11. Analytisk geometri

11.1 Normalvektor og linjens ligning

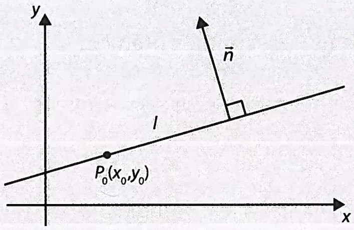
1 Introduktion

Analytisk geometri blev grundlagt af René Descartes i første halvdel af 1600-tallet. Grundtanken bag var en revolutionerende idé om at kombinere algebra og geometri: At bruge beregninger med koordinater til at studere geometriske figurer som fx linjer og cirkler.
Vektorregningen fra *Kernestof 1* viser sig at være et meget nyttigt værktøj i den analytiske geometri.

2 Sætning

Linjen l, som går gennem punktet $P_0(x_0,y_0)$, og som er ortogonal med en vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, er beskrevet ved ligningen

$$l\colon a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$



Vektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ kaldes en **normalvektor til linjen**.

3 Eksempel

Linjen med normalvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, som går gennem punktet $P_0(3,-4)$, har ligningen:

$$\begin{aligned}2(x-3)+5(y-(-4))&=0\\2(x-3)+5(y+4)&=0\\2x-2\cdot 3+5y+5\cdot 4&=0\\2x-6+5y+20&=0\\2x+5y+14&=0.\end{aligned}$$

4 Bemærkning

Ligningen $a\cdot x+b\cdot y+c=0$ beskriver en ret linje med normalvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

5 Eksempel

Linjen givet ved ligningen $-3x+y-19=0$ har $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ som en normalvektor.

6 Eksempel

Punktet $(-5,4)$ ligger på linjen med ligningen $-3x+y-19=0$, fordi koordinaterne gør ligningen sand:

$$\begin{aligned}-3x+y-19&=0\\-3(-5)+4-19&=0\\15+4-19&=0\\0&=0\end{aligned}$$

7 Eksempel

Vi vil gerne finde hældningskoefficienten for den rette linje l givet ved ligningen l: $2x + 5y + 14 = 0$. Det gør vi ved at isolere y:

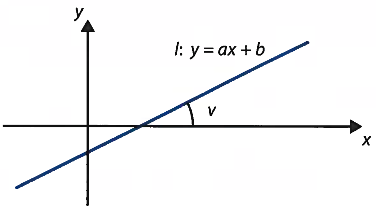
$$5y = -2x - 14$$
$$y = \frac{-2x - 14}{5}$$
$$y = \frac{-2}{5}x - \frac{14}{5}$$
$$y = -0{,}4x - 2{,}8$$

Hældningskoefficienten er altså $-0{,}4$.

8 Sætning

En linjes **hældningsvinkel**, v, er vinklen fra førsteaksen til linjen regnet med fortegn. Om hældningsvinklen v og hældningskoefficienten a gælder, at

$$a = \tan(v) \quad \text{og} \quad v = \tan^{-1}(a)$$



9 Eksempel

Linjen med ligningen m: $y = 2x - 3$ har hældningsvinklen $v = \tan^{-1}(2) = 63{,}4°$.
Linjen med ligningen n: $y = -0{,}3x + 1$ har hældningsvinklen $v = \tan^{-1}(-0{,}3) = -16{,}7°$.

10 Eksempel

Linjen l med hældningsvinkel $v = 32°$ har hældningskoefficienten $a = \tan(32°) = 0{,}62$.
Linjen q med hældningsvinkel $v = -85°$ har hældningskoefficienten $a = \tan(-85°) = -11{,}4$.

11 Øvelse

a. Opskriv ligningen for en ret linje l, der går gennem punktet $P_0(2,4)$, og som har normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
b. Omskriv ligningen fra opgave a) til formen $y = a \cdot x + b$, og angiv hældningskoefficienten.
c. Beregn linjens hældningsvinkel.

12 Øvelse

a. En linje er givet ved ligningen $8x - 2y + 3 = 0$. Angiv en normalvektor til linjen.

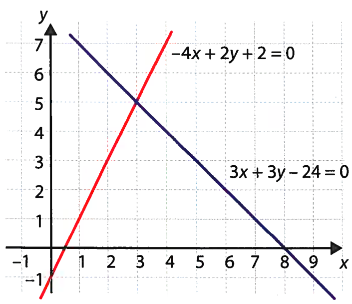
11.2 Skæring mellem linjer

13 Introduktion

Øresundsbroen er en såkaldt skråstagsbro. Vejbanen hænger i kabler, som er direkte forbundet til de lodrette pyloner. Kablerne og vejbanen kan beskrives som rette linjer. Kablerne er fastgjort der, hvor linjerne skærer hinanden.

14 Skæringspunkt mellem to linjer

To linjer, der ikke er parallelle, vil altid have et skæringspunkt. Skæringspunktets koordinater kan findes ved at løse de to linjers ligninger som to ligninger med to ubekendte. Skæringspunktet kan også findes ved aflæsning med CAS.



15 Eksempel

Vi vil finde skæringspunktet mellem linjerne l og m givet ved ligningerne

l: $-4x + 2y + 2 = 0$ og m: $3x + 3y - 24 = 0$.

Først isoleres y i ligningen for l:

$$2y = 4x - 2$$
$$y = 2x - 1$$

Vi kan nu indsætte $y = 2x - 1$ på y's plads i ligningen for m. Derved får vi en ligning med kun x som ubekendt.

$$3x + 3(2x - 1) - 24 = 0$$
$$3x + 6x - 3 - 24 = 0$$
$$9x - 27 = 0$$
$$9x = 27$$
$$x = 3$$

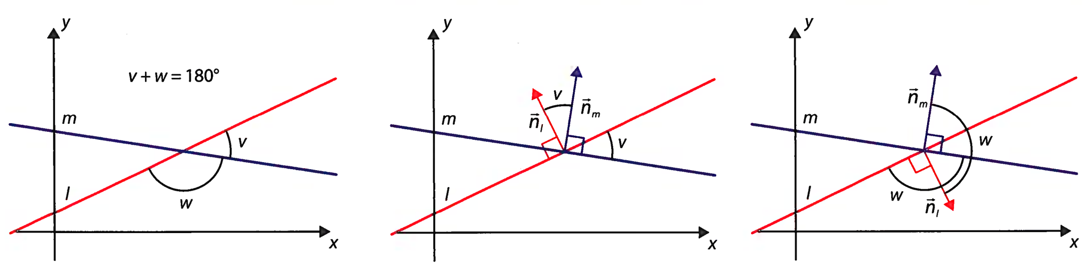
For at finde den tilhørende y-værdi, indsættes $x = 3$ i $y = 2x - 1$:

$$y = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

Konklusion: De to linjer skærer hinanden i punktet (3,5).

16 Vinklen mellem to linjer

Vinklen mellem to linjer kan findes ud fra vinklen mellem deres normalvektorer. Hvis normalvektorerne ligger på "samme side" af linjerne, fås den spidse vinkel v. Hvis normalvektorerne ligger på "hver sin side" af linjerne, fås den stumpe vinkel w.



17 Eksempel

Vi vil finde den spidse vinkel mellem linjerne l: $x + 2y - 11 = 0$ og m: $-2x - 5y + 17 = 0$. Vi kan aflæse normalvektorer for de to linjer direkte fra ligningerne: $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{n}_m = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ved brug af formlen for vinklen mellem vektorer får vi:

$$\cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_l \cdot \vec{n}_m}{|\vec{n}_l| \cdot |\vec{n}_m|}\right) = 175{,}236°.$$

Vi har fundet den stumpe vinkel. Den spidse vinkel kan nu beregnes som

$$v = 180° - 175{,}236° = 4{,}764° \approx 4{,}8°.$$

Den spidse vinkel mellem linjerne er 4,8°.

Vinklen v mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan findes med formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

18 Sætning

To rette linjer givet ved ligningerne l: $y = ax + b$ og m: $y = cx + d$ er ortogonale, hvis og kun hvis $a \cdot c = -1$.

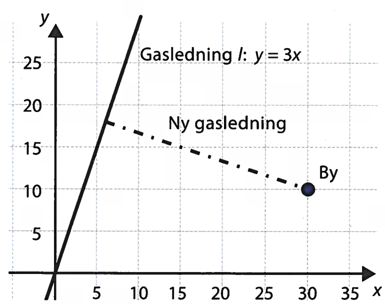
Når skæringsvinklen mellem to linjer er 90°, siger vi at linjerne er **ortogonale**.

19 Eksempel

Et forsyningsfirma skal levere gas til en by. De har allerede en gasledning som passerer tæt på byen. De indlægger et koordinatsystem på kortet over byen og omegnen. Enhederne på både x- og y- koordinaterne er kilometer. Deres oprindelige gasledning kan beskrives med linjen l: $y = 3x$ og byen ligger i punktet (30,10). For at den nye gasledning bliver så kort som mulig, skal den gå vinkelret på den gamle gasledning. Vi kalder linjen der beskriver den nye gasledning for m: $y = ax + b$. De to linjer er ortogonale, så $3 \cdot a = -1$. Når vi isolerer a får vi $a = \frac{-1}{3}$. Ledningen skal gå gennem punktet (30,10), så ligningen bliver

$$y = \frac{-1}{3} \cdot (x - 30) + 10 = \frac{-1}{3}x + \frac{30}{3} + 10 = \frac{-1}{3}x + 20.$$

Den nye gasledning kan altså beskrives med linjen m: $y = \frac{-1}{3}x + 20$.
For at finde ud af, hvor den nye ledning skal tilkobles den gamle, findes de to linjers skæringspunkt. Det giver (6,18).



20 Øvelse

Betragt linjerne med ligningerne $-3x + y + 16 = 0$ og $6x - 3y - 30 = 0$.

a. Find linjernes skæringspunkt ved at løse to ligninger med to ubekendte.
b. Tegn, med CAS, linjerne i samme koordinatsystem, og find skæringspunktet med skæringsværktøjet i dit CAS-program.
c. Beregn vinklen mellem linjerne med metoden vist i eksemplerne ovenfor.

21 Øvelse

Betragt linjen med ligningen l: $y = 5x - 2$. Punktet (2,8) ligger på linjen.

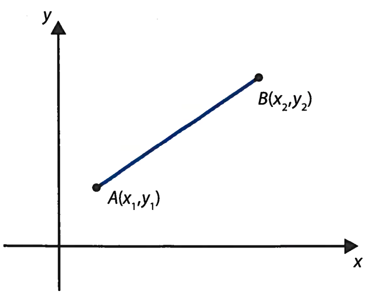
a. Bestem ligningen for en linje m, der er ortogonal på l, og som går gennem punktet (2,8).

11.3 Afstande

22 Introduktion

I forrige afsnit så vi et eksempel, hvor et forsyningsfirma skulle konstruere en ny gasledning. Her fandt vi en ligning for den linje, som ledningen følger. Men hvor lang skal den nye ledning være? Hvor lang er den korteste afstand fra byen og til den oprindelige gasledning?

I dette afsnit skal vi se på, hvordan man beregner afstande ved hjælp af koordinatgeometri. Vi skal se på afstanden mellem to punkter og på afstanden fra et punkt til en linje.



23 Sætning

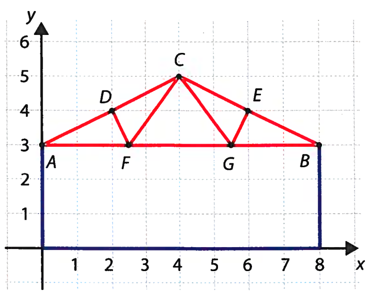
Afstanden mellem to punkter $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$ kan beregnes med formlen:

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

24 Eksempel

Afstanden mellem punkterne $A(5,-2)$ og $B(1,9)$ er

$$|AB| = \sqrt{(1-5)^2+(9-(-2))^2} = \sqrt{(-4)^2+11^2} = \sqrt{16+121} = \sqrt{137} \approx 11{,}7$$



25 Eksempel

Figuren viser tværsnittet af en tagkonstruktion til et hus. Det er indlagt i et koordinatsystem. Enheden er meter. Vi vil beregne længden af det skrå spær, der går mellem punkterne $B(8,3)$ og $C(4,5)$. Vi indsætter i formlen

$$|BC| = \sqrt{(4-8)^2+(5-3)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47.$$

Det skrå spær skal altså være 4,47 meter langt.

26 Eksempel

Betragt igen tagkonstruktionen. Punktet E skal ligge midt på spærret. Det skal altså ligge midt mellem punkterne B og C. Koordinaterne må derfor være gennemsnittet af koordinaterne til B og C:

$$E\left(\frac{8+4}{2},\frac{3+5}{2}\right) = E\left(\frac{12}{2},\frac{8}{2}\right) = E(6,4).$$

27 Sætning

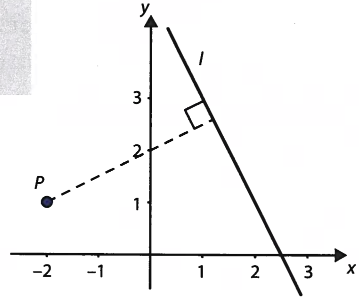
Midtpunktet M for linjestykket mellem to punkter $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$ har koordinaterne

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

28 Sætning (dist-formlen)

Afstanden fra punktet $P(x_1,y_1)$ til linjen med ligningen l: $ax + by + c = 0$ er

$$\text{dist}(P,l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



29 Eksempel

Afstanden fra punktet $P(-2,1)$ til linjen l: $4x + 2y - 10 = 0$ er

$$\text{dist}(P,l) = \frac{|4 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{|-8 + 2 - 10|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{|-16|}{\sqrt{20}} = \frac{16}{\sqrt{20}} \approx 3{,}58.$$

Afstanden er 3,58.

30 Løsning ved konstruktion i geometriprogram

Afstanden fra et punkt, P, til en linje, l, kan også findes ved hjælp af konstruktion i et geometriprogram. F.eks. med følgende 4 trin:

1) Indtegn linjen l og punktet P.
2) Konstruer en linje vinkelret på l og gennem P.
3) Bestem skæringspunktet mellem de to linjer.
4) Bestem afstanden fra P til dette skæringspunkt med måleværktøjet.

31 Øvelse

a. Beregn afstanden mellem punkterne $A(1,5)$ og $B(3,2)$

b. Bestem koordinaterne til midtpunktet M af linjestykket fra A til B.

32 Øvelse

a. Betragt igen tagkonstruktionen. Beregn længden af det skrå spær, der går mellem punkterne $C(4;5)$ og $G(5,5;3)$.

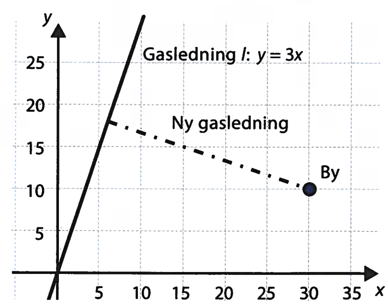
33 Øvelse

a. Beregn afstanden fra punktet $P(3,2)$ til linjen l: $-x + 2y + 8 = 0$ ved hjælp af dist-formlen.

b. Bestem afstanden fra punktet $Q(5,-2)$ til linjen m: $2x - y + 4 = 0$ ved hjælp af konstruktion i et geometriprogram.

34 Øvelse

a. Beregn længden af den nye gasledning fra introduktionen. Byen har koordinaterne (30,10), og den gamle gasledning har ligningen $y = 3x$. Enheden er km.

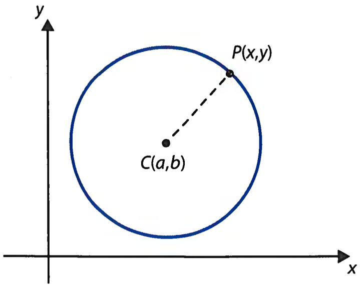


11.4 Cirkler 1

35 Introduktion

Racerbanen Pista di Nardò, som ligger i det sydlige Italien, er formet som en cirkel med radius 2 km.

Vi vil i dette afsnit se på den matematiske beskrivelse af cirkler. En cirkel er en punktmængde, der opfylder den nedenstående ligning. Punktmængden er derved kun cirklens periferi og altså ikke selve skiven.



36 Sætning

Cirklen med centrum i $C(a,b)$ og med radius r er beskrevet ved ligningen

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

37 Eksempel

Cirklen med centrum i punktet $C(2,-4)$ og med radius $\sqrt{7}$ har ligningen

$$(x-2)^2+(y-(-4))^2=\sqrt{7}^2$$

$$(x-2)^2+(y+4)^2=7$$

Cirklen kan konstrueres med et geometriprogram, når man kender centrum og radius.

38 Eksempel

Ud fra cirklens ligning kan vi aflæse centrums koordinater samt radius.

Betragt cirklen givet ved ligningen $(x+6)^2+(y-4)^2=25$

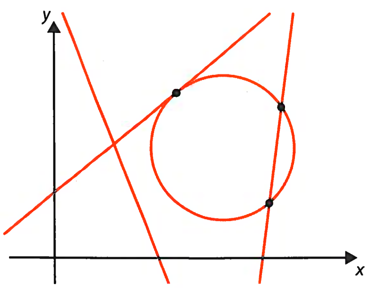
Radius er $r=5$, fordi vi kan aflæse, at $r^2=25$.

Centrums x-koordinat er $a=-6$. Det kan vi se, fordi $x-a$ skal være lig med $x+6$.

Det kan kun lade sig gøre, når $a=-6$.

Centrums y-koordinat er $b=4$.

Centrum har altså koordinaterne $(-6,4)$.



39 Skæring mellem linje og cirkel

En cirkel og en linje kan enten skære hinanden i to punkter, have ét skæringspunkt, eller slet ikke skære hinanden.

Eventuelle skæringspunkter kan findes ved at substituere linjens ligning ind i cirklens ligning. Det resulterer i en andengradsligning.

40 Eksempel

Vi vil beregne skæringspunkterne mellem linjen med ligningen l: $-2x+y+4=0$, og cirklen givet ved ligningen $(x-1)^2+(y-3)^2=25$. Først isoleres y i linjens ligning $y=2x-4$. Så substitueres y fra linjens ligning med y i cirklens ligning:

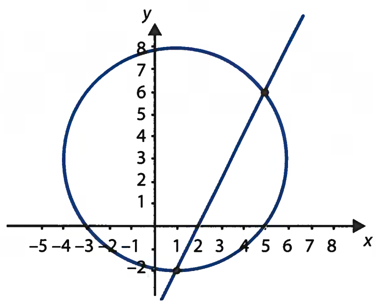
$$(x-1)^2+((2x-4)-3)^2=25.$$

Det er nu en ligning med kun en ubekendt. Den kan løses med CAS, eller man kan reducere udtrykket og løse det som en andengradsligning:

$$(x-1)^2+(2x-4-3)^2=25$$
$$(x-1)^2+(2x-7)^2=25$$
$$x^2+1^2-2\cdot 1\cdot x+(2x)^2+7^2-2\cdot 2x\cdot 7=25$$
$$x^2+1-2x+4x^2+49-28x=25$$
$$x^2+4x^2-2x-28x+49+1-25=0$$
$$5x^2-30x+25=0$$
$$x^2-6x+5=0$$

Kvadratsætninger:
$(p+q)^2=p^2+q^2+2pq$
og
$(p-q)^2=p^2+q^2-2pq$

Fra sidste til næstsidste linje har vi divideret med 5 på begge sider af lighedstegnet.
Vi står nu med en andengradsligning, som vi kan løse.
Diskriminanten er $d=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16$.
Diskriminanten er positiv, så der er to løsninger, svarende til at der er to skæringspunkter.



$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{10}{2}=5\\ \frac{2}{2}=1\end{cases}$$

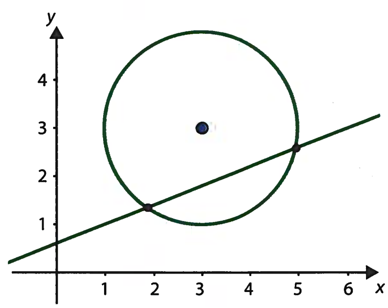
Løsningerne er $x=5$ og $x=1$.
Vi skal nu finde de tilsvarende y-koordinater. De findes med linjens ligning.
Når $x=5$, er $y=2\cdot 5-4=10-4=6$
Når $x=1$, er $y=2\cdot 1-4=2-4=-2$
Skæringspunkterne er (5,6) og (1,–2).

41 Øvelse

Racerbanen Pista di Nardò indlægges i et koordinatsystem, så banens centrum får koordinaterne $C(3,3)$. Enheden på koordinaterne er km, så radius er $r=2$.

a. Opskriv ligningen for den cirkel, som banen udgør.

En vej krydser banen. Vejen kan beskrives ved den rette linje med ligningen l: $2x-5y+3=0$. De to steder, hvor vejen og banen skærer hinanden, er der en tunnel under racerbanen.



b. Bestem koordinaterne til de to tunneler. Brug ligningsløseren i dit CAS-program.

c. Konstruer situationen med dit geometriprogram, og aflæs skæringspunkterne med det indbyggede skæringsværktøj.

Scan QR-koden for at se hints til løsningen.

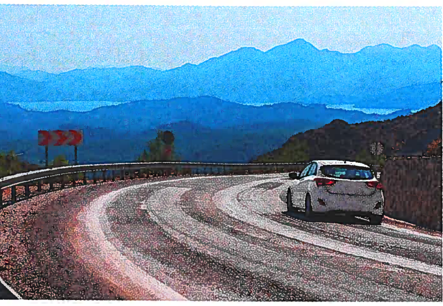
42 Øvelse

En cirkel har centrum i $C(2,-1)$ og har radius $r=\sqrt{5}$.

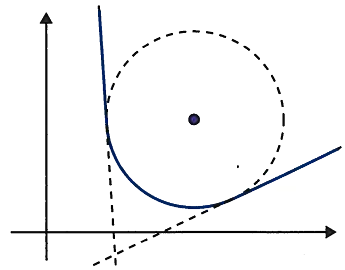
a. Opskriv en ligning for cirklen.

En linje l har ligningen l: $-x+y+4=0$

b. Bestem, uden brug af CAS, koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen og cirklen.



11.5 Cirkler 2

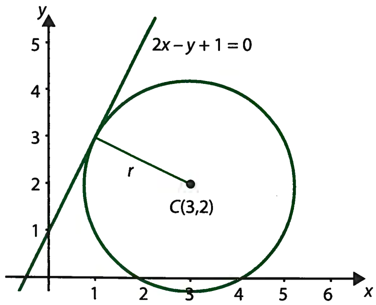


43 Introduktion

Vejsving konstrueres som cirkelbuer.
En cirkelbue er en del af en cirkel. Før og efter svinget er vejen en ret linje. For at svinget føles behageligt, er det vigtigt, at de rette linjer er tangenter til cirklen.

44 Definition

En **tangent til en cirkel** er en ret linje, som rører cirklen i netop ét punkt.



45 Eksempel

Linjen med ligningen $2x - y + 1 = 0$ er tangent til cirklen med ligningen $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$. Se figuren.
Man kan tjekke, om en linje er tangent til en cirkel, ved at beregne afstanden fra linjen og til cirklens centrum. Hvis der er tale om en tangentlinje, vil denne afstand jo netop være cirklens radius.
Fra cirklens ligning kan vi aflæse, at centrum har koordinaterne $C(3,2)$, og at radius er $r = \sqrt{5}$. Vi tjekker:

$$dist(P,l) = \frac{|2\cdot 3 - 1\cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|6-2+1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

Vi ser, at afstanden netop er radius.

Ligning for linje med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gennem punktet $P(x_0, y_0)$:
$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

46 Eksempel

Betragt cirklen med centrum $C(-4,1)$ og radius $r = \sqrt{10}$.
Punktet $P(-1,2)$ ligger på cirklen. Vi ønsker at finde en ligning for tangenten til cirklen i punktet P. For at bestemme ligningen for en linje skal vi bruge en normalvektor til linjen samt et punkt på linjen.

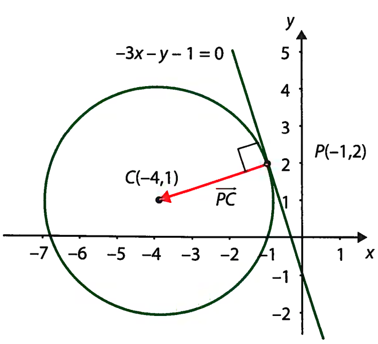
Punktet P ligger på tangenten, så vi mangler kun at finde en normalvektor. Vi kan bruge en hvilken som helst vektor, som er vinkelret på linjen, så vi kan bruge vektoren, der går fra punktet P til C:

$$\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} -4-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu indsætte i linjens ligning

$$\begin{aligned} a(x-x_0)+b(y-y_0)&=0 \\ -3(x-(-1))+(-1)(y-2)&=0 \\ -3(x+1)-(y-2)&=0 \\ -3x-3-y+2&=0 \\ -3x-y-1&=0 \end{aligned}$$

Tangentens ligning er $-3x - y - 1 = 0$.



47 Løsning ved konstruktion i geometriprogram

Følg eksempelvis disse 4 trin:

1) Indtegn en cirkel med $C(-4,1)$ og $r=\sqrt{10}$, og afsæt punktet $P(-1,2)$.
2) Konstruer linje gennem C og P.
3) Afsæt en vinkelret linje til CP, der går gennem P. Dette er tangenten.
4) Benyt programmet til at bestemme ligningen for den fundne tangent.

48 Omskrivning af cirklens ligning

Kvadratsætninger:
$(p+q)^2=p^2+q^2+2pq$
og
$(p-q)^2=p^2+q^2-2pq$

Ligningen $x^2-6x+y^2+8y+16=0$ beskriver også en cirkel. Vi kan nemlig omskrive den til formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ved at bruge kvadratsætningerne baglæns. Vi genkender leddene $-6x$ og $8y$ som de dobbelte produkter og kan nu lave omskrivningen.

$$x^2-6x+y^2+8y+16=0$$
$$\underbrace{x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2}_{=(x-3)^2}-3^2+\underbrace{y^2+2\cdot y\cdot 4+4^2}_{=(y+4)^2}-4^2+16=0$$
$$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16+16=0$$
$$(x-3)^2+(y+4)^2=9$$

Fra ligningen kan vi nu se, at der er tale om en cirkel med centrum i $(3,-4)$ og med radius 3. Omskrivningen kan også udføres med CAS. I nogle værktøjer f.eks. med kommandoen

CompleteSquare$(x^2-6x+y^2+8y+16=0,x,y)$

49 Eksempel

Ligningen $x^2+2x+y^2-4y+15=0$ er ikke ligning for en cirkel. Den kan omskrives til $(x+1)^2+(y-2)^2=-10$, så det, der skulle svare til r^2, er altså -10.
Eller sagt på en anden måde. I ligningen $(x+1)^2+(y-2)^2=-10$ er det, der står på venstre side af lighedstegnet, positivt, mens det, der står på højre side, er negativt. Det kan ikke lade sig gøre, så der er ingen løsninger til ligningen.

50 Øvelse

En cirkel er givet ved ligningen $(x-2)^2+(y-3)^2=5$, og punktet $P(1,5)$ ligger på cirklen.

a. Bestem ligningen for en tangent til linjen i punktet P, uden at benytte et geometriprogram.
b. Tjek din løsning ved at beregne afstanden fra centrum til din tangentlinje.
c. Bestem også tangentens ligning vha. et geometriprogram.

51 Øvelse

En cirkel er beskrevet ved ligningen $x^2+2x+y^2-4y=11$

a. Omskriv ligningen, så den er på formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
b. Angiv cirklens radius og koordinaterne til centrum.

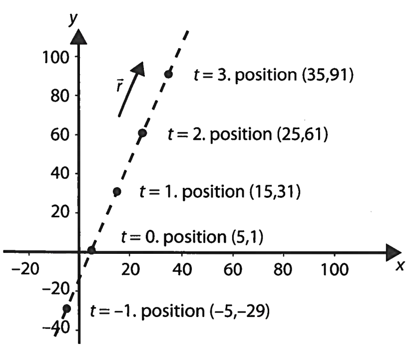
11.6 Retningsvektor og parameterfremstilling

52 Introduktion

Den Transaustralske jernbane har en strækning på 477km, hvor banen er en ret linje. Et bestemt tog kører med konstant hastighed på denne strækning. Hastighed kan beskrives som en vektor, den har nemlig både en størrelse og en retning. Hvis man kender togets position til et bestemt tidspunkt, og hvis man kender hastighedsvektoren, kan man beregne togets position resten af tiden.

53 Eksempel

Toget fra introduktionen befinder sig, til tiden $t = 0$, i punktet med koordinaterne $P(5,1)$ og har hastighedsvektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$. Enheden på koordinaterne er meter, og hastighedsvektoren har enheden meter pr. sekund. Hver gang der går ét sekund, har toget bevæget sig én hastighedsvektor frem.



Efter 1 sekund er positionen

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+10 \\ 1+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Efter 2 sekunder er positionen

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+20 \\ 1+60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 61 \end{pmatrix}.$$

Efter 3 sekunder er positionen

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+30 \\ 1+90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 91 \end{pmatrix}.$$

Punkterne ligger alle på en ret linje. Se figuren.
En stedvektor for togets position efter t sekunder kan beregnes som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

En sådan måde at fremstille en ret linje kaldes en parameterfremstilling. Hastighedsvektoren kaldes en retningsvektor.

> Vektoren fra Origo $O(0,0)$ til et punkt $P(x_0,y_0)$ kaldes punktets **stedvektor**. Stedvektoren har samme koordinater som punktet
> $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

> I et geometrisk værktøjsprogram kan en linje konstrueres ud fra to punkter. De to punkter kan beregnes med parameterfremstillingen.

54 Sætning

Linjen l, som går gennem punktet $P(x_0,y_0)$, og som er parallel med vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, er beskrevet ved **parameterfremstillingen**

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

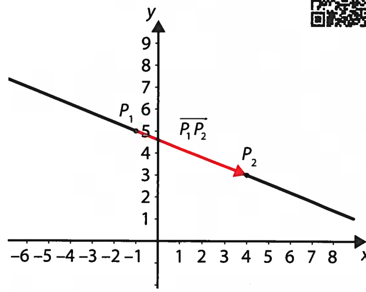
Tallet t kaldes **parameteren** og gennemløber alle reelle tal.

Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ kaldes en **retningsvektor** for linjen.

55 Eksempel

Vi ønsker at finde en parameterfremstilling for linjen, der går gennem de to punkter $P_1(-1{,}5)$ og $P_2(4{,}3)$. For at opskrive en parameterfremstilling skal vi bruge et punkt på linjen og en retningsvektor. Vi vælger punktet P_1. Som retningsvektor kan vi bruge en hvilken som helst vektor, som er parallel med linjen. Her kan vi bruge vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 4-(-1) \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Med dette bliver parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



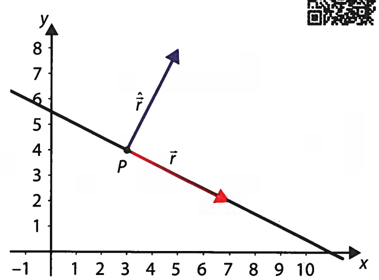
56 Eksempel

Vi ønsker at opskrive en ligning for linjen givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vi skal bruge et punkt på linjen samt en normalvektor. Vi kan aflæse fra parameterfremstillingen, at punktet $P(3{,}4)$ ligger på linjen. Vi kan også aflæse, at retningsvektoren er $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Vi kan finde en normalvektor ved at tage tværvektoren til retningsvektoren: $\vec{n} = \hat{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -(-2) \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ligningen bliver da $2 \cdot (x-3) + 4 \cdot (y-4) = 0$.



57 Eksempel

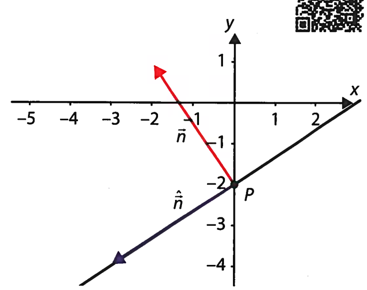
Vi ønsker at opskrive en parameterfremstilling for linjen med ligningen

$-2x + 3y + 6 = 0$. Normalvektoren aflæses til $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vi kan finde en retningsvektor som tværvektoren til normalvektoren:

$$\vec{r} = \hat{\vec{n}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Hvis $x = 0$, bliver $y = -2$, så punktet $(0,-2)$ ligger på grafen. Med dette bliver parameterfremstillingen: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.



58 Øvelse

a. Opskriv en parameterfremstilling for linjen gennem punkterne $P_1(1{,}4)$ og $P_2(3{,}2)$.

b. Opskriv en ligning for linjen givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c. Opskriv en parameterfremstilling for linjen givet ved ligningen $2x - 5y + 15 = 0$.

11.7 Skæringspunkter og skæringstidspunkter

59 Introduktion

Ved hjælp af parameterfremstillinger kan vi ikke blot bestemme koordinaterne til et skæringspunkt, men vi kan også modellere, *hvornår* to objekter (fx et tog og en bil) befinder sig i skæringspunktet.

60 Eksempel

Parameterfremstillingen

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

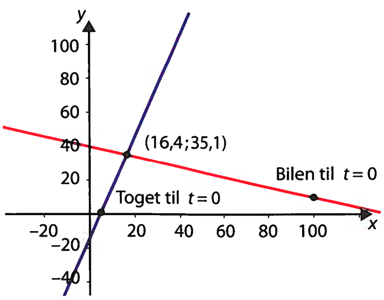
beskriver positionen af en bil på en lang lige vej, som skærer jernbanen fra forrige afsnit. Vi ønsker at finde koordinaterne til skæringspunktet mellem vejen og jernbanen.

Jernbanen er beskrevet med parameterfremstillingen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$.
Bemærk, at vi har ændret navnet på parameteren.

Ved skæringspunktet er koordinaterne ens. Vi kan finde skæringspunktet ved at sætte parameterfremstillingerne lig hinanden:

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 - 20t \\ 10 + 6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 10s \\ 1 + 30s \end{pmatrix}$$



Det giver os to ligninger med to ubekendte – en for hver koordinat:

$$100 - 20t = 5 + 10s$$
$$10 + 6t = 1 + 30s$$

Ligningerne kan løses med CAS.
Ligningerne har løsningerne $t = 4{,}18$ og $s = 1{,}14$.

For at finde skæringspunkternes koordinater, indsættes $t = 4{,}18$ i parameterfremstillingen for m:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix} + 4{,}18 \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}4 \\ 35{,}1 \end{pmatrix}$$

Skæringspunktet har koordinaterne (16,4;35,1).

Bilen er ved skæringspunktet efter 4,18 sekunder, og toget er ved skæringspunktet allerede efter 1,14 sekunder.

I nogle CAS-værktøjer kan to ligninger med to ubekendte løses med kommandoen

$$\text{solve}\left(\begin{bmatrix} 100 - 20t = 5 + 10s \\ 10 + 6t = 1 + 30s \end{bmatrix}, \{t, s\}\right)$$

61 Eksempel

Vi vil bestemme skæringspunktet mellem linjerne l og m, hvor l er givet ved en ligning og m er givet ved en parameterfremstilling. Vi har

$$l: \ 4x + 3y - 11 = 0 \ \text{ og } \ m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Parameterfremstillingen kan skrives op som to udtryk. Et for x og et for y:

$x = 4 + t \cdot 1 = 4 + t$

$y = -3 + t \cdot (-1) = -3 - t$

Disse to udtryk kan indsættes på x og y's plads i ligningen for l. På denne måde frem-kommer en førstegradsligning med kun t som ubekendt. Ligningen kan løses ved at isolere t

$$\begin{aligned} 4x + 3y - 11 &= 0 \\ 4 \cdot (4 + t) + 3 \cdot (-3 - t) - 11 &= 0 \\ 16 + 4t - 9 - 3t - 11 &= 0 \\ -4 + t &= 0 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

Skæringspunktets koordinater findes ved indsættelse af $t = 4$ i parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot 1 \\ -3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

De to linjer skærer hinanden i punktet $P(8,-7)$.

62 Eksempel

Vi vil bestemme skæringspunkterne mellem linjen l og cirklen C, hvor

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2\,.$$

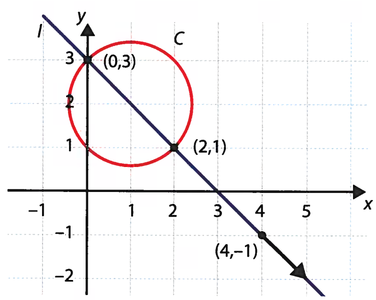
Parameterfremstillingen giver os følgende om x og y:

$x = 4 + t$ og $y = -1 - t$.

Disse to udtryk indsættes i cirklens ligning:

$$((4 + t) - 1)^2 + ((-1 - t) - 2)^2 = 2.$$

Det er en andengradsligning med løsningerne $t = -2$ og $t = -4$. Ved indsættelse i parameterfremstillingen, finder vi, at det svarer til punkterne (2,1) og (0,3). Scan QR-koden for at se flere detaljer.



63 Øvelse

a. Bestem skæringspunktet for de to linjer, som er givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ og } m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}\,.$$

64 Øvelse

To linjer l og m er givet ved l: $5x - 2y = 0$ og $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

a. Bestem de to linjers skæringspunkt.

65 Øvelse

a. Bestem skæringspunkterne mellem linjen l og cirklen C, hvor

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } C: (x-1)^2 + y^2 = 8.$$

11.8 Beviser 1

66 Introduktion

I afsnittet her skal vi bevise sætninger om linjer og linjers hældning. Vi skal bl.a. se nærmere på, hvordan den trigonometriske funktion tangens kan bruges til at knytte en linjes hældningskoefficient til dens hældningsvinkel.
Derved skal vi også rundt om en række trigonometriske begreber og indsigter, om retvinklede trekanter og om to overgangsformler om sinus og cosinus, som bedst kan forstås ud fra enhedscirklen.

Skalarproduktet af to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ beregnes som

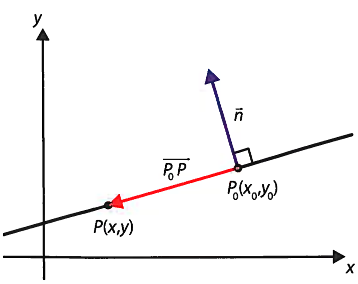
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

[2 Sætning]

Linjen l som går gennem punktet $P_0(x_0, y_0)$, og som er ortogonal med en vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er beskrevet ved ligningen

$$l\colon\ a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0.$$

Vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kaldes en **normalvektor til linjen**.



To egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, netop når $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

67 Bevis for sætning 2

Lad $P(x,y)$ være et vilkårligt punkt på linjen (et såkaldt løbende punkt). Vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ fra P_0 til P er parallel med linjen og derfor ortogonal på normalvektoren $\vec{n}$. Se figuren. Når vektorerne er ortogonale, ved vi, at deres skalarprodukt giver nul.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Dette er netop linjens ligning.

[8 Sætning]

En linjes hældningsvinkel, v, er vinklen fra førsteaksen til linjen regnet med fortegn. Om hældningsvinklen v og hældnings-koefficienten a gælder, at

$$a = \tan(v) \quad \text{og} \quad v = \tan^{-1}(a)$$

68 Bevis for sætning 8

Vi deler beviset op i tre tilfælde: Linje med positiv hældning, vandret linje og linje med negativ hældning:

Positiv hældning: a > 0.
Hældningskoefficienten er netop defineret som ændringen i y-koordinaten, når x-koordinaten får en tilvækst på 1. Det giver os en retvinklet trekant, som er tegnet med rød.

Ved at bruge tangens for retvinklede trekanter, får vi $\tan(v) = \frac{a}{1}$, som kan forkortes til $\tan(v) = a$.
Vinklen ligger i intervallet]0;90[, så når $\tan(v) = a$, kan vi finde vinklen som $v = \tan^{-1}(a)$.

Vandret linje: a = 0.
Hvis linjen er vandret, er hældningsvinklen $v = 0°$. Da $\tan(0) = 0$, gælder formlen også i dette tilfælde.

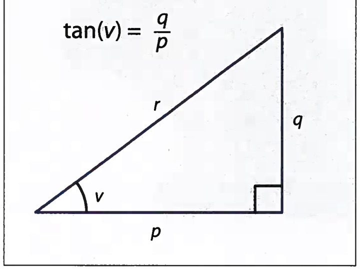
Negativ hældning: a < 0.
Først skal vi en lille tur omkring enhedscirklen, som vi også beskæftigede os med i Kernestof 1. Ud fra enhedscirkelen i margenen kan vi se, at $\sin(-v) = -\sin(v)$ og at $\cos(-v) = \cos(v)$. Det giver os følgende om tangens:

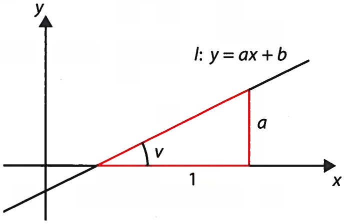
$$\tan(-v) = \frac{\sin(-v)}{\cos(-v)} = \frac{-\sin(v)}{\cos(v)} = -\frac{\sin(v)}{\cos(v)} = -\tan(v)$$

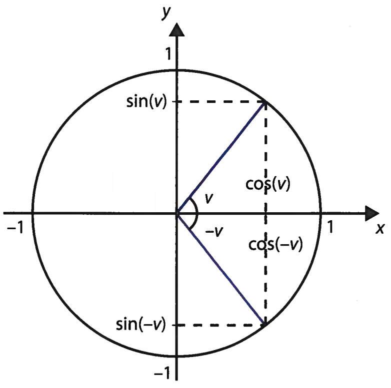
Heraf kan vi konkludere, at hvis vi tager tangens til en negativ vinkel, får vi et negativt tal, så længe vinklen ligger i intervallet]−90;0[. Omvendt vil $\tan^{-1}(a)$, hvor a er en negativ hældning, også give en negativ hældningsvinkel. Formlen gælder altså også for negative hældningskoefficienter og negative hældningsvinkler.

Hermed er sætningen bevist.

Tangens i retvinklet trekant.







69 Øvelse

a. Skriv begge beviser ned på papir, og forklar udregningerne og ræsonnementerne med egne kommentarer rundt omkring.

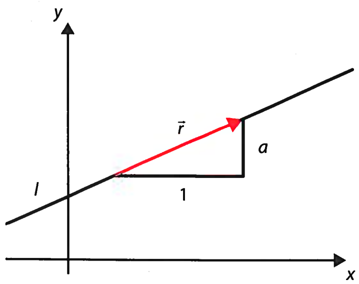
11.9 Beviser 2

70 Introduktion

I afsnittet her skal vi bevise sætningen om, at hvis to linjer er ortogonale, så vil produktet af deres hældningskoefficienter give -1. Derudover vil vi udlede linjens parameterfremstilling.

[18 Sætning]

To rette linjer givet ved ligningerne l: $y = ax + b$ og m: $y = cx + d$ er ortogonale, hvis og kun hvis $a \cdot c = -1$.



I beviset bruger vi følende:

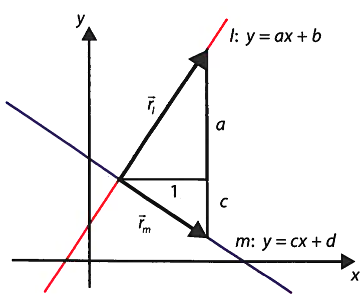
71 Bemærkning

Linjen givet ved ligningen $y = ax + b$ har $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ som en retningsvektor.

72 Bevis for sætning 18

Beviset deles op i to.

Først vil vi bevise, at *hvis linjerne er ortogonale, så medfører det, at* $a \cdot c = -1$. Dernæst vil vi bevise, at hvis $a \cdot c = -1$, *så medfører det, at linjerne er ortogonale*.



Uanset, om linjerne er ortogonale eller ej, er vektoren $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ en retningsvektor for l, og vektoren $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$ en retningsvektor for m.

Første del:

Vi antager, at linjerne l: $y = ax + b$ og m: $y = cx + d$ er ortogonale.

Hvis linjerne er ortogonale, må deres retningsvektorer også være ortogonale. Det betyder, at retningsvektorernes skalarprodukt giver nul:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_l \cdot \vec{r}_m &= 0 \\
\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} &= 0 \\
1 \cdot 1 + a \cdot c &= 0 \\
1 + a \cdot c &= 0 \\
a \cdot c &= -1
\end{aligned}
$$

Vi har nu vist, at hvis linjerne er ortogonale, er $a \cdot c = -1$.

Anden del:

Vi antager nu, at $a \cdot c = -1$.

Vi vil beregne retningsvektorernes skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_l \cdot \vec{r}_m &= \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot 1 + a \cdot c \\
&= 1 + a \cdot c \\
&= 1 + (-1) \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Skalarproduktet er nul, så vektorerne er ortogonale. Hvis retningsvektorerne er ortogonale, må linjerne også være ortogonale.

Vi har vist, at hvis $a \cdot c = -1$, er linjerne ortogonale.

[54 Sætning]

Linjen *l* som går gennem punktet $P(x_0, y_0)$, og som er parallel med vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er beskrevet ved **parameterfremstillingen**

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Tallet *t* kaldes **parameteren**, og gennemløber alle reelle tal.

Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ kaldes en **retningsvektor** for linjen.

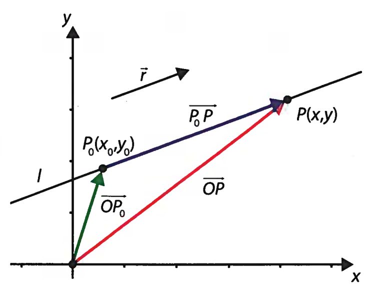
Hvis to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, eksisterer der et tal *t*, så $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$.

73 Bevis for sætning 54

Lad *P*(*x*,*y*) være et løbende punkt på linjen. Vi ved, at punktet $P_0(x_0, y_0)$ ligger på linjen, så vi kan danne en vektor $\overrightarrow{P_0P}$, som er parallel med linjen. Når $\overrightarrow{P_0P}$ er parallel med linjen, er den også parallel med linjens retningsvektor $\vec{r}$.

Dvs. der eksisterer et tal *t*, så $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{r}$.

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er stedvektor for punktet *P*, og $\overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ er stedvektor for punktet P_0. Se figuren.



Vi kan nu opskrive følgende vektorsum:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{r}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Det sidste er netop linjens parameterfremstilling.

11.10 Beviser 3

74 Introduktion

I dette afsnit vil vi bevise formlerne for afstanden mellem to punkter og afstanden fra et punkt til en linje. Derudover vil vi udlede cirklens ligning.

[23 Sætning]

Afstanden mellem to punkter $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$ kan beregnes:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Længden af en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ kan beregnes med formlen

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

75 Bevis for sætning 23

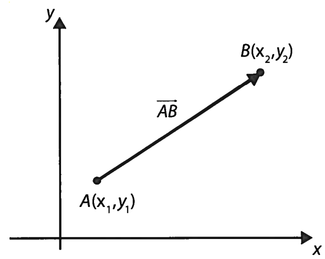
Vi laver en vektor fra punktet A til punktet B:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Afstanden mellem punkterne er netop længden af denne vektor:

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}|$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

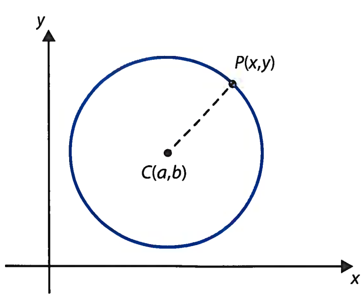
Det var netop, hvad vi skulle vise.



[36 Sætning]

Cirklen med centrum i $C(a,b)$ og med radius r er beskrevet ved ligningen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



76 Bevis for sætning 36

Betragt et løbende punkt $P(x,y)$ på cirkelperiferien.
Afstanden $|PC|$ mellem dette punkt og centrum $C(a,b)$ må netop være radius r.

Vi indsætter i afstandsformlen:

$$|PC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Vi er kommet frem til cirklens ligning, og beviset er dermed slut.

[28 Sætning (dist-formlen)]

Afstanden fra punktet $P(x_1,y_1)$ til linjen med ligningen l: $ax + by + c = 0$ er

$$\text{dist}(P,l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

77 Bevis for sætning 28

Den søgte afstand er afstanden vinkelret fra P til linjen. Denne afstand er markeret med d på figurerne.

Ud fra linjens ligning kan vi aflæse, at linjen har vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ som en normalvektor. Derudover vælger vi et vilkårligt punkt $P_0(x_0, y_0)$ på linjen. Begge dele er tegnet ind på figur 2.

Vi laver nu en vektor $\overrightarrow{P_0P}$ fra punktet på linjen og til punktet P. Denne vektor er indtegnet i figur 3 og har koordinaterne $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$.

Til sidst indtegner vi projektionen af $\overrightarrow{P_0P}$ på normalvektoren $\vec{n}$.

Ved indsættelse i formlen for projektionen fås $\overrightarrow{P_0P_{\vec{n}}} = \dfrac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}$.

Længden af denne projektion må netop være den søgte afstand.

Resten af beviset går ud på at beregne længden af denne projektion.

$$\left|\overrightarrow{P_0P_{\vec{n}}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{\left|\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|(x_1 - x_0) \cdot a + (y_1 - y_0) \cdot b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Punktet $P_0(x_0, y_0)$ ligger på linjen, så koordinaterne opfylder linjens ligning:

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

Vi isolerer c: $c = -ax_0 - by_0$.

Ved at samle leddene $-ax_0$ og $-by_0$ kan vi se, at vi kan substituere med c.

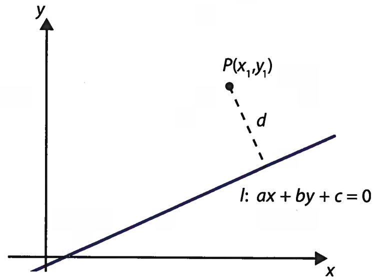
$$\left|\overrightarrow{P_0P_{\vec{n}}}\right| = \frac{|ax_1 + by_1 - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

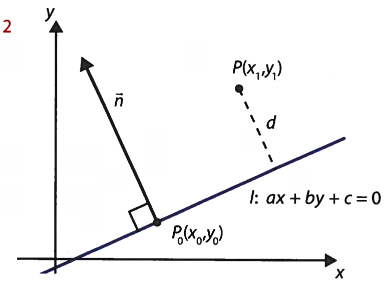
Da længden af projektionen netop er den søgte afstand, har vi vist

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1



2



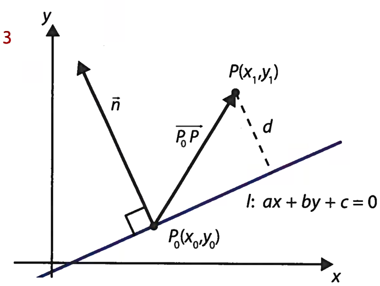
Projektionen af vektor $\vec{v}$ på vektor $\vec{w}$ kan beregnes med formlen

$$\overrightarrow{v_{\vec{w}}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w}.$$

Længden af projektionen er

$$\left|\overrightarrow{v_{\vec{w}}}\right| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{w}|}.$$

3



4