Differentiation af

# Sætning

For er er differentibel med differentialkvotienten

# Kommentar til beviset

Beviset er et induktionsbevis, og delt i to dele: induktionsstart og induktionsskridt.

Induktionsstart: Man starter med at vise at sætningen er sand for .

Induktionsskridt: Her antager man at sætningen er sand for , og viser at så må den også være sand for .

Hvorfor er det et bevis? I induktionsstarten får man vist at sætningen er sand når . Af induktionsskridtet følger, at så må den også være sand når , og derfor også når , osv. Dermed får man vist det for et hvilket som helst naturligt tal , fordi man kan nå til et hvilket som helst naturligt tal ved at starte ved 1 og lægge 1 til et passende antal gange.

Bevisets begrænsninger: Vi får kun vist sætningen for . Og vi bruger sætningen for alle reelle potenser.

# Bevis

## Induktionsstart

Lad . Så er .

Jeg differentierer uden at bruge sætningen. er en lineær funktion, og dermed er den differentiabel.

For en lineær funktion er differentialkvotienten er lig med funktionens hældning, som i dette tilfælde er 1:

Sætningen giver at , hvilket er det samme som ovenfor.

Dermed er sætningen vist for og induktionsstarten er vist.

## Induktionsskridt

Jeg antager at sætningen gælder for . Altså antager jeg at . Dette kaldes induktionsantagelsen.

Nu vil jeg vise at så må sætningen også gælde for , altså at er differentiabel med differentialkvotienten .

Først argumenter jeg for at funktionen er differentiabel.

Der findes en potensregneregel, som lyder:

Dermed er .

er differentiabel jf. argumentationen i induktionsstarten. er differentiabel jf. induktionsantagelsen. Dermed kan funktionen skrives som et produkt af to differentiable funktioner. Produktreglen giver at sådan en funktion er differentiabel.

Jeg kan derefter bruge produktreglen til at differentiere :

Omskriver vha. potensregneregelen

Bruger produktreglen

Differentierer de to faktorer, som skal differentieres

Bruger samme potensregneregel

Reducerer potensen

Sætter udenfor parentesen (faktoriser udtrykket)

Det var netop det, sætningen gav. Dermed har jeg vist at hvis sætningen er sand for , er den også sand for . Dermed er induktionsskridtet også vist, og dermed er sætningen vist.

# Ideen i beviset

Husk at der er to dele, en hvor , og en hvor man antager at sætningen er sand for og viser at så er den også sand for .

I del 1: Differentier og vis at det giver det samme hvis man bruger sætningen.

I del 2: Brug produktreglen til at differentiere , og vis at det giver det samme hvis man bruger sætningen.

Husk i begge dele at argumentere for at funktionen er differentiabel.