# Integralregning

### Approksimation af et areal

### Opgave 1

Bestem arealet af det skraverede område.

En generel måde at approksimere arealet under en graf er at konstruere et antal rektangler som cirka dækker området og derefter bruge summen af disse rektangler som en approksimation af arealet.

### Opgave 2

1. Til højre er der konstrueret 4 rektangler
som cirka dækker det oprindelige område.
Bestem det samlede areal af disse rektangler.
2. Argumentér for at det samlede areal af
rektanglerne kan skrives som:

1. Hvad vil I forvente der sker med det
samlede areal af rektanglerne hvis vi
gør bredden på rektanglerne
mindre og mindre og tilsvarende forøger
antallet?

*Tip: prøv at beregne arealet af*

*8 rektangler på samme interval.*

For at generalisere det ovenstående, så konstruerer vi
rektangler med en bredde på idet intervallet har
en længde på .

Summen af rektanglernes arealer, , kan skrives som:

Som kan noteres kort med et sumtegn:

Hvis vi beregner summen af rektanglernes arealer med et voksende antal rektangler, får vi:



### Riemann-integralet

Vi indfører nu integralet af fra til som

hvor .



Hvis er en positiv og kontinuert funktion, så er integralet af fra til lig med arealet af det område som er afgrænset af de lodrette linjer givet ved og ,
-aksen og grafen for :

**Maple**



### Opgave 3

Vi har funktionen .

På figuren til højre afgrænser grafen for afgrænser sammen med de to akser et område .

1. Bestem arealet af .

### Opgave 4

Vi har funktionen .

1. Bestem skæringspunkterne mellem grafen for og førsteaksen.
2. Bestem arealet af det område som grafen for afgrænser sammen med førsteaksen.

### Opgave 5

På figuren til højre ses graferne for funktionerne
 og .

1. Bestem arealet af det område som graferne for og afgrænser sammen med -aksen og linjen givet ved .

### Opgave 6

****Vi har funktionerne og .

1. Bestem arealet af det markerede område vha. integralerne af og .
2. Bestem arealet af det markerede område vha. elementære arealberegninger.

**Eksempel**



Vi bestemmer skæringspunkterne ved at sætte de to forskrifter lig hinanden:

Derefter reducerer vi ligningen.

Vi kan nu se at vi har løsningerne og . Arealet må så være givet ved

### Opgave 7 (valgfri)

Vi har to funktioner og . Graferne for og afgrænser et område .

1. Bestem arealet af .

### Opgave 8 (valgfri)



### Ikke-positive funktioner

Vha. af de nedenstående to regneregler skal vi se på forskellen mellem integralet og arealet under funktionen.

Hvis er en negativ funktion på , så har vi at integralet af fra til er lig minus arealet af området under på :

Lad og være to intervaller. Vi har da at man kan dele integralet op:

### Opgave 9

Vi har .

1. Bestem integralet
2. Bestem det samlede areal af punktmængderne
 (afgrænset af førsteaksen, andenaksen og )
og (afgrænset af førsteaksen og ).

### Opgave 10

På figuren til højre ses funktionen og de
tre områder afgrænser sammen med
-aksen på intervallet .
Arealet af er 17, arealet af er 13
og arealet af er 7.

Bestem integralet .

### Opgave 11

På figuren nedenfor ses funktionerne og . Bestem arealet af det område som graferne for og afgrænser sammen med linjen givet ved .

