Differentiation af $x^{n}, n\in N$

# Sætning

For $n\in N$ er $x^{n}$ er differentibel med differentialkvotienten

$$\left(x^{n}\right)^{'}=n·x^{n-1}$$

# Kommentar til beviset

Beviset er et induktionsbevis, og delt i to dele: induktionsstart og induktionsskridt.

Induktionsstart: Man starter med at vise at sætningen er sand for $n=1$.

Induktionsskridt: Her antager man at sætningen er sand for $n$, og viser at så må den også være sand for $n+1$.

Hvorfor er det et bevis? I induktionsstarten får man vist at sætningen er sand når $n=1$. Af induktionsskridtet følger, at så må den også være sand når $n=2$, og derfor også når $n=3$, $n=4$ osv. Dermed får man vist det for et hvilket som helst naturligt tal $n$, fordi man kan nå til et hvilket som helst naturligt tal ved at starte ved 1 og lægge 1 til et passende antal gange.

Bevisets begrænsninger: Vi får kun vist sætningen for $n\in N$. Og vi bruger sætningen for alle reelle potenser.

# Bevis

## Induktionsstart

Lad $n=1$. Så er $x^{n}=x^{1}=x$.

Jeg differentierer $x$ uden at bruge sætningen. $x$ er en lineær funktion, og dermed er den differentiabel.

For en lineær funktion er differentialkvotienten er lig med funktionens hældning, som i dette tilfælde er 1:

$$\left(x\right)^{'}=1$$

Sætningen giver at $\left(x^{1}\right)^{'}=1·x^{1-1}=1·x^{0}=1·1=1$, hvilket er det samme som ovenfor.

Dermed er sætningen vist for $n=1$ og induktionsstarten er vist.

## Induktionsskridt

Jeg antager at sætningen gælder for $n$. Altså antager jeg at $\left(x^{n}\right)^{'}=n·x^{n-1}$. Dette kaldes induktionsantagelsen.

Nu vil jeg vise at så må sætningen også gælde for $n+1$, altså at $x^{n+1}$ er differentiabel med differentialkvotienten $\left(x^{n+1}\right)^{'}=\left(n+1\right)·x^{n}$.

Først argumenter jeg for at funktionen er differentiabel.

Der findes en potensregneregel, som lyder: $a^{m+n}=a^{m}·a^{n}$

Dermed er $x^{n+1}=x^{n}·x^{1}=x^{n}·x=x·x^{n}$.

$x$ er differentiabel jf. argumentationen i induktionsstarten. $x^{n}$ er differentiabel jf. induktionsantagelsen. Dermed kan funktionen $x^{n+1}$ skrives som et produkt af to differentiable funktioner. Produktreglen giver at sådan en funktion er differentiabel.

Jeg kan derefter bruge produktreglen til at differentiere $x^{n+1}$:

$\left(x^{n+1}\right)^{'}=\left(x·x^{n}\right)^{'}$ Omskriver vha. potensregneregelen $x^{a+b}=x^{a}·x^{b}$

$=\left(x\right)^{'}·x^{n}+x·\left(x^{n}\right)^{'}$ Bruger produktreglen

$=1·x^{n}+x·n·x^{n-1}$ Differentierer de to faktorer, som skal differentieres

$=x^{n}+n·x^{1+n-1}$ Bruger samme potensregneregel

$=x^{n}+n·x^{n}$ Reducerer potensen

$=\left(1+n\right)·x^{n}$ Sætter $x^{n}$ udenfor parentesen (faktoriser udtrykket)

Det var netop det, sætningen gav. Dermed har jeg vist at hvis sætningen er sand for $n$, er den også sand for $n+1$. Dermed er induktionsskridtet også vist, og dermed er sætningen vist.

# Ideen i beviset

Husk at der er to dele, en hvor $n=1$, og en hvor man antager at sætningen er sand for $n$ og viser at så er den også sand for $n+1$.

I del 1: Differentier $x$ og vis at det giver det samme hvis man bruger sætningen.

I del 2: Brug produktreglen til at differentiere $x^{n+1}$, og vis at det giver det samme hvis man bruger sætningen.

Husk i begge dele at argumentere for at funktionen er differentiabel.