BØRNE- OG UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Studentereksamen

Ny ordning

Forberedelsesmateriale

ny-stx201-MAT/A-22042020

Onsdag den 22. april 2020

Forberedelsesmateriale til stx-A MATEMATIK

Der skal afsættes 6 timer af holdets sædvanlige uddannelsestid til, at eleverne kan arbejde med forberedelsesmaterialet forud for den skriftlige prøve.

Ved den skriftlige prøve kan indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet indgå i opgaver i begge delprøver.

Oplægget indeholder teori, eksempler og øvelser i tilknytning til et emne, der ligger umiddelbart i forlængelse af emnerne i kernestoffet. I dette forberedelsesmateriale er emnet ”Differensligninger”.

Alle hjælpemidler er tilladt, og det er tilladt at modtage vejledning under arbejdet med dette forberedelsesmateriale.

Resultaterne af arbejdet med dette forberedelsesmateriale bør medbringes til delprøve 2 af den skriftlige prøve.

Det foreliggende materiale er gældende for eksamen maj-juni, august 2020 & 2021 samt december 2020.

Differensligninger

Indhold

Indledning

I forberedelsesmaterialet er der både øvelser og opgaver. Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien, herunder beviser for nogle af sætningerne. Opgaverne er tænkt som forberedelse til de opgaver, der kommer til den skriftlige eksamen.

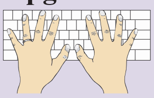
I forberedelsesmaterialet anvendes seks typer af farvede bokse. Se farvekoderne her:

Definition

Eksempel

Sætning

Øvelse Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien, herunder også beviser for nogle af sætningerne.

Opgave

Opgaverne er tænkt som forberedelse på de opgaver, der kan komme til den skriftlige eksamen. Opgaverne markeret med et tastatur kan kun forekomme i delprøve 2.

Opgave

Opgaverne markeret med hånd og blyant kan forekomme i begge delprøver.

Differensligninger

Differensligninger optræder ofte naturligt i modellering af fænomener med diskrete værdier og variable. Det kan for eksempel være i økonomi eller modellering af udviklingen i antallet af individer i populationer af dyr under visse betingelser. Et eksempel herpå kunne være insekter, der udklækkes næsten samtidig, parrer sig, lægger æg og dør. Æggene er en fast tid om at udklække, hvorefter fænomenet gentager sig.
Vi illustrerer dette med nedenstående eksempler. Desuden vil vi omtale anvendelse af differensligninger i forbindelse med bestemmelse af nulpunkter for en funktion (se Newton-Raphsons metode side 20).

I dette materiale vil vi betragte *talfølger* dvs. en ordnet række af reelle tal $y_0, y_1, y_2, \ldots$ Afhængig af konteksten vil vi benytte forskellige betegnelser for tallene i talfølgen. Ved en *differensligning* vil vi forstå en ligning, hvor y_{n+1} kan udtrykkes ved de foregående elementer i talfølgen $y_0, \ldots, y_n$. Dette vil blive uddybet i nedenstående eksempler, øvelser og opgaver.

Førsteordens lineære differensligninger

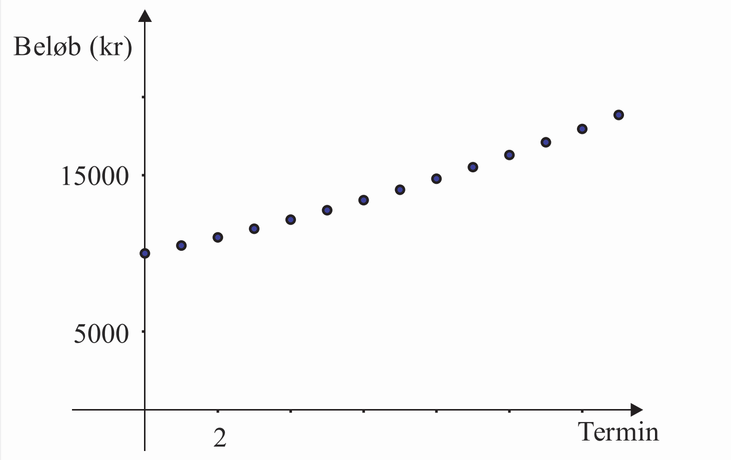
Eksempel 1 Udviklingen i beløbet på en konto kan beskrives ved differensligningen

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}05 \cdot y_n \ , \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

hvor y_n betegner beløbet på kontoen (målt i kr.) efter *n* terminer.
Vi lægger mærke til, at beløbet y_{n+1} udregnes på baggrund af beløbet y_n. Dette kaldes en differensligning. I differensligningen indgår tallet 0,05, som svarer til, at der bliver lagt 5% til beløbet på kontoen efter hver termin.
Hvis startbeløbet på kontoen er 10000 kr. dvs. $y_0 = 10000$, så kan differensligningen anvendes til trin for trin at udregne beløbet på kontoen de efterfølgende terminer:

n	y_n
0	$y_0 = 10000$
1	$y_1 = y_{0+1} = y_0 + 0{,}05 \cdot y_0 = 10000 + 0{,}05 \cdot 10000 = 10500$
2	$y_2 = y_{1+1} = y_1 + 0{,}05 \cdot y_1 = 10500 + 0{,}05 \cdot 10500 = 11025$
3	$y_3 = y_{2+1} = y_2 + 0{,}05 \cdot y_2 = 11025 + 0{,}05 \cdot 11025 = 11576$
4	$y_4 = y_{3+1} = y_3 + 0{,}05 \cdot y_3 = 11576 + 0{,}05 \cdot 11576 = 12155$

Udviklingen i beløbet på kontoen kan også beskrives ved et punktplot.

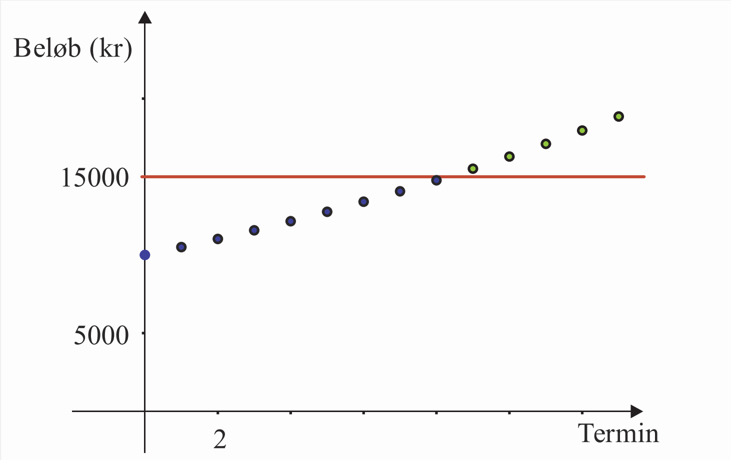


Termin	Beløb
0	10000
1	10500
2	11025
3	11576,25
4	12155,06
5	12762,82
6	13400,96
7	14071
8	14774,55
9	15513,28
10	16288,95
11	17103,39
12	17958,56
13	18856,49

Tabellen og punktplottet illustrerer tydeligt, at differensligningen giver en *diskret* sammenhæng mellem antal terminer og beløbet på kontoen. Dermed er der også kun diskrete (bestemte) værdier *k*, hvor ligningen $y_n = k$ har en løsning.

En ulighed på formen $y_n > k$ kan nemmest løses ved at opstille en tabel eller tegne punktplottet som ovenfor, og derefter ved inspektion i tabellen eller punktplottet bestemme den mindste værdi for *n*, så uligheden $y_n > k$ er opfyldt.

Som eksempel kan man bestemme tidspunktet, hvor beløbet på kontoen overstiger 15000 kr. ved at løse uligheden $y_n > 15000$. Denne kan løses på følgende måde:



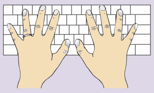
Termin	Beløb
0	10000
1	10500
2	11025
3	11576,25
4	12155,06
5	12762,82
6	13400,96
7	14071
8	14774,55
9	15513,28
10	16288,95
11	17103,39
12	17958,56
13	18856,49

Da udviklingen i beløbet på kontoen er voksende, så er løsningen til uligheden $n > 8$. Det vil sige at beløbet på kontoen overstiger 15000 kr. den 9 termin.

Definition 1 Hvis $y_0, y_1, y_2, \ldots$ er en følge af tal, så er en *differensligning* en ligning, hvor y_{n+1} er udtrykt ved de foregående elementer i talfølgen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Ved en løsning til differensligningen forstås en talfølge $y_0, y_1, y_2, \ldots,$ der opfylder differensligningen.

Opgave 1



Udviklingen i beløbet på en konto kan i en model beskrives ved differensligningen

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}04 \cdot y_n \ , \ n = 0,1,2,...$$

hvor y_n betegner beløbet på kontoen (målt i kr.), og n betegner antallet af terminer.

a) Bestem y_5, når $y_0 = 3000$.

b) Forklar betydningen af tallet 0,04 i differensligningen.

c) Tegn et punktplot for udviklingen i y_n, når $n = 0,1,2,...,15$.

d) Benyt modellen til at bestemme, hvor mange terminer der går, før beløbet på kontoen overstiger 5000 kr.

Øvelse 1

Generalisér differensligningen $y_{n+1} = y_n + 0{,}05 \cdot y_n$, så der i stedet for 5% bliver lagt en positiv procentsats p til efter hver termin.

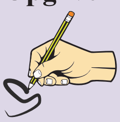
Eksempel 2

Med udgangspunkt i differensligningen $y_{n+1} = y_n + 0{,}05 \cdot y_n$ kan vi udvide situationen til at betragte udviklingen i beløbet på en konto med fast rente, hvor der desuden indbetales et fast beløb hver termin umiddelbart efter rentetilskrivningen. Hvis vi eksempelvis indbetaler 2000 kr. efter hver termin, så kan differensligningen formuleres som

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}05 \cdot y_n + 2000.$$

Dette kaldes også en differensligning for en *annuitetsopsparing*.

Opgave 2



Udviklingen i beløbet på en bankkonto kan beskrives ved differensligningen

$$y_{n+1} = 1{,}025 \cdot y_n + 500, \quad n = 0,1,2,...$$

hvor y_n betegner beløbet på kontoen (målt i kr.) til tidspunktet n (målt i år).

a) Bestem den årlige rente i procent, og angiv det faste beløb, der indbetales hvert år.

Der indsættes et startbeløb på 10000 kr. på bankkontoen.

b) Bestem y_1.

Differensligninger optræder også, når man skal modellere udviklingen i populationer af dyr.

Eksempel 3 En population af dyr i et bestemt område har en fødselsrate på 5% og en dødsrate på 3% pr. år. Desuden skydes der hvert år 1000 individer i populationen.
I en model kan udviklingen i antallet af individer i populationen beskrives ved differensligningen

$$y_{n+1} = y_n + (0{,}05 - 0{,}03) \cdot y_n - 1000, \;\; n = 0,1,2,...$$

hvor y_n betegner antallet af individer i populationen til tidspunktet n (målt i år).

Øvelse 2 Eftervis, at differensligningen i eksempel 3 beskriver udviklingen i antallet af individer i populationen.

Øvelse 3 Vis, at differensligningen i eksempel 3 kan skrives på formen

$$y_{n+1} = 1{,}02 \cdot y_n - 1000, \quad n = 0,1,2,...$$

Definition 2 En differensligning på formen

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b, \;\; n = 0,1,2,...$$

kaldes en *lineær differensligning af første orden* med konstante koefficienter a og b.

Her refererer første orden til, at y_{n+1} kun afhænger af det foregående element y_n i talfølgen.

Opgave 3 En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 5 \cdot y_n + 1, \quad n = 0,1,2,...$$

Det oplyses, at $y_2 = 56$.

a) Bestem y_0 og y_1.

Differensligningerne i eksempel 2 og eksempel 3 er begge eksempler på lineære differensligninger af første orden. En løsning til en sådan differensligning kan skrives på *lukket form*, det vil sige, at y_n kan beregnes uden kendskab til de foregående led $y_1,...,y_{n-1}$ i talfølgen.

Sætning 1 Hvis $a \neq 0$ og $a \neq 1$, så kan løsningen til den lineære differensligning

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b, \;\; n = 0,1,2,...$$

skrives på den lukkede form

$$y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}, \quad n = 0,1,2,...$$

Spring beviset over.

Bevis: Vi antager, at y_0 er kendt, og regner trin for trin videre ud fra differensligningen

$$
\begin{aligned}
&y_1 = a\cdot y_0 + b \\
&y_2 = a\cdot y_1 + b = a\cdot(a\cdot y_0 + b) + b = a^2\cdot y_0 + a\cdot b + b \\
&y_3 = a\cdot y_2 + b = a\cdot\left(a^2\cdot y_0 + a\cdot b + b\right) + b = a^3\cdot y_0 + a^2\cdot b + a\cdot b + b \\
&y_4 = a\cdot y_3 + b = a\cdot\left(a^3\cdot y_0 + a^2\cdot b + a\cdot b + b\right) + b = a^4\cdot y_0 + a^3\cdot b + a^2\cdot b + a\cdot b + b \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&y_n = a\cdot y_{n-1} + b = a\cdot\left(a^{n-1}\cdot y_0 + a^{n-2}\cdot b + \ldots + a\cdot b + b\right) + b = a^n\cdot y_0 + a^{n-1}\cdot b + a^{n-2}\cdot b + \ldots + a\cdot b + b. \\
&\quad = a^n\cdot y_0 + S,
\end{aligned}
$$

hvor $S = a^{n-1}\cdot b + a^{n-2}\cdot b + \ldots + a\cdot b + b.$

Vi multiplicerer S med a:

$$a\cdot S = a\cdot\left(a^{n-1}\cdot b + a^{n-2}\cdot b + \ldots + a\cdot b + b\right) = a^n\cdot b + a^{n-1}\cdot b + \ldots + a^2\cdot b + a\cdot b.$$

De to udtryk $a\cdot S$ og S trækkes nu fra hinanden

$$a\cdot S - S = a^n\cdot b + a^{n-1}\cdot b + \ldots + a^2\cdot b + a\cdot b - \left(a^{n-1}\cdot b + a^{n-2}\cdot b + \ldots + a\cdot b + b\right)$$

Vi kan nu omskrive venstresiden og reducere højresiden, så vi får en ny og simplere ligning:

$$
\begin{aligned}
&(a-1)\cdot S = a^n\cdot b - b \\
&(a-1)\cdot S = b\cdot(a^n - 1) \\
&S = \frac{b\cdot(a^n-1)}{a-1} \\
&S = b\cdot\frac{a^n-1}{a-1}.
\end{aligned}
$$

Indsættes dette i udtrykket for y_n får vi:

$$y_n = a^n\cdot y_0 + S = a^n\cdot y_0 + b\cdot\frac{a^n-1}{a-1},\quad n = 0,1,2,\ldots$$

Sætningen er hermed bevist.

Opgave 4

En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 3, \quad n = 0,1,2,...$$

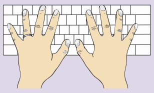
Det oplyses, at $y_0 = 4$.

a) Bestem y_1 og y_2.

b) Opskriv løsningen til differensligningen på lukket form.

c) Benyt den lukkede form til at beregne y_5.

Opgave 5



I en model kan udviklingen i antallet af individer i en bestemt population af dyr beskrives ved differensligningen

$$y_{n+1} = 0{,}95 \cdot y_n + 100, \quad n = 0,1,2,...$$

hvor y_n betegner antallet af individer i populationen efter *n* år. Det oplyses, at der er 50 individer i populationen til tidspunktet $n = 0$.

a) Benyt modellen til at bestemme antallet af individer i populationen efter 3 år.

b) Opskriv en løsning til differensligningen på lukket form.

c) Benyt modellen til at bestemme, hvor mange år der går, før antallet af individer i populationen overstiger 1000 dyr.

Diskret logistisk vækst

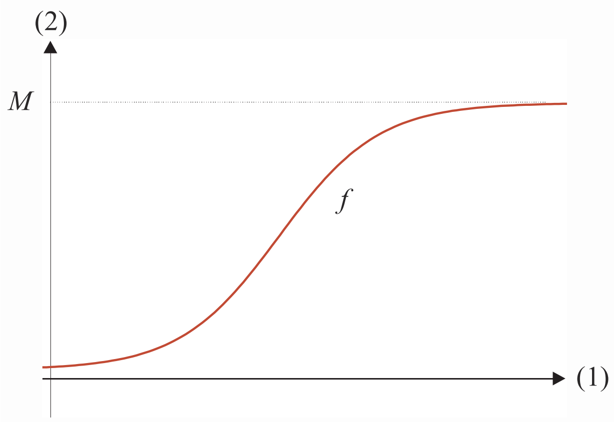
Vi vil nu give et eksempel på en *ikke lineær* førsteordens differensligning. Vi minder om, at udviklingen i antallet af individer i en population af dyr ofte kan beskrives ved en funktion *f*, der er løsning til den logistiske differentialligning

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot (M - y),$$

hvor $f(t)$ betegner antallet af individer i populationen til tidspunktet *t*. Løsningen til denne ligning er

$$f(t) = \frac{M}{1 + C \cdot e^{-a \cdot M \cdot t}}.$$

Hvis antallet af individer i populationen starter under bæreevnen *M*, så vil antallet af individer nærme sig asymptotisk til linjen $y = M$.



Nogle gange kan man godt forstille sig, at antallet af individer i en population på et tidspunkt kommer over bæreevnen *M*. Vi vil i det følgende se på en diskret model, der kan illustrere dette fænomen. Udviklingen i antallet af individer kan beskrives ved en differensligning på formen

$$y_{n+1} = y_n + a \cdot y_n \cdot (M - y_n), \quad n = 0,1,2,\dots,$$

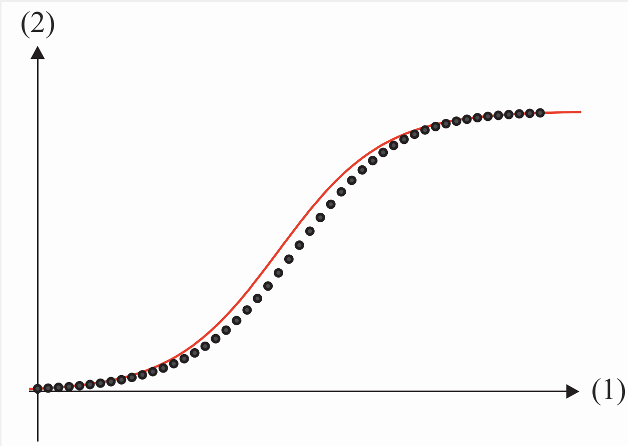
hvor y_n betegner antallet af individer i populationen til tidspunktet *n*. Her kan *n* for eksempel betegne antal år, måneder, uger, døgn eller lignende.

Eksempel 4 Vi betragter nu en differensligning på formen

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}001 \cdot y_n \cdot (200 - y_n), \quad n = 0,1,2\dots$$

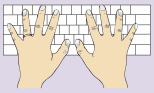
hvor y_n betegner antallet af individer i en population til tidspunktet *n*.

På figuren nedenfor ses et punktplot af udviklingen i y_n med $y_0 = 2$ sammen med grafen for løsningen til den tilhørende differentialligning $y' = 0{,}001 \cdot y \cdot (200 - y)$ med $y(0) = 2$.



I dette tilfælde bemærker vi, at de to modeller stemmer nogenlunde overens. Dette skyldes, at antallet af individer i populationen udvikler sig langsomt. Det vil senere vise sig, at dette ikke altid er tilfældet.

Opgave 6



I en diskret model kan udviklingen i antallet af individer i en population beskrives ved en løsning til differensligningen

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}0012 \cdot y_n \cdot (300 - y_n), \quad n = 0,1,2,...$$

hvor y_n betegner antallet af individer i populationen til tidspunktet *n* (målt i måneder).

Det oplyses, at der er 50 individer i populationen til tidspunktet $n = 0$.

a) Benyt modellen til at tegne et punktplot over udviklingen i antallet af individer i populationen de første 20 måneder.

I en kontinuert model kan udviklingen i antallet af individer i den samme population beskrives ved

$$f(t) = \frac{M}{1 + C \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot M \cdot t}},$$

hvor $f(t)$ betegner antallet af individer i populationen til tidspunktet *t* (målt i måneder).

b) Gør rede for, at $a = 0{,}0012$, $C = 5$ og $M = 300$.

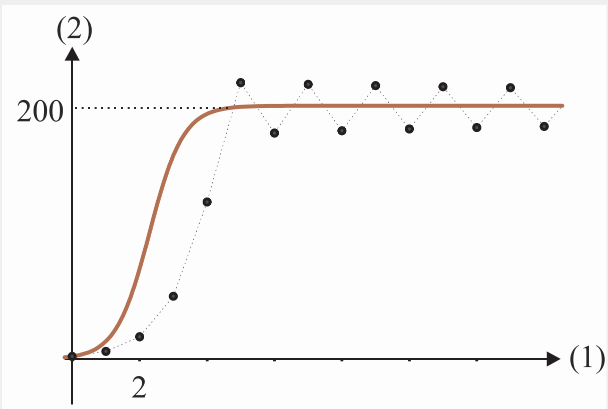
c) Bestem afvigelsen mellem de to modellers forudsigelse af antallet af individer i populationen efter 10 måneder.

Eksempel 5 Vi betragter en differensligning på formen

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}01 \cdot y_n \cdot (200 - y_n), \quad n = 0,1,2...$$

hvor y_n betegner antallet af individer i en population til tidspunktet *n*.

Hvis vi vælger startværdien $y_0 = 2$, kan vi tegne følgende punktplot af udviklingen i y_n sammen med grafen for løsningen til differentialligningen $y' = 0{,}01 \cdot y \cdot (200 - y)$, hvor $y(0) = 2$.



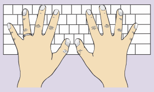
I dette tilfælde bemærker vi, at de to modeller adskiller sig fra hinanden, samt at løsningen til differensligningen svinger omkring bæreevnen på 200.

Øvelse 4 Tegn et punktplot over løsningen til differensligningen

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}012 \cdot y_n \cdot (180 - y_n), \quad n = 0,1,2,...$$

når $y_0 = 2$. Kommentér løsningen.

Opgave 7 I en diskret model kan udviklingen i antallet af individer i en population beskrives ved en løsning til differensligningen



$$y_{n+1} = y_n + 0{,}002 \cdot y_n \cdot (400 - y_n), \quad n = 0,1,2,...$$

hvor y_n betegner antallet af individer i populationen til tidspunktet n (målt i måneder).

Det oplyses, at der er 75 individer i populationen til tidspunktet $n = 0$.

a) Benyt modellen til at bestemme antallet af individer i populationen til tidspunktet $n = 10$.

I en kontinuert model kan udviklingen i antallet af individer i den samme population beskrives ved en funktion f, der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}002 \cdot N \cdot (400 - N),$$

hvor $f(t)$ betegner antallet af individer i populationen til tidspunktet t (målt i måneder).

b) Bestem en forskrift for f.

c) Tegn de to modeller i samme koordinatsystem for de første 20 måneder.

Cobwebdiagrammer for førsteordens differensligninger

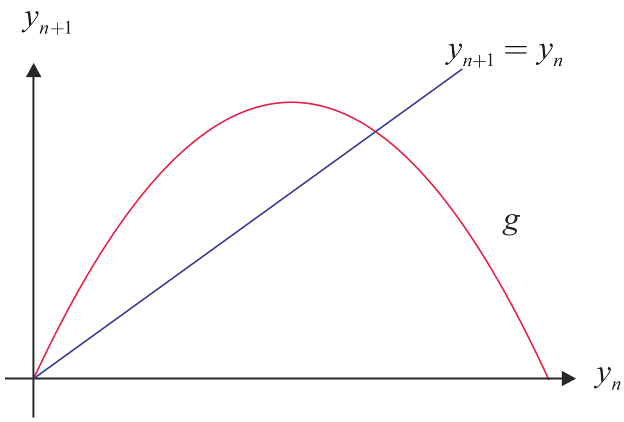
Vi vil nu se på en anden måde, hvorpå man kan visualisere løsningen til en differensligning af første orden. Vi betragter differensligningen på formen

$$y_{n+1} = g(y_n),\ \ n = 0,1,2,...$$

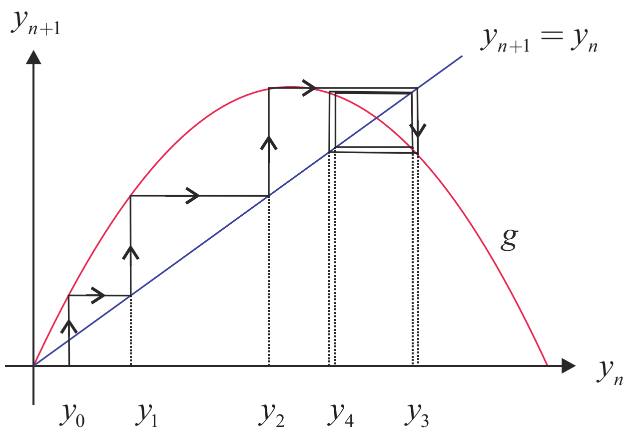
hvor g er en kontinuert funktion.

Vi starter med at tegne grafen for g samt linjen l med ligningen $y_{n+1} = y_n$ i samme koordinatsystem, hvor vi har y_n ud ad førsteaksen og y_{n+1} op ad andenaksen. Dette diagram kaldes et *cobwebdiagram*. Herefter afsættes y_0 på førsteaksen. Aflæs nu $y_1 = g(y_0)$ på grafen for g og gå vandret hen til linjen l. Gå dernæst lodret op/ned indtil grafen for g mødes. Her aflæses $y_2 = g(y_1)$. Fortsæt på denne måde for at bestemme $y_3,...,y_n$.

Vi illustrerer metoden med et eksempel, hvor g er et andengradspolynomie:

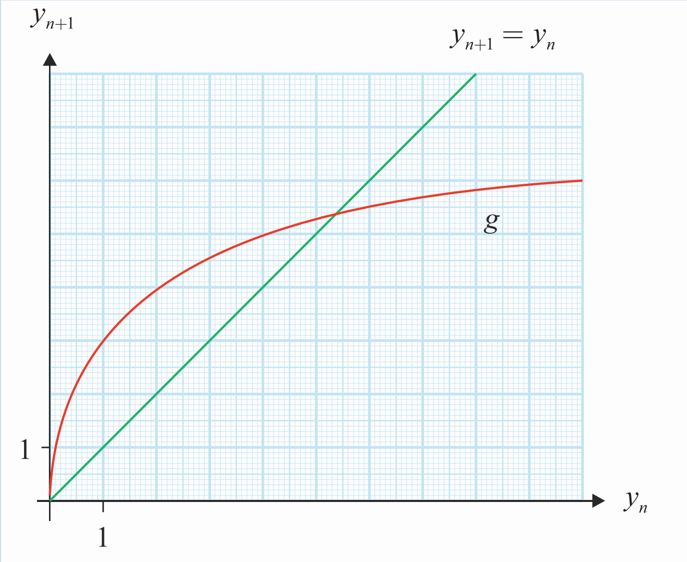


Cobwebdiagram



Cobwebdiagram med begyndelsesværdi y_0

Øvelse 5 På figuren ses et cobwebdiagram for en differensligning $y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0,1,2,...$



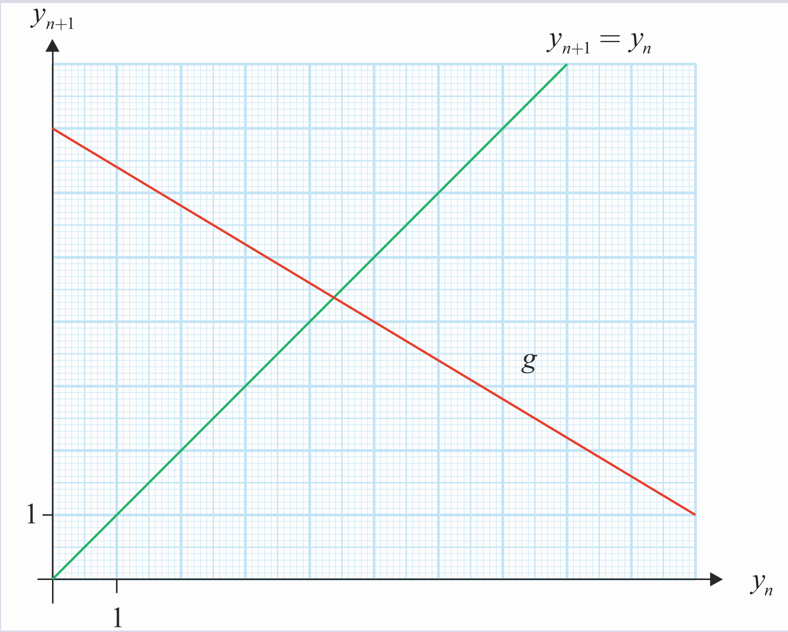
a) Start med $y_0 = 1$, og benyt cobwebdiagrammet til at bestemme y_1 og y_2.

b) Fortsæt med at bestemme y_3, y_4,... efter samme metode.

c) Kan man sige noget om y_n, når n bliver stor?

Opgave 8 På figuren ses et cobwebdiagram for differensligningen

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0,1,2,...$$



Det oplyses, at $y_0 = 3$.

a) Benyt cobwebdiagrammet til at bestemme y_1 og y_2.

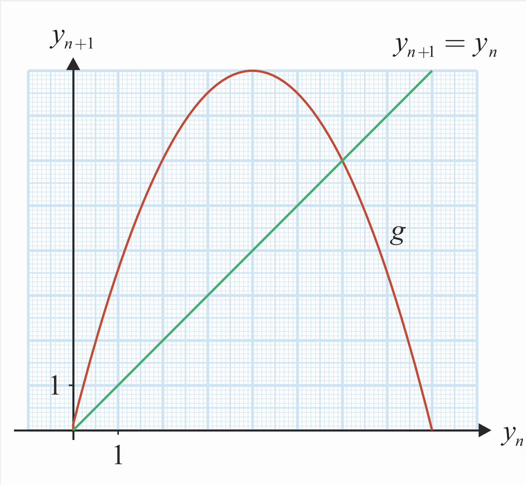
I ovenstående øvelse og opgave er forskriften for funktionen g ikke angivet. Hvis vi kender forskriften for g, så kan vi tegne cobwebdiagrammet.

Eksempel 6 Vi betragter nu differensligningen

$$y_{n+1} = 4 \cdot y_n - \frac{1}{2} \cdot y_n^{\,2}, \quad n = 0,1,2,...$$

Denne er på formen $y_{n+1} = g(y_n)$, hvor $g(x) = 4 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2$.

Grafen for g er en parabel, der har toppunkt i $(4,8)$ og skærer førsteaksen i punkterne $(0,0)$ og $(8,0)$. Nedenfor ses cobwebdiagrammet for denne differensligning.



Definition 3 Ved et *fikspunkt* for en differensligning af første orden skrevet på formen $y_{n+1} = g(y_n)$ forstås en værdi $\tilde{y}$, der opfylder, at $\tilde{y} = g(\tilde{y})$.

Eksempel 7 Fikspunkterne for differensligningen i eksempel 6 bestemmes ved at løse ligningen

$$\tilde{y} = g(\tilde{y}) = 4 \cdot \tilde{y} - \frac{1}{2} \cdot \tilde{y}^2,$$

som har løsningerne $\tilde{y} = 0$ og $\tilde{y} = 6$.

Bemærk, at de to løsninger er førstekoordinaterne til skæringspunkterne mellem grafen for g og linjen med ligningen $y_{n+1} = y_n$ i cobwebdiagrammet.

Opgave 9 En differensligning er bestemt ved

$$y_{n+1} = 6 \cdot y_n - y_n^{\ 2}, \quad n = 0,1,2,...$$

a) Tegn et cobwebdiagram for differensligningen.

b) Bestem de to fikspunkter for differensligningen grafisk og ved beregning.

Eksempel 8 Vi betragter differensligningen $y_{n+1} = \sqrt{9 \cdot y_n}$, $n = 0,1,2,...$
Vi bestemmer de to fikspunkter $\tilde{y} = 0$ og $\tilde{y} = 9$ til denne differensligning ved løse ligningen $\tilde{y} = \sqrt{9 \cdot \tilde{y}}$.
Vi ser altså, at hvis $y_0 = 9$, så vil $y_1 = y_2 = ... = y_n = 9$ for alle *n*. Og hvis $y_0 = 0$, så vil $y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$ for alle *n*.
Sætter vi vores startpunkt til $y_0 = 1$ så finder vi, at $y_1 = 3$, $y_2 = 5{,}196..,\ldots,$ $y_{12} = 8{,}995..$
Vi ser, at $y_n \to 9$ for $n \to \infty$.

Definition 4 Et fikspunkt $\tilde{y}$ for en førsteordens differensligning på formen $y_{n+1} = g(y_n)$ kaldes

- *stabilt* (eller tiltrækkende), hvis y_n nærmer sig $\tilde{y}$, når y_0 starter "tæt" på $\tilde{y}$.
- *ustabilt* (eller frastødende), hvis y_n fjerner sig fra $\tilde{y}$, når y_0 starter "tæt" på $\tilde{y}$.

Sætning 2 Hvis *g* er en differentiabel funktion, og $\tilde{y}$ er et fikspunkt for differensligningen på formen $y_{n+1} = g(y_n)$, så gælder følgende:

- Hvis $|g'(\tilde{y})| < 1$, så er $\tilde{y}$ et stabilt fikspunkt.
- Hvis $|g'(\tilde{y})| > 1$, så er $\tilde{y}$ et ustabilt fikspunkt.

Hvis $|g'(\tilde{y})| = 1$, så kan vi ikke på baggrund af $g'(\tilde{y})$ sige noget præcist om opførslen af den talfølge, der er løsning til differensligningen.
Beviset for sætning 2 benytter middelværdisætningen fra differentialregningen. Gennemførelse af beviset ligger uden for målet med dette materiale.

Opgave 10 En differensligning er bestemt ved

$$y_{n+1} = 4 \cdot y_n - y_n^{\ 2}, \quad n = 0,1,2,...$$

a) Tegn et cobwebdiagram for differensligningen.

b) Bestem de to fikspunkter for differensligningen.

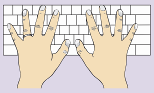
c) Undersøg for hvert af fikspunkterne, om det er stabilt eller ustabilt.

Øvelse 6 I forbindelse med modelleringen af antallet af individer i en population af dyr med ikke overlappende generationer (for eksempel døgnfluer), kan man benytte Pielou's logistiske differensligning

$$y_{n+1} = \frac{\alpha \cdot y_n}{1 + \beta \cdot y_n}, \quad \alpha > 1, \quad \beta > 0.$$

a) Vis, at $\tilde{y} = \dfrac{\alpha - 1}{\beta}$ er et stabilt fikspunkt for differensligningen.

Opgave 11 I en model kan udviklingen i antallet af individer i en population af dyr beskrives ved differensligningen



$$y_{n+1} = \frac{3 \cdot y_n}{1 + 0{,}001 \cdot y_n}, \qquad n = 0,1,2,...$$

hvor y_n betegner antallet af individer i populationen (målt i tusinde) efter n måneder. Det oplyses, at der er 100 tusinde dyr i populationen til tidspunktet $n = 0$.

a) Benyt modellen til at bestemme antallet af individer i populationen efter 5 måneder.

b) Gør rede for, at $\tilde{y} = 2000$ er et stabilt fikspunkt for modellen.

Andenordens homogene lineære differensligninger

I de tidligere afsnit har vi set på differensligninger, hvor y_{n+1} alene har været bestemt ud fra y_n. Vi vil nu se nærmere på en anden type af differensligninger, hvor y_{n+1} afhænger af de to foregående elementer i talfølgen, nemlig y_n og y_{n-1}. Denne type af differensligninger kaldes *andenordens differensligninger*.

Eksempel 9 Vi kan definere en følge af tal ud fra en andenordens differensligning ved

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}, \; n = 1,2,3,...$$

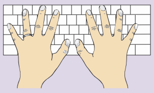
Hvis vi vælger $y_0 = 1$ og $y_1 = 1$, får vi

n	2	3	4	5	6	7	8	9
y_n	1+1=2	1+2=3	2+3=5	3+5=8	5+8=13	8+13=21	13+21=34	21+34=55

Denne talfølge kaldes *Fibonaccitallene*.

Vi lægger mærke til, at vi skal vælge to startværdier til forskel fra førsteordens differensligninger, hvor vi kun skal vælge én startværdi.

Opgave 12 En andenordens differensligning er givet ved $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}, \quad n = 1,2,3,...$



a) Bestem y_{15} og y_{20}, når vi vælger $y_0 = 1$ og $y_1 = 3$.

b) Tegn et punktplot for differensligningen.

Andenordens differensligningen i opgave 12 kaldes for en *Lukasfølge*.

Vi kan prøve at bestemme et lukket udtryk, der kan give os værdien af y_n i den talfølge, der er løsning til en andenordens differensligning.

Eksempel 10 Vi betragter igen den andenordens differensligning, som giver Fibonaccitalfølgen.

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$$
$$y_{n+1} - y_n - y_{n-1} = 0$$

Bemærk, at vi her udtrykker y_{n+1} ved y_n og y_{n-1}.
I et forsøg på at bestemme et lukket udtryk for y_n, så kan vi prøve med forskellige typer af udtryk. Vi prøver med et potensudtryk på formen $y_n = m^n$, hvor $m \neq 0$, og får

$$m^{n+1} - m^n - m^{n-1} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$m^{n-1} \cdot \left(m^2 - m - 1\right) = 0$$

Vi har nu fået omformuleret vores andenordens differensligning til et produkt af en potens og et andengradsudtryk i *m*. Da $m^{n-1} \neq 0$ kan vi ved hjælp af nulreglen slutte, at $m^2 - m - 1 = 0.$ Diskriminanten er $d = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$. Vi får da to løsninger

$$m_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} \text{ og } m_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \cdot 1}.$$

Man kan vise (men det gør vi ikke), at en løsning til andenordens differensligningen kan skrives ved hjælp af de to løsninger m_1 og m_2 på den lukkede form:

$$y_n = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

hvor C_1 og C_2 er konstanter.
Vi kan bestemme disse to konstanter C_1 og C_2 ud fra vores startværdier $y_0 = 1$ og $y_1 = 1$.
Vi får dermed to ligninger med to ubekendte:

$$1 = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 \Leftrightarrow 1 = C_1 + C_2$$
$$1 = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1.$$

Løsningen til dette ligningssystem er $C_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$ og $C_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$.

Dvs. at et udtryk på lukket form for det n'te element i Fibonaccifølgen er givet ved

$$y_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \; n = 0,1,2,...$$

Øvelse 7 Benyt metoden i eksempel 10 til at bestemme en løsning på lukket form til andenordens differensligningen

$$y_{n+1} = 5 \cdot y_n - 6 \cdot y_{n-1}, \; n = 1,2,3,...$$

når vi vælger $y_0 = 1$ og $y_1 = 3$.

Definition 5 Differensligningen

$$y_{n+1} = \alpha \cdot y_n + \beta \cdot y_{n-1} \;, \;\; \beta \neq 0, \; n = 1,2,3,...$$

kaldes den generelle homogene lineære andenordens differensligning med konstante koefficienter α og β.

Polynomiet $P(x) = x^2 - \alpha \cdot x - \beta$ kaldes det karakteristiske polynomium hørende til den homogene andenordens differensligning.

Sætning 3 Hvis α og β er reelle tal, hvor $\beta \neq 0$, og det karakteristiske polynomium hørende til den generelle homogene andenordens differensligning

$$y_{n+1} = \alpha \cdot y_n + \beta \cdot y_{n-1} \;, \;\; n = 1,2,3,...$$

har en ikke-negativ diskriminant D, så kan løsningen til denne differensligning skrives på lukket form på følgende måde

$$D > 0 \; : \; y_n = C_1 \cdot m_1^n + C_2 \cdot m_2^n$$

$$D = 0 \; : \; y_n = C_1 \cdot m_1^n + C_2 \cdot n \cdot m_1^n$$

hvor C_1 og C_2 er konstanter, og $P(x)$ har rødderne m_1 samt m_2.

Bemærk, at hvis $D = 0$, så er $m_1 = m_2$. I tilfældet $D < 0$ findes også en løsning på lukket form til den homogene andenordens differensligning i definition 5. Men at opskrive denne løsning er mere kompliceret. Dette ligger uden for målet med dette forberedelsesmateriale. Beviset for sætning 3 udelades.
Bemærk, at konstanterne C_1 og C_2 kan bestemmes ud fra y_0 og y_1 ved at løse to ligninger med to ubekendte som i eksempel 10 side 18.

Opgave 13

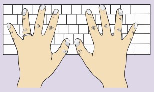
En andenordens differensligning er bestemt ved

$$y_{n+1} = 8 \cdot y_n - 16 \cdot y_{n-1}, \quad n = 1,2,3...$$

Det oplyses, at $y_0 = 3$ og $y_1 = 20$.

a) Opskriv løsningen til differensligningen på lukket form.

Opgave 14



I en makroøkonomisk model kan udviklingen i det totale forbrug i et samfund beskrives ved en løsning til differensligningen

$$y_{n+1} = 1{,}46 \cdot y_n - 0{,}39 \cdot y_{n-1}, \quad n = 1,2,.3,...$$

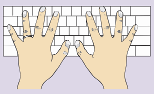
hvor y_n betegner samfundets totale forbrug (målt i mia. kr.) til tidspunktet n (målt i år). Det oplyses, at samfundets totale forbrug er 100 mia. kr. til tidspunktet $n = 0$, og samfundets totale forbrug er 105 mia. kr. til tidspunktet $n = 1$.

a) Benyt modellen til at bestemme samfundets totale forbrug til tidspunktet $n = 5$.

b) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor samfundets totale forbrug overstiger 500 mia. kr.

Kilde: Økonom P.A. Samuelson.

Opgave 15



I en model kan udviklingen i antallet af røde blodlegemer i blodbanen hos en bestemt bloddonor beskrives ved løsningen til differensligningen

$$y_{n+1} = 0{,}8 \cdot y_n + 0{,}2 \cdot y_{n-1}, \quad n = 1,2,3,...$$

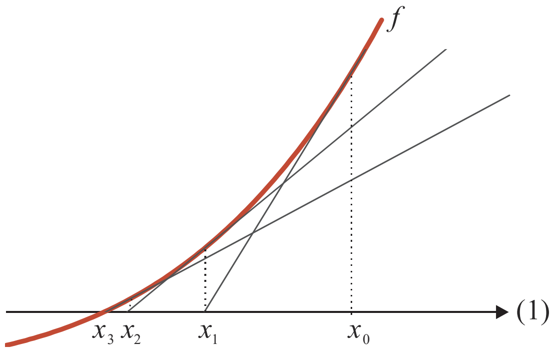
hvor y_n betegner antallet af røde blodlegemer (målt i mia.) til tidspunkt n (målt i døgn efter at der er doneret blod).
Til tidspunktet $n = 0$ er antallet af røde blodlegemer i kroppen 25000 mia., og til tidspunktet $n = 1$ er antallet af røde blodlegemer i kroppen 26000 mia.

a) Benyt modellen til at bestemme antallet af røde blodlegemer i blodbanen hos bloddonoren til tidspunktet $n = 6$.

b) Benyt differensligningens løsning på lukket form til at argumentere for, hvordan antallet af røde blodlegemer i kroppen udvikler sig.

Newton-Raphsons metode

Endnu et eksempel på en anvendelse af differensligninger møder vi i Newton-Raphsons metode til bestemmelse af nulpunkter for en differentiabel funktion *f*. Metoden er forbløffende hurtig til at finde en god tilnærmet værdi af et nulpunkt.
Ideen i metoden er at starte med et gæt på et nulpunkt x_0, hvorefter tangenten til grafen for *f* i punktet $(x_0, f(x_0))$ følges indtil den rammer førsteaksen. Dette punkt er det næste gæt på nulpunktet for *f*. Herefter gentages ovenstående.



Vi illustrer metoden ud fra den differentiable funktion $f(x) = x^4 - 3$. Vi ønsker at bestemme en af løsningerne til $f(x) = 0$. Vi starter med at gætte på $x_0 = 2$. En ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $(2, f(2))$ bestemmes til $y = 32x - 51$. Denne skærer førsteaksen i $x_1 = 51/32 \approx 1{,}59375$, hvilket er vores næste gæt. En ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $(1{,}593..., f(1{,}593...))$ bestemmes til $y = 16{,}1927 \cdot x - 22{,}3554$. Denne skærer førsteaksen i $x_1 = 22{,}3554 / 16{,}1927 \approx 1{,}38058$, hvilket er vores næste gæt. Fortsætter vi på denne måde fås:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	1,59375	1,38058	1,32046	1,31610	1,31607

Løser vi ligningen $f(x) = 0$ fås $x^4 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{3} \approx \pm 1{,}31607$.. Vi ser altså, at allerede det 5'te gæt rammer den rigtige værdi med 6 betydende cifre. Dette er meget typisk for metoden.

Øvelse 8 Gennemfør selv overstående metode for $f(x) = x^3 - 5$ med startgæt $x_0 = 1$.

Sætning 4 Newton-Raphsons metode til bestemmelse af et nulpunkt for en differentiabel funktion *f* kan beskrives ved differensligningen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,...$$

Bemærk, at ovenstående differensligning er på formen $x_{n+1} = g(x_n)$, hvor $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Øvelse 9 Bevis sætning 4.
Vink: benyt, at en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $(x_n, f(x_n))$ er givet ved $y = f'(x_n) \cdot (x - x_n) + f(x_n)$.

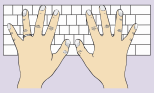
Opgave 16 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - x - 2.$$

a) Opskriv de første 3 elementer i talfølgen, der er løsning til differensligningen hørende til Newton-Raphsons metode, når $x_0 = 1$.

b) Tegn grafen for *f*, og benyt denne til lave et startgæt for bestemmelse af det andet nulpunkt.

Opgave 17 En funktion *f* er bestemt ved



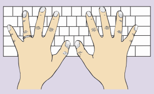
$$f(x) = e^x + x - 3.$$

a) Tegn grafen for *f*, og benyt denne til at bestemme et startgæt x_0 for Newton-Raphsons algoritme til bestemmelse af nulpunktet for *f*.

b) Bestem de første fire elementer i løsningen til differensligningen hørende til Newton-Raphsons metode med startgættet x_0.

c) Løs ligningen $f(x) = 0$ med et matematisk værktøjsprogram, og sammenlign resultatet med det 4. element i løsningen til differensligningen hørende til Newton-Raphsons metode med startgæt x_0.

Opgave 18 En funktion *f* er bestemt ved



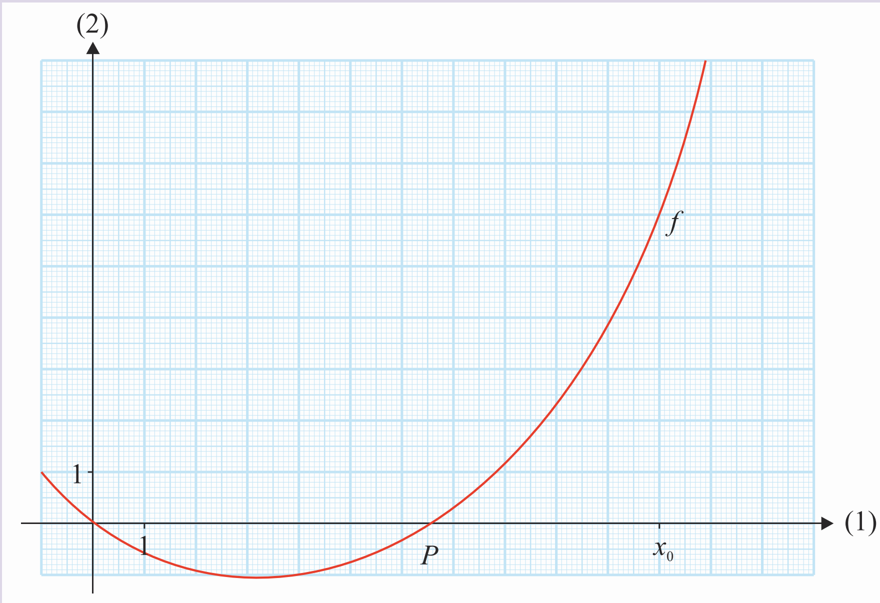
$$f(x) = e^x - x - 3.$$

Ligningen $f(x) = 0$ har én positiv løsning.

a) Benyt Newton-Raphsons metode med startgæt $x_0 = 2$ til at bestemme den positive løsning til ligningen $f(x) = 0$ med 4 betydende cifre.

Øvelse 10 Tegn en skitse af en graf for en differentiabel funktion med et startgæt x_0, hvor det søgte nulpunkt ikke findes ved hjælp af Newton-Raphsons algoritme.

Opgave 19



På figuren ses grafen for en differentiabel funktion f, der har et nulpunkt P. En talfølge x_n er løsning til differensligningen hørende til Newton-Raphsons metode og har startværdi $x_0 = 11$.

a) Bestem x_1 og x_2 i talfølgen, der starter i $x_0 = 11$, ved at indtegne tangenter til grafen for f.

Eksempel 11 Et eksempel på en anvendelse af Newton-Raphsons metode er udregningen af en tilnærmet værdi af kvadratroden af et positivt tal a ved hjælp af simple regneregler. Vi udnytter her, at $\sqrt{a}$ er den positive rod til polynomiet $f(x) = x^2 - a$. Opskriver vi differensligningen hørende til Newton-Raphsons metode for denne funktion fås

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\ &= x_n - \tfrac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \end{aligned}$$

fx =1/2*(E1+10/E1)

D	E
0	2
1	3,5
2	3,178571
3	3,162319
4	3,162278
5	3,162278
6	3,162278

Ønsker vi for eksempel at bestemme $\sqrt{10}$ ved hjælp af metoden, så gætter vi for eksempel på $x_0 = 2$ og bestemmer de første elementer i talfølgen ved hjælp af et regneark (eller en simpel lommeregner). Bemærk, at allerede $x_4 = 3{,}162278$ har de første 6 cifre fælles med $\sqrt{10} \approx 3{,}16227766...$

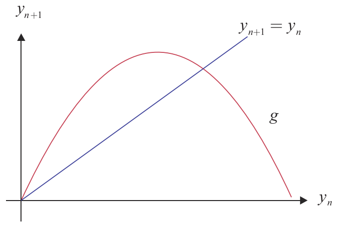
Indstiksark til formelsamlingen

Differensligning af første orden (F1) $y_{n+1}=g(y_n),\ n=0,1,2...$

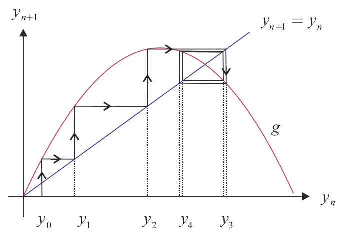
Lineær differensligning af første orden med konstante koefficienter (F2) $y_{n+1}=a\cdot y_n+b,\ n=0,1,2...$

Løsning på lukket form (F3) $y_n=a^n\cdot y_0+b\cdot\dfrac{a^n-1}{a-1},\quad n=0,1,2,...,\ a\neq 0,\ a\neq 1.$

Cobwebdiagram (F4)



Cobwebdiagram



Cobwebdiagram med begyndelsesværdi y_0

Fikspunkt $\tilde{y}$ for differensligning af første orden $y_{n+1}=g(y_n)$

(F5) $g(\tilde{y})=\tilde{y}$

(F6) $|g'(\tilde{y})|<1,$ stabilt (tiltrækkende)

$|g'(\tilde{y})|>1,$ ustabilt (frastødende)

Homogen lineær differensligning af anden orden med karakteristisk polynomium P

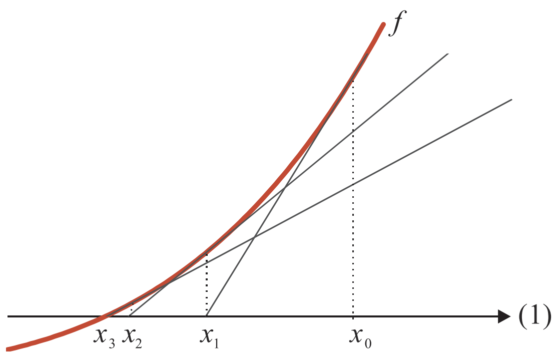
(F7) $y_{n+1}=\alpha\cdot y_n+\beta\cdot y_{n-1}\ ,\ \beta\neq 0,\ n=1,2,3,....$

(F8) $P(x)=x^2-\alpha\cdot x-\beta$, diskriminant D, rødder m_1 og m_2

(F9) $D>0\ :\ y_n=C_1\cdot m_1^{\,n}+C_2\cdot m_2^{\,n}$

$D=0\ :\ y_n=C_1\cdot m_1^{\,n}+C_2\cdot n\cdot m_1^{\,n}$

Newton-Raphsons differensligning til bestemmelse af nulpunkter (F10) $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,...$



GeoGebra (se bilag 2) eller Excel er klart nemmere at bruge til differensligninger.

Bilag 1: Løsning af differensligninger i Maple 2019

Udgangspunktet er en førsteordens differensligning $y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 3,\ n = 0,1,2,...$ med startværdien $y_0 = 20$.

I Maple 2019 defineres differensligningen som en **procedure** *y*.

```
y := proc(n) option remember; 2·y(n − 1) + 3; end;
                                        y := proc(n) option remember; 2*y(n − 1) + 3 end proc
y(0) := 20;
                                                                            y(0) := 20
```

Læg mærke til at y_n bestemmes ud fra værdien til y_{n-1} i Maple 2019 syntaksen.
Ud fra denne proceduredefinition af *y* og startværdien kan efterfølgende værdier bestemmes.

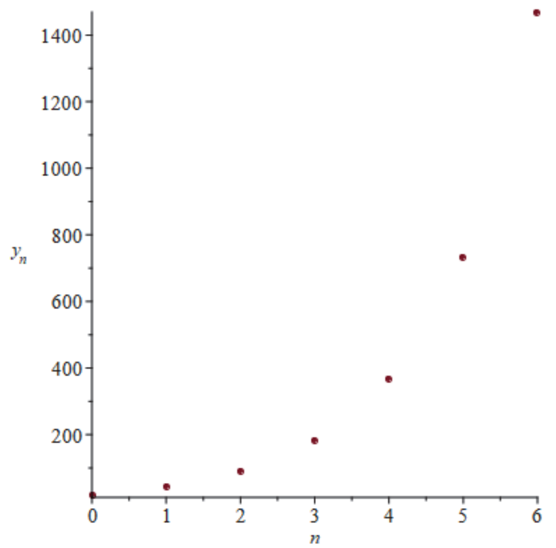
```
y(10)
                                                                                 23549
```

En talfølge af værdier for y_{n+1} kan bestemmes med **seq** kommandoen.

```
seq(y(n), n = 0 ..6)
                                                          20, 43, 89, 181, 365, 733, 1469
```

Et punktplot af udviklingen i y_{n+1} kan tegnes med **plot** kommandoen

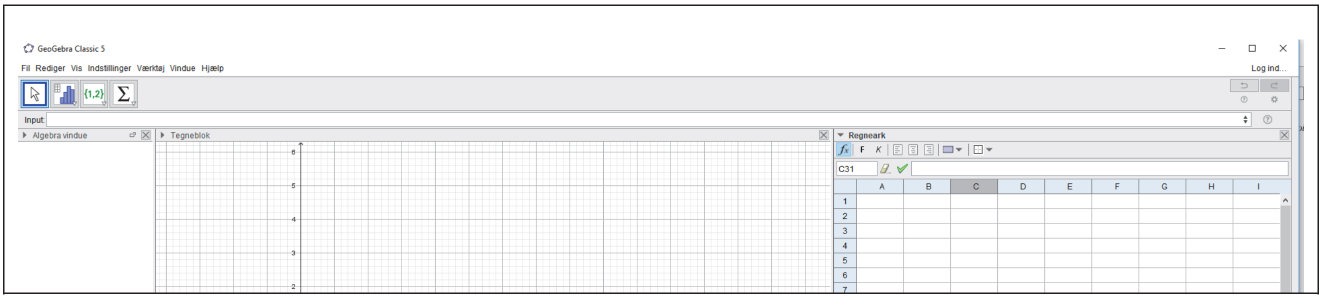
```
plot([seq([n, y(n)], n = 0 ..6)], style = point, labels = [n, y_n], symbol = solidcircle)
```

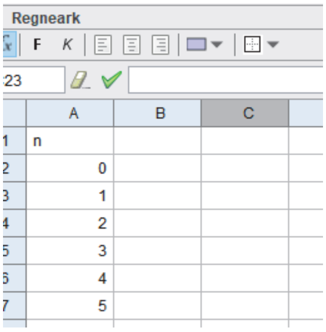


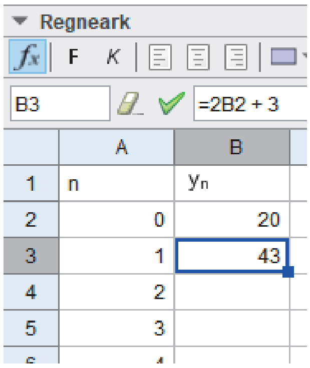
Bilag 2: Løsning af differensligninger i Geogebra 5

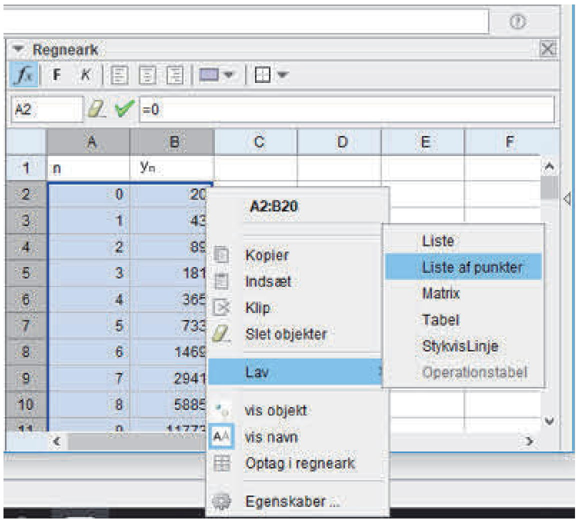
Udgangspunktet er en førsteordens differensligning $y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 3,\ n = 0,1,2,...$ med startværdien $y_0 = 20$.

I Geogebra 5 vælges en visning med Algebra, Tegneblok og Regnearkvinduerne.







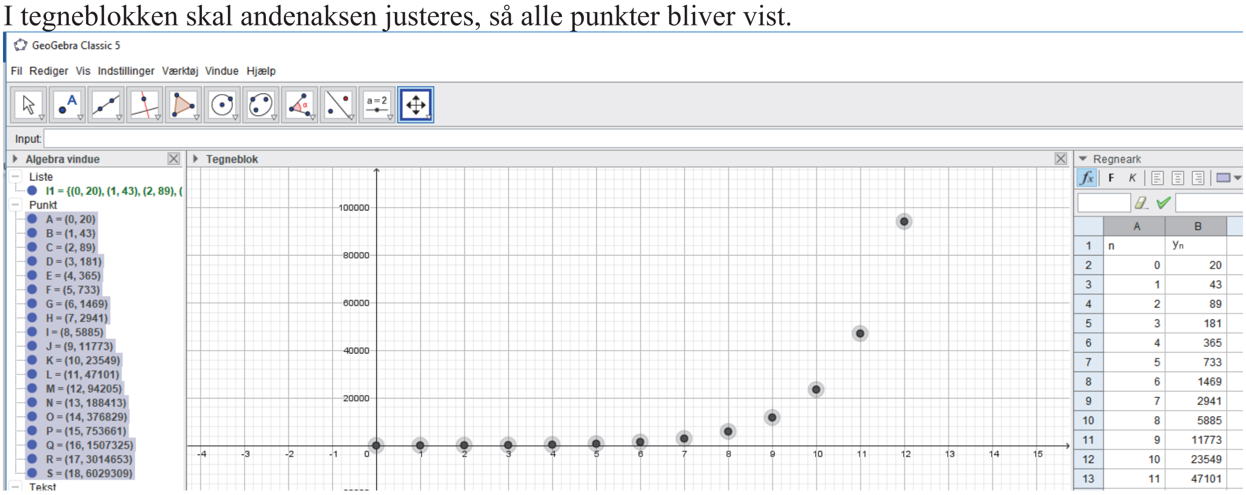


I regnearket oprettes en søjle *A* for *n*. I søjle B indtastes startværdien i B2, og i den næste celle B3 indtastes værdien bestemt som "=2*B2+3".

De resterende værdier i søjle B udregnes ved at bruge regnearksfaciliteten med at trække den markerede celle ned.

Ud fra de to søjler kan et punktplot tegnes ved at markere værdierne i de to søjler, og højreklikke. Derefter skal menuerne "Lav" -> "Liste af punkter" vælges.

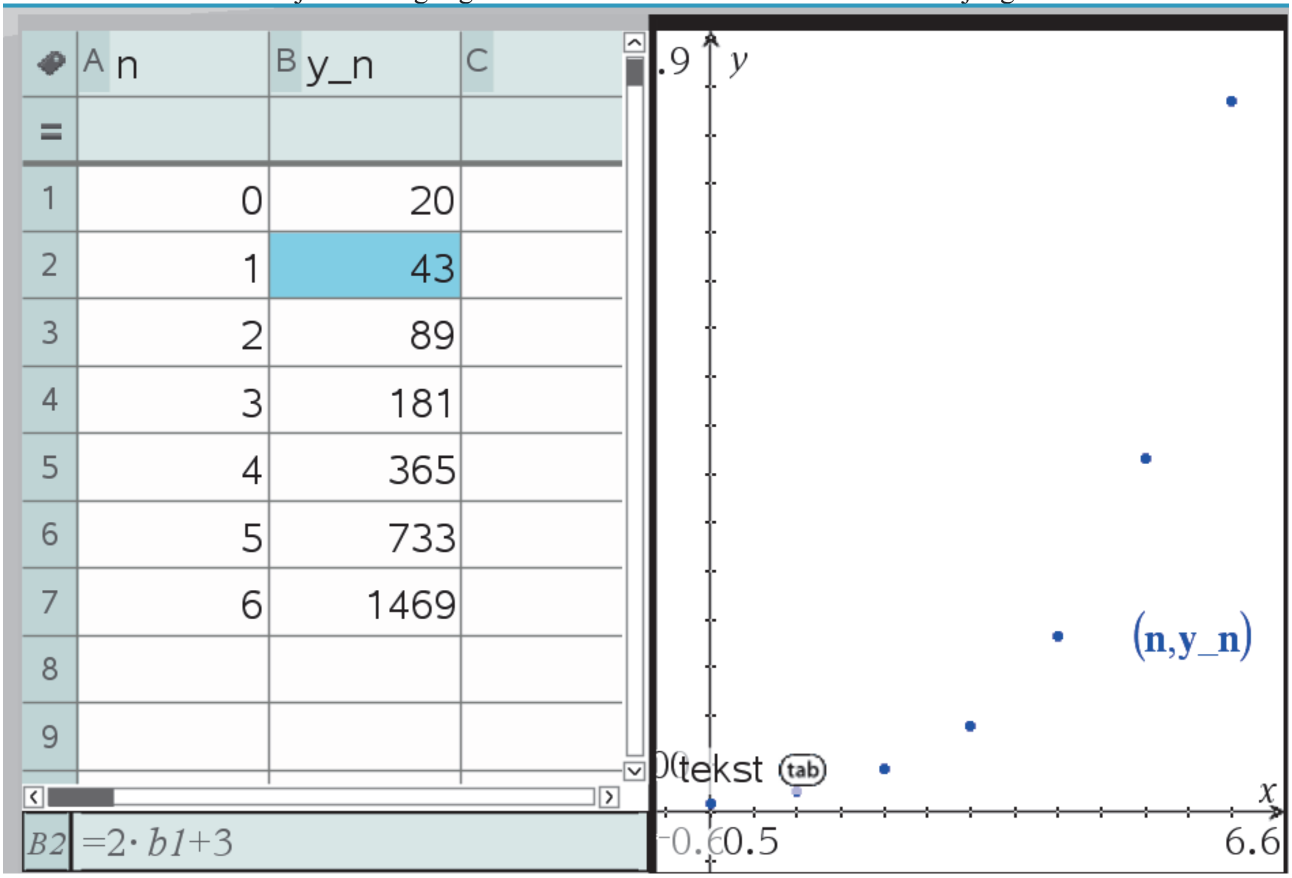
I tegneblokken skal andenaksen justeres, så alle punkter bliver vist.



Bilag 3: Løsning af differensligninger i TI-Nspire

Udgangspunktet er en førsteordens differensligning $y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 3,\ n = 0,1,2,\ldots$ med startværdien $y_0 = 20$.

Start med at åbne værktøjet lister og regneark sammen med et vindue med værktøjet grafer.



I regnearket oprettes en søjle *A* for *n*. I søjle B indtastes startværdien i B1, og i den næste celle B2 indtastes værdien bestemt som ”=2*B1+3”. De resterende værdier i søjle B udregnes ved at bruge regnearksfaciliteten med at trække den markerede celle ned.
Der laves nu et punktplot i vinduet med grafer, hvor der ”zoomes” ind på data.