventuelt steder, hvor du er i tvivl om, hvordan ræsonnementet skal forstås, og formuler konkrete spørgsmål, hvis svar kan hjælpe dig.

10.10 Ræsonnementer og beviser – determinanter og vinkler

83 Introduktion

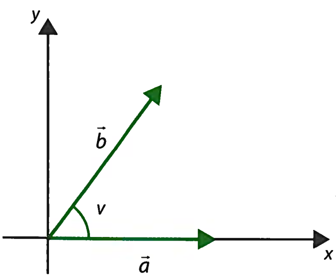
Her skal vi se på beviserne til sætningerne, hvor sinusfunktionen indgår.
Det gælder specielt sætningen om determinanter og vinkler:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(v).$$

Sætningen er bl.a. vigtig, fordi den er nøglen til at forbinde vektorregningen med arealformlerne og sinusrelationerne.

Som det vil fremgå i det følgende, kommer vi frem til sætningen ved hjælp af at anvende polære koordinater, og her opstår den problemstilling, at de polære koordinater er givet i et orienteret koordinatsystem, hvor vinkler regnes *positive* den ene vej (typisk vælges mod uret som den positive retning), og *negative* den anden vej rundt.

[41 Sætning]
$\det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(v)$, hvor v er vinklen fra vektor $\vec{a}$ til $\vec{b}$.



84 Bevis for sætning 41

Ifølge definitionen på determinant er: $\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{\vec{a}}\cdot\vec{b}$.
Vi ved fra tidligere, at skalarproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kun afhænger af deres længde og indbyrdes placering. To givne vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan derfor drejes sammen og afsættes således, at $\vec{a}$ bliver ensrettet med x-aksen.

Koordinaterne til $\vec{a}$ bliver derved: $\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vektor $\vec{b}$ danner vinklen v med vektor $\vec{a}$ og dermed førsteaksen.
Ved hjælp af polære koordinater kan koordinaterne for vektor $\vec{b}$ nu skrives:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{b}|\cos(v) \\ |\vec{b}|\sin(v) \end{pmatrix}.$$

Vektor $\hat{\vec{a}}$ får de polære koordinater $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\vec{a}| \end{pmatrix}$.

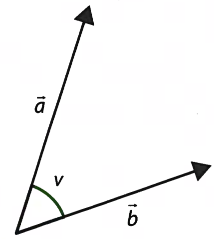
Vi udregner nu $\hat{\vec{a}}\cdot\vec{b}$ med de beskrevne koordinater:

$$\hat{\vec{a}}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\vec{a}| \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} |\vec{b}|\cos(v) \\ |\vec{b}|\sin(v) \end{pmatrix} = 0 + |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(v)$$

Vi ser altså, at $\det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(v)$, hvilket var det, vi skulle vise.
Beviset er dermed slut.

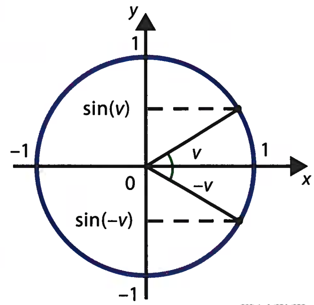
Formlen i sætning 41 bruges dels til at afgøre beliggenheden af vektorerne (idet vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ følger fortegnet af determinanten) og dels til at beregne arealer med.

Når vi regner med arealer, opererer vi naturligvis kun med positive talstørrelser, og vi skal her se nærmere på, hvordan vi kan sikre dette, når formlen i sætning 41 opererer med orienterede vinkler, der kan være negative.



Forskellen på en orienteret vinkel *fra* den ene vektor *til* den anden vektor, og vinklen *mellem* de to vektorer, ligger kun i fortegnet. Den numeriske værdi af vinklerne er ens.

Sammenhængen mellem fortegn og cosinus og sinus er det, de såkaldte overgangsformler handler om. Man viser deres rigtighed ud fra enhedscirklen.



85 Overgangsformler
$\cos(-v) = \cos(v)$
$\sin(-v) = -\sin(v)$

Scannes QR-koden, forklares ræsonnementet bag overgangsformlen $\sin(-v) = -\sin(v)$.

Når vi bruger v i betydningen vinklen "mellem" to vektorer, så vil den altid være mellem 0° og 180°, og sinusfunktionen giver altid et positivt tal for vinkler mellem 0° og 180°.

Alle de ovenstående ræsonnementer fører til, at vi kan beregne arealet af den trekant, som vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder med følgende sætning.

86 Sætning
$T = \frac{1}{2}\det(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$, hvor v er vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

87 Øvelse

a. Tegn en enhedscirkel, og argumenter for, at $\cos(-v) = \cos(v)$.

88 Øvelse

a. Skriv alle sætninger, tegninger og beviser fra afsnittet ned på et stykke papir.
b. Marker eventuelt steder hvor du er i tvivl om, hvordan ræsonnementet skal forstås, og formuler konkrete spørgsmål, hvis svar kan hjælpe dig.