STX

STUDENTEREKSAMEN

STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

MATEMATIK A

Forberedelsesmateriale

Torsdag den 15. januar 2026

stx26-27-MAT/A-150126

Børne- og Undervisningsministeriet

Forberedelsesmateriale til stx-A MATEMATIK 2026-2027

Der skal afsættes 6 timer af holdets sædvanlige undervisningstid til, at eleverne kan arbejde med forberedelsesmaterialet forud for den skriftlige prøve. Det er tilladt at modtage vejledning under arbejdet med dette forberedelsesmateriale.

Ved den skriftlige prøve kan indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet indgå i opgaver i begge delprøver.

Materialet indeholder teori, eksempler og øvelser i tilknytning til emnet ”Polære funktioner”.

Resultaterne af arbejdet med dette forberedelsesmateriale bør medbringes til delprøve 2 af den skriftlige prøve. Hvis der til delprøve 1 kræves kendskab til særlige definitioner og formler, vil der være et indstiksark til formelsamlingen. Dette indstiksark udleveres til eksamen sammen med opgaverne. Det findes også til slut i dette materiale.

Det foreliggende materiale er gældende i 2026 og 2027 for eksamen i maj-juni, august og december efter 2017-ordningen.

Polære funktioner

Indholdsfortegnelse

Indledning

I dette materiale introduceres polære koordinater (r,θ) til beskrivelse af placeringen af et punkt i et retvinklet koordinatsystem. Derefter benyttes de polære koordinater til at indføre polære funktioner $r(\theta)$ og deres tilhørende polære grafer. Det undersøges, hvordan vigtige egenskaber som f.eks. areal og kurvelængde kan bestemmes, når der er tale om polære funktioner.

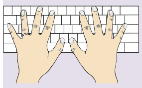
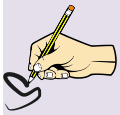
I forberedelsesmaterialet er der både øvelser og opgaver. Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien, herunder beviser for nogle af sætningerne. Opgaverne er tænkt som forberedelse til de opgaver, der kommer til den skriftlige eksamen.

I forberedelsesmaterialet anvendes fem typer af farvede bokse. Se eksempler på farvekoderne her:

Definition

Eksempel

Sætning

Øvelse	Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien, herunder også beviser for nogle af sætningerne.
Opgave 	Opgaverne er vejledende eksempler på de opgaver, der kan komme til den skriftlige eksamen. Opgaver markeret med et tastatur kan kun forekomme i delprøve 2.
Opgave 	Opgaver markeret med hånd og blyant kan forekomme i begge delprøver.

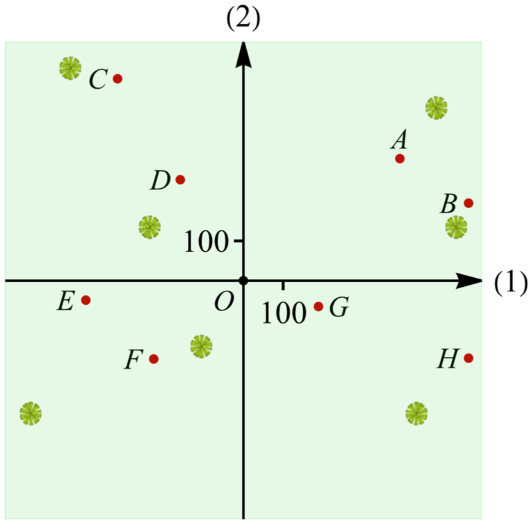
Polære koordinater

I et koordinatsystem kan et punkts placering som bekendt beskrives ved en x-koordinat og en y-koordinat. Koordinatsættet (x, y) kaldes punktets *rektangulære koordinatsæt*, men det er faktisk ikke altid den mest brugbare måde at angive et punkts placering på.

På figur 1 ses et skovområde indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. I hvert af punkterne A, B, …, H er der placeret en post. Peter skal løbe et stjerneløb fra punktet $O(0,0)$ ud til hver af posterne. Han vil begynde med post A.

For at komme hen til post A er særligt to ting vigtige for Peter.

1) Hvor langt er der hen til posten?
2) I hvilken retning skal han løbe?



Figur 1

Svar på 1)

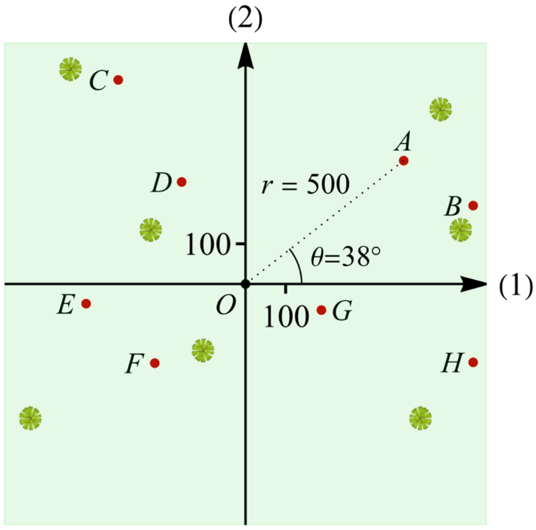
Ved hjælp af en lineal og koordinatsystemets enheder kan Peter måle afstanden r fra punktet O til punktet A.

Han måler afstanden til 500 meter.

Svar på 2)

Så mangler han at finde den retning, han skal løbe. Han måler derfor vinklen θ mellem førsteaksens positive retning og linjestykket OA.

Han måler vinklen til $38°$.

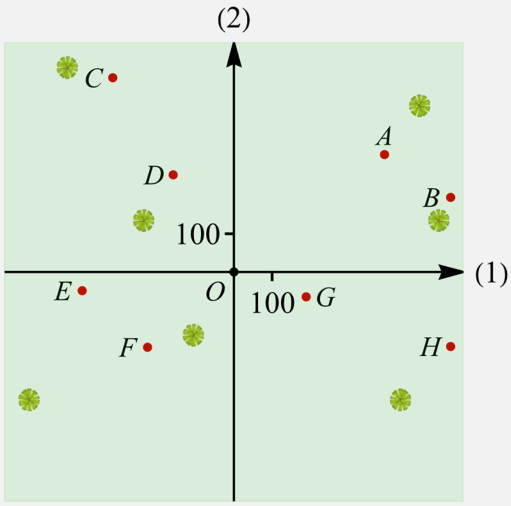


Figur 2

Post A ligger altså i en afstand af 500 meter fra punktet O i retningen $38°$.

Man siger, at punktet A har det *polære koordinatsæt* $(r, \theta) = (500, 38°)$.

Eksempel 1



Figur 3

$(r,\theta)=(300\,,122°)$	
$(r,\theta)=(600\,,19°)$	
$(r,\theta)=(200\,,341°)$	
$(r,\theta)=(600\,,341°)$	
$(r,\theta)=(500\,,38°)$	A
$(r,\theta)=(600\,,122°)$	
$(r,\theta)=(400\,,187°)$	
$(r,\theta)=(300\,,221°)$	

Tabel 1

De polære koordinatsæt for de resterende poster B, C,…, H fremgår af tabel 1.

Man kan ved hjælp af en vinkelmåler måle sig frem til, at det må være enten post C, eller post D, der hører til tabellens første punkt $(r,\theta)=(300\,,122°)$.

Ved hjælp af en lineal og koordinatsystemets enheder kan vi se, at afstanden fra origo $O(0,0)$ til punkt D netop er 300, mens afstanden til punktet C er større.

Dvs. det er post D, der hører til det polære koordinatsæt $(r,\theta)=(300\,,122°)$.

Udfyld resten af tabellen ved at parre de polære koordinatsæt med de korrekte punkter.

Bemærk, at indtil videre har alle vinkler været angivet i grader, men da der i det følgende vil optræde funktioner indeholdende blandt andet sinus og cosinus, vil alle vinkler i den resterende del af materialet være angivet i radianer, ligesom det vil være tilfældet for opgaver i forberedelsesmaterialet til den skriftlige eksamen.

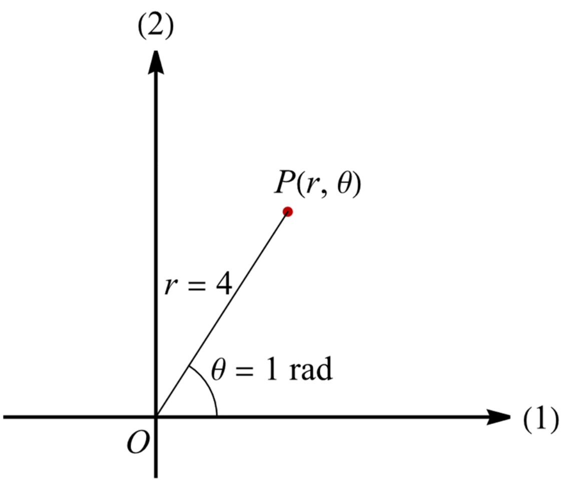
Hvis f.eks. det polære koordinatsæt til et punkt P er $(r,\theta)=(4,1)$, menes der altså det punkt, der ligger i en afstand af 4 til origo $O(0,0)$, og hvor linjestykket OP danner en vinkel på 1 radian med førsteaksen. Se figuren.

Bemærk, at man kan omregne fra x radianer til v grader ved hjælp af formlen

$$v=\frac{x}{\pi}\cdot 180°\,.$$

En vinkel på 1 radian svarer derfor til

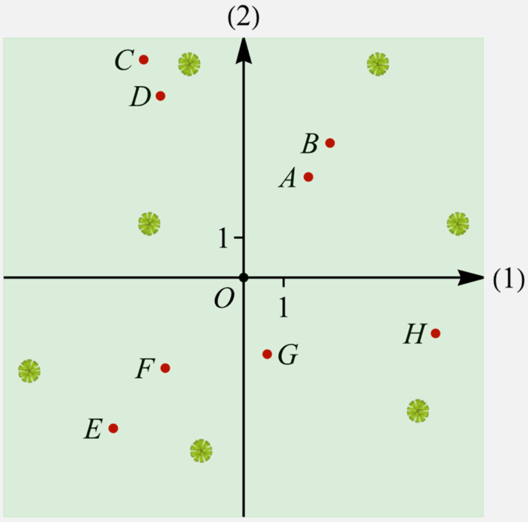
$$v=\frac{1}{\pi}\cdot 180° = 57{,}3°\,.$$



Figur 4

Definition 1 Det *polære koordinatsæt* til et punkt P skrives (r,θ), hvor r er afstanden $|OP|$ fra origo $O(0,0)$ til punktet P, og θ er vinklen mellem førsteaksen (i positiv retning) og linjestykket OP.

Eksempel 2



Figur 5

$(r,\theta)=(5,4)$	
$(r,\theta)=(5,2)$	
$(r,\theta)=(2,5)$	
$(r,\theta)=(3,1)$	
$(r,\theta)=(6,2)$	
$(r,\theta)=(5,6)$	
$(r,\theta)=(4,1)$	
$(r,\theta)=(3,4)$	

Tabel 2

På figur 5 ses igen et skovområde med poster indlagt i et koordinatsystem, dog med enheden km på begge akser. Som det fremgår af figuren, er posterne placeret lidt anderledes end i Eksempel 1.

De polære koordinatsæt for posterne A, B,…, H fremgår af tabel 2, men i modsætning til punkterne i Eksempel 1 er θ -vinklerne som nævnt nu angivet i radianer.

Vi ønsker at bestemme, hvilken af posterne der hører til koordinatsættet $(r,\theta)=(5,4)$.

En vinkel på 4 radianer svarer til en vinkel på $v=\frac{4}{\pi}\cdot 180°=229,2°$. Ved hjælp af en vinkelmåler kan man måle sig frem til, at det må være enten post E eller post F, der hører til koordinatsættet.

Ved hjælp af en lineal og koordinatsystemets enheder kan vi se, at afstanden fra origo $O(0,0)$ til punkt E er netop 5, mens afstanden til punktet F er mindre.

Dvs. det er post E, der hører til det polære koordinatsæt $(r,\theta)=(5,4)$.

Udfyld resten af tabellen ved at parre de polære koordinatsæt med de korrekte punkter.

Omskrivning fra polære til rektangulære koordinater

Man kan beregne et punkts rektangulære koordinatsæt (x, y) ud fra punktets polære koordinatsæt (r, θ) ved at anvende følgende sætning (se eventuelt øvelse 1).

Sætning 1 Sammenhængen mellem et punkts rektangulære koordinatsæt (x, y) og punktets polære koordinatsæt (r, θ) er givet ved

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad \text{og} \quad y = r \cdot \sin(\theta) \,.$$

Eksempel 3 I Eksempel 2 så vi, at punkt E på figur 5 har det polære koordinatsæt $(r, \theta) = (5, 4)$.

Vi benytter Sætning 1 til at bestemme det rektangulære koordinatsæt (x, y) til punktet E.

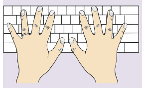
Formlerne $x = r \cdot \cos(\theta)$ og $y = r \cdot \sin(\theta)$ giver, at

$$x = 5 \cdot \cos(4) = -3{,}27$$

$$y = 5 \cdot \sin(4) = -3{,}78$$

Det rektangulære koordinatsæt til punktet E er derfor $(x, y) = (-3.27\,,\ -3.78)$.

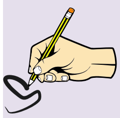
Opgave 1



Et punkt P har det polære koordinatsæt $(r, \theta) = (10, 2)$.

a) Bestem det rektangulære koordinatsæt for P.

Opgave 2



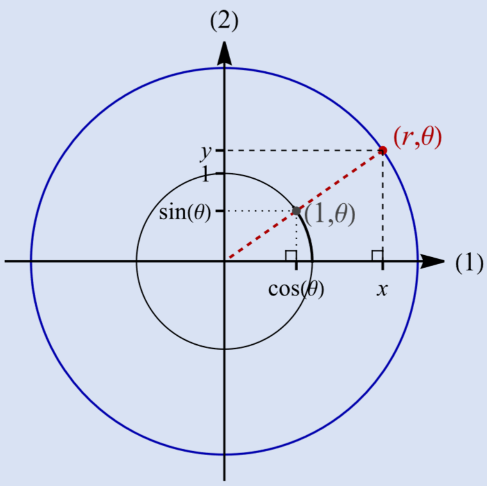
Et punkt P har det polære koordinatsæt $(r, \theta) = (8, \pi)$.

a) Bestem det rektangulære koordinatsæt for P.

Øvelse 1 Figuren viser enhedscirklen (grå) samt en cirkel (blå) med centrum i (0,0) og radius r i et koordinatsystem.

Det grå punkt på enhedscirklen har det polære koordinatsæt $(1, \theta)$, og det røde punkt på cirklen med radius r har det polære koordinatsæt (r, θ).

Benyt figuren til at vise, at $x = r \cdot \cos(\theta)$ og $y = r \cdot \sin(\theta)$ ved brug af ensvinklede trekanter.



Figur 6

Polære funktioner og polære grafer

Definition 2 En *polær funktion r* er en funktion, der til enhver vinkel θ i definitionsmængden knytter en værdi $r = r(\theta)$. Grafen for en polær funktion kaldes en *polær graf*.

Bemærk, at i dette materiale vil vi udelukkende arbejde med polære funktioner, hvor $r(\theta) \geq 0$ for alle vinkler θ i definitionsmængden. Derfor svarer værdien *r* til afstanden fra origo til punktet.

Eksempel 4 En *polær funktion r* er givet ved

$$r(\theta) = 2 \cdot \theta + 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

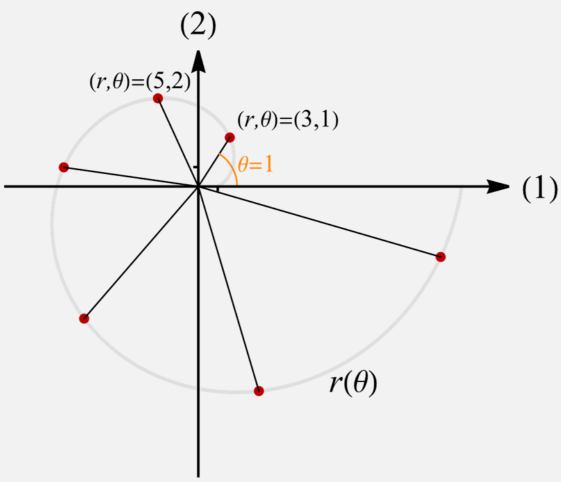
Da $r(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, ligger punktet med det polære koordinatsæt $(r,\theta) = (3,1)$ på grafen for *r*.

På samme måde kan følgende støttepunkter til grafen for *r* udregnes

θ	1	2	3	4	5	6
r	3	5	7	9	11	13

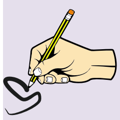
Hvis funktionen *r* fejlagtigt opfattes som en normal funktion, vil grafen for *r* være en ret linje, men da det er en polær funktion, kommer grafen til at se helt anderledes ud.

På figur 7 er ovenstående punkter indsat, og grafen for *r* er indtegnet.



Figur 7

Opgave 3 En polær funktion *r* er givet ved



$$r(\theta) = \theta^3 - \sqrt{3\theta^2 + 1}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

a) Undersøg, om punktet $P(r,\theta) = P(57,4)$ ligger på grafen for *r*.

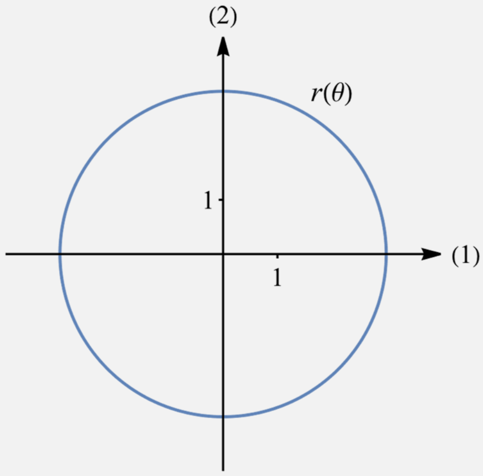
Sidst i dette materiale er der eksempler på, hvordan man tegner grafer for polære funktioner i udvalgte CAS-programmer.

Eksempel 5 En polær funktion r er givet ved

$$r(\theta) = 3\,,\quad 0 \le \theta \le 2\pi\,.$$

Grafen for r er en cirkel med radius 3 og centrum i $C(0,0)$.

Ved at udskifte 3-tallet i forskriften med andre positive tal kan cirklens radius varieres.



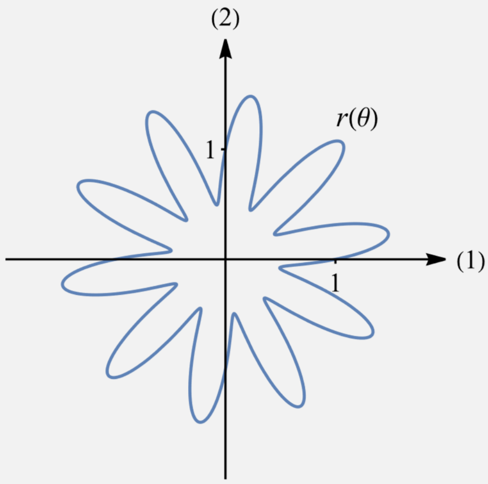
Figur 8

Eksempel 6 En polær funktion r er givet ved

$$r(\theta) = \cos(5\theta)\cdot\sin(5\theta) + 1\,,$$

$0 \le \theta \le 2\pi$.

Ved at udskifte 5-tallerne i forskriften med andre tal kan antallet af ”arme” på grafen varieres.

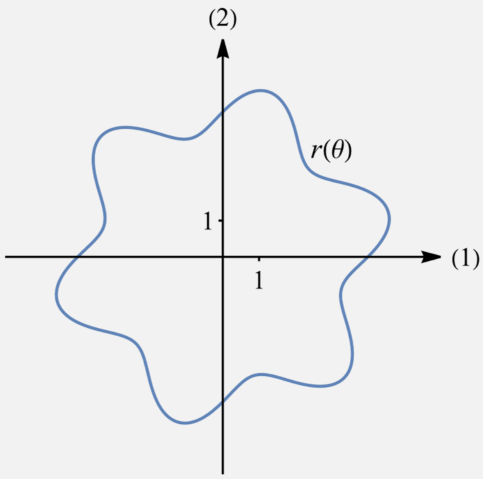


Figur 9

Eksempel 7 En polær funktion r er givet ved

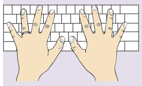
$$r(\theta) = 4\cdot \mathrm{e}^{\frac{\sin(6\theta)}{6}}\,,\quad 0 \le \theta \le 2\pi\,.$$

Ved at udskifte 4-tallet og 6-tallerne i forskriften med andre positive hele tal kan størrelsen og antallet af ”arme” på grafen varieres.



Figur 10

Opgave 4 En polær funktion *r* er givet ved



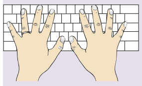
$$r(\theta) = 2\sqrt{\theta + 1}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi .$$

a) Tegn grafen for *r*.

Punktet *P* har det polære koordinatsæt $(r,\theta) = (4,3)$.

b) Gør rede for, at punktet *P* ligger på grafen for *r*.
Bestem det rektangulære koordinatsæt til punktet *P*.

Opgave 5 En polær funktion *r* er givet ved



$$r(\theta) = \cos(4\theta) + \cos(8\theta) + 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi .$$

a) Tegn grafen for *r*.

Punktet *P* med tilhørende θ-værdi $\theta = \frac{\pi}{4}$ ligger på grafen for *r*.

b) Bestem det rektangulære koordinatsæt til punktet *P*.

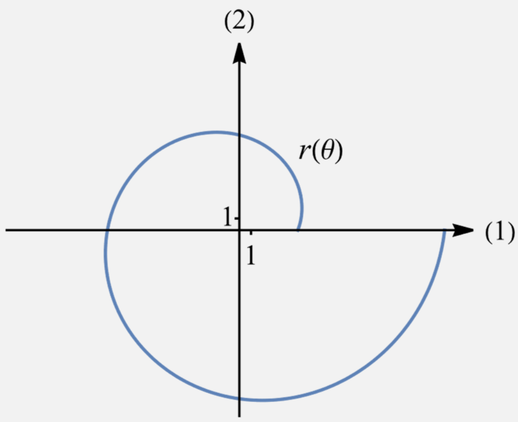
Afstand til origo

En fordel ved polære funktioner er, at det er nemt at arbejde med afstanden mellem et punkt på grafen for den polære funktion og origo $O(0,0)$. F.eks. er det nemt at bestemme et eller flere punkter med en bestemt afstand til origo eller at bestemme, hvor på grafen afstanden til origo er mindst eller størst.

Eksempel 8 En polær funktion *r* er givet ved

$$r(\theta) = 2\theta + 5, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi .$$

a) Bestem θ-værdien til det punkt på grafen for *r*, hvor afstanden til origo $O(0,0)$ er 11.



Figur 11

For at bestemme θ-værdien til det punkt på grafen for *r*, hvor afstanden til origo er 11, løses ligningen $r(\theta) = 11$.

$$11 = 2\theta + 5$$

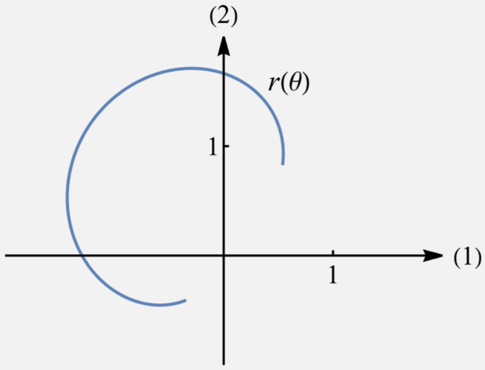
$$\theta = 3$$

Dvs. θ-værdien til det punkt på grafen for *r*, hvor afstanden til origo er 11, er $\theta = 3$.

Eksempel 9 En polær funktion r er for $1 \le \theta \le 4$ givet ved

$$r(\theta) = 4\ln(\theta) - 2\theta + 3.$$

a) Bestem θ-værdien til det punkt på grafen for r, hvor afstanden til origo $O(0,0)$ er størst.



Figur 12

For at bestemme θ-værdien til det punkt på grafen for r, hvor afstanden til origo er størst, laves en ganske almindelig monotoniundersøgelse af funktionen r.

Den afledede funktion af r er

$$r'(\theta) = \frac{4}{\theta} - 2.$$

Ligningen $r'(\theta) = 0$ løses

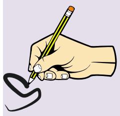
$$0 = \frac{4}{\theta} - 2$$

$$\theta = 2$$

Da $r'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} > 0$ og $r'(3) = -\frac{2}{3} < 0$, kan det konkluderes, at $\theta = 2$ giver anledning til et maksimum for r (hvilket også fremgår af grafen for r på figuren).

Afstanden fra origo til grafen for r er derfor størst, når $\theta = 2$.

Opgave 6

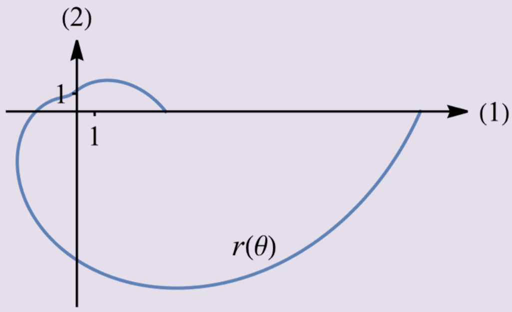


En polær funktion r er givet ved

$$r(\theta) = \theta^2 - 4\theta + 5, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

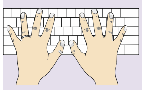
a) Bestem θ-værdierne til de to punkter på grafen for r, hvor afstanden til origo $O(0,0)$ er lig 2.

b) Bestem θ-værdien til det punkt på grafen for r, hvor afstanden til origo $O(0,0)$ er mindst.



Figur 13

Opgave 7



En polær funktion er givet ved

$$r(\theta) = -\theta^3 - 6\theta^2 + 15\theta, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

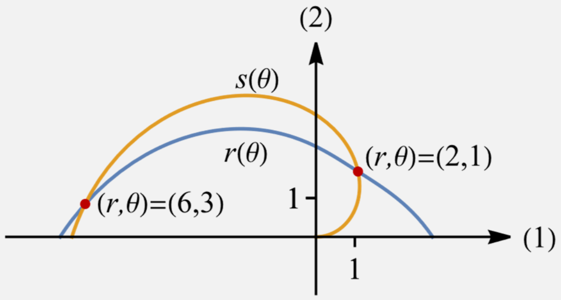
a) Bestem det polære koordinatsæt til det punkt på grafen for r, hvor afstanden til origo $O(0,0)$ er størst.

Skæringspunkter mellem grafer for polære funktioner

Skæringspunkterne mellem graferne for to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ i rektangulære koordinater findes ved at løse ligningen $f(x)=g(x)$. Derefter indsættes hver funden x-værdi i en af funktionerne, og de tilhørende y-værdier udregnes (om man indsætter i f eller g, gør ingen forskel). For polære funktioner $r(\theta)$ og $s(\theta)$ er metoden næsten den samme. Vi løser ligningen $r(\theta)=s(\theta)$ for at finde de vinkler, hvor afstanden til origo er den samme på de to polære grafer. Dermed har vi fundet de vinkler, hvor de polære grafer skærer hinanden. Derefter indsættes hver funden θ-værdi i en af funktionerne (om man indsætter i r eller s, gør ingen forskel).

Bemærk, at hvis $O(0,0)$ er et fælles punkt på de to grafer, er både $r=0$ og $s=0$, men ikke nødvendigvis for samme værdi af θ. Man kan altså ikke bruge ovenstående fremgangsmåde til at bestemme dette fælles punkt. Til den skriftlige eksamen vil der ikke forekomme opgaver, hvor der skal bestemmes et skæringspunkt, der ligger i origo.

Eksempel 10



Figur 14

To polære funktioner r og s er for $0 \le \theta \le \pi$ givet ved

$$r(\theta)=\theta^2-2\theta+3$$

$$s(\theta)=2\theta$$

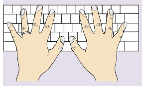
Graferne for r og s har netop to skæringspunkter. Se figuren.

For at bestemme det polære koordinatsæt til hvert af skæringspunkterne løses ligningen $r(\theta)=s(\theta)$ i intervallet $0 \le \theta \le \pi$.

Ligningen $\theta^2-2\theta+3=2\theta$ har løsningen $\theta=1$ eller $\theta=3$.

Da $s(1)=2\cdot1=2$ og $s(3)=2\cdot3=6$, er de polære koordinatsæt for skæringspunkterne $(r,\theta)=(2,1)$ og $(r,\theta)=(6,3)$.

Opgave 8

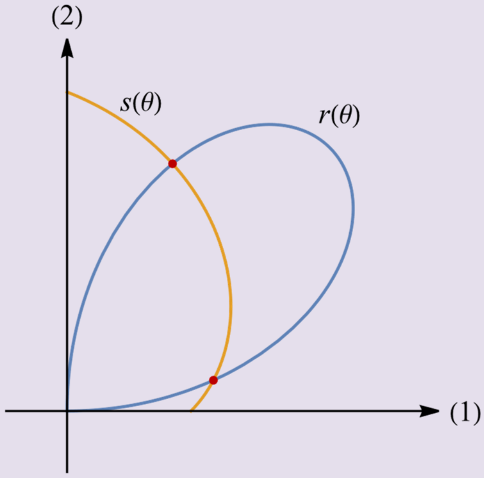


To polære funktioner r og s er for $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ givet ved

$$r(\theta) = 3 \cdot \sin(2\theta)$$

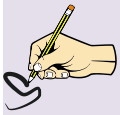
$$s(\theta) = \theta + 1$$

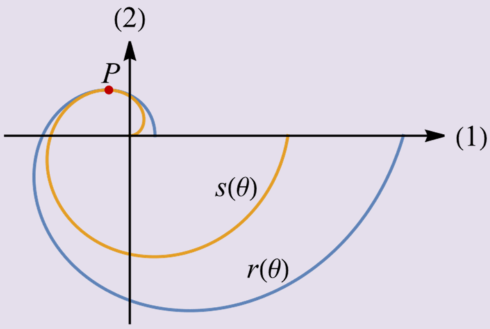
a) Bestem det polære koordinatsæt til hvert af skæringspunkterne mellem graferne for r og s.



Figur 15

Opgave 9





Figur 16

To polære funktioner r og s er for $0 \leq \theta \leq 2\pi$ givet ved

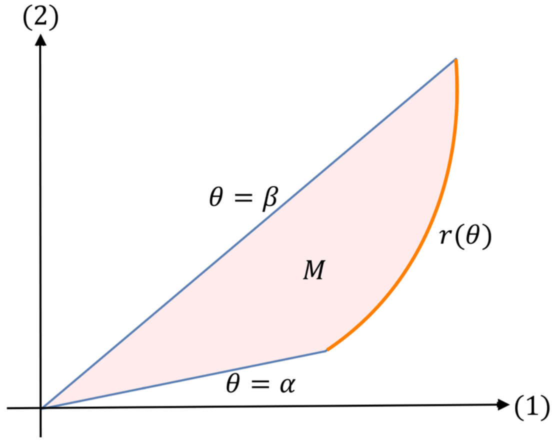
$$r(\theta) = \theta^2 + 4$$

$$s(\theta) = 4\theta$$

Graferne for r og s har netop ét fælles punkt P. Se figuren.

a) Bestem θ-værdien til punktet P.
Bestem afstanden fra punktet P til origo $O(0,0)$.

Areal og polære funktioner



Figur 17

På figur 17 udspænder grafen for den polære funktion r i intervallet $\theta \in [\alpha;\beta]$ et område M.
Man kan vise følgende sætning om arealet af M (se øvelse 2)

Sætning 2 Grafen for en kontinuert og ikke-negativ polær funktion $r(\theta)$, hvor $0 \le \theta \le 2\pi$, udspænder i intervallet $\theta \in [\alpha;\beta]$ et område M. Arealet A af området M er givet ved

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 \, d\theta .$$

Eksempel 11 En polær funktion r er givet ved

$$r(\theta) = \sqrt{3\theta^2 - 2\theta}\,, \qquad 0 \le \theta \le 4 .$$

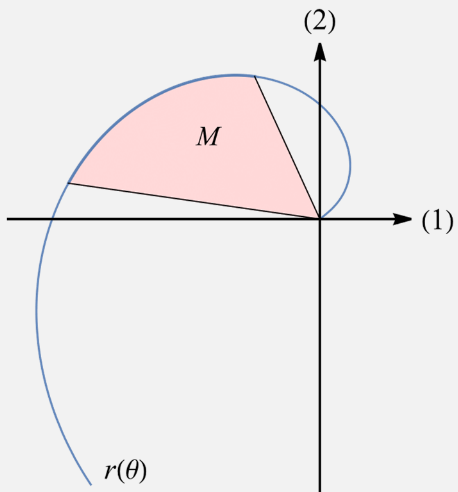
Grafen for r udspænder i intervallet $\theta \in [2;3]$ et område M. Se figuren.

a) Bestem arealet af området M.

For at bestemme arealet af området M anvendes formlen $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 \, d\theta$.

$$A = \frac{1}{2}\cdot\int_2^3 \left(\sqrt{3\theta^2 - 2\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot\int_2^3 \left(3\theta^2 - 2\theta\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\theta^3 - \theta^2\right]_2^3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\left(3^3 - 3^2\right) - \left(2^3 - 2^2\right)\right) = 7$$

Dvs. arealet af M er 7.



Figur 18

Eksempel 12 En polær funktion r er for $1 \le \theta \le 3$ givet ved

$$r(\theta) = \theta^4 - 8 \cdot \theta^3 + 22 \cdot \theta^2 - 24 \cdot \theta + 9 .$$

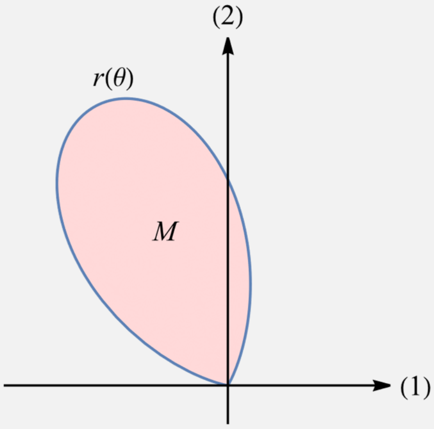
Grafen for r afgrænser i intervallet $\theta \in [1;3]$ et område M. Se figuren.

For at bestemme arealet af området M anvendes formlen $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 \, d\theta$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_1^3 \left(\theta^4 - 8 \cdot \theta^3 + 22 \cdot \theta^2 - 24 \cdot \theta + 9\right)^2 d\theta$$

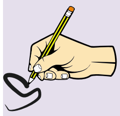
$= 0{,}406$ (regnet med CAS)

Dvs. arealet af M er $0{,}406$.



Figur 19

Opgave 10 En polær funktion r er givet ved

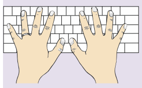


$$r(\theta) = \sqrt{\theta^2 + \theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi .$$

Grafen for r udspænder i intervallet $\theta \in [1;4]$ et område M.

a) Bestem arealet af området M.

Opgave 11 I en model kan grænsen for det område, en bestemt mikrofon kan optage lyden fra, beskrives ved en polær funktion r givet ved forskriften

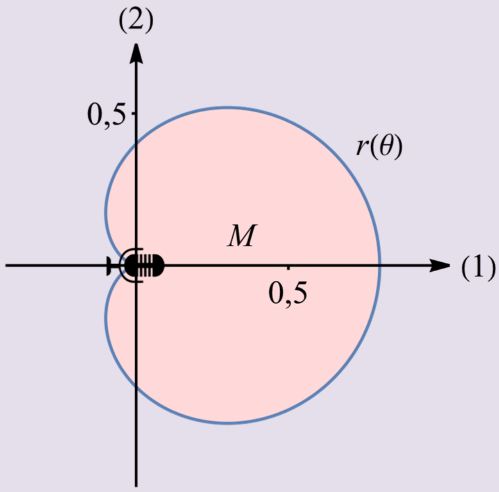


$$r(\theta) = 0{,}4 + 0{,}4 \cdot \cos(\theta),$$

$0 \le \theta \le 2\pi$, hvor mikrofonen er placeret i origo $O(0,0)$, og r måles i meter.

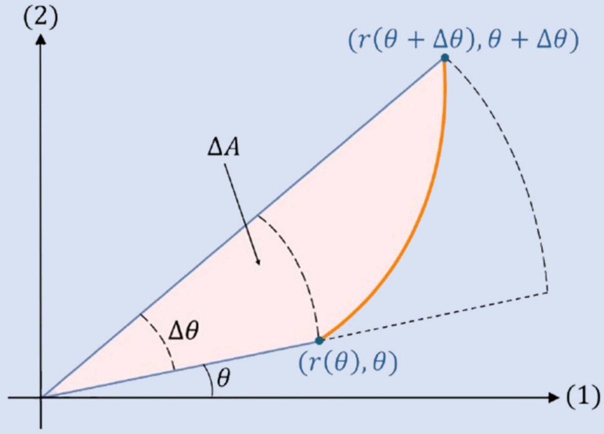
Dette område M kaldes mikrofonens pick-up-område. Se figuren.

a) Bestem arealet af pick-up-området M for mikrofonen.



Figur 20

Øvelse 2 Bevis for sætning 2.



Figur 21

Betragt en kontinuert og positiv *voksende* polær funktion $r(\theta)$ i intervallet $\theta \in [\alpha\,;\beta]$. Vi indfører på samme måde som ved sædvanlige funktioner en arealfunktion $A(\theta)$.

Lad en given vinkel θ vokse til $\theta+\Delta\theta$, se figur 21. Da vokser arealfunktionen med $\Delta A = A(\theta+\Delta\theta) - A(\theta)$ (svarende til det farvede område på figuren).

a) Gør rede for, at arealet af et cirkeludsnit med vinkel $\Delta\theta$ og radius r er

$$\pi r^2 \cdot \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \Delta\theta\,.$$

b) Gør med udgangspunkt i figur 21 rede for, at den nedre grænse for tilvæksten i arealfunktionen er

$$\frac{1}{2} r(\theta)^2 \cdot \Delta\theta\,.$$

c) Gør med udgangspunkt i figur 21 rede for, at den øvre grænse for tilvæksten i arealfunktionen er

$$\frac{1}{2} r(\theta+\Delta\theta)^2 \cdot \Delta\theta\,.$$

d) Benyt resultaterne fra b) og c) til at forklare, hvorfor der gælder, at

$$\frac{1}{2} r(\theta)^2 \cdot \Delta\theta \le \Delta A \le \frac{1}{2} r(\theta+\Delta\theta)^2 \cdot \Delta\theta\,.$$

e) Gør rede for, at hvis uligheden fra d) divideres med $\Delta\theta$, fås at

$$\frac{1}{2} r(\theta)^2 \le \frac{\Delta A}{\Delta\theta} \le \frac{1}{2} r(\theta+\Delta\theta)^2\,.$$

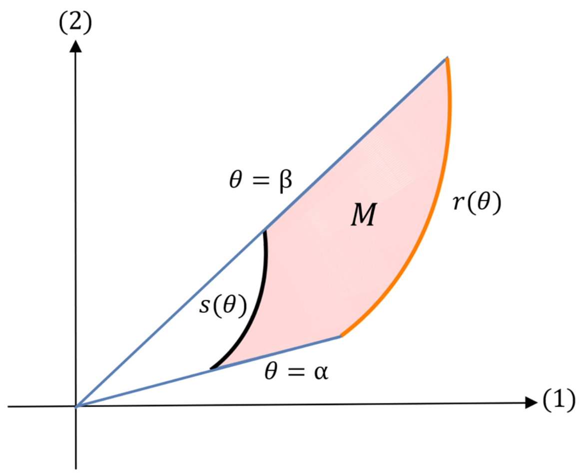
f) Lad $\Delta\theta \to 0$ og gør rede for, hvorfor det viser, at

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2} r(\theta)^2\,.$$

g) Gør rede for, at der så gælder, at

$$A(\theta) = \int \frac{1}{2} r(\theta)^2\, d\theta + k \text{, og dermed at } A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2\, d\theta\,.$$

Man kan vise, at resultatet er det samme, selvom $r(\theta)$ ikke er voksende.



Figur 22

På figur 22 udspænder graferne for de polære funktioner r og s i intervallet $\theta \in [\alpha;\beta]$ et område M. Man kan vise følgende sætning om arealet af M

Sætning 3 De kontinuerte og ikke-negative polære funktioner $r(\theta)$ og $s(\theta)$, hvor $0 \le \theta \le 2\pi$, og hvor $r(\theta) \ge s(\theta)$, udspænder i intervallet $\theta \in [\alpha;\beta]$ et område M. Arealet A af området M er givet ved

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r(\theta)^2 - s(\theta)^2\right)d\theta\,.$$

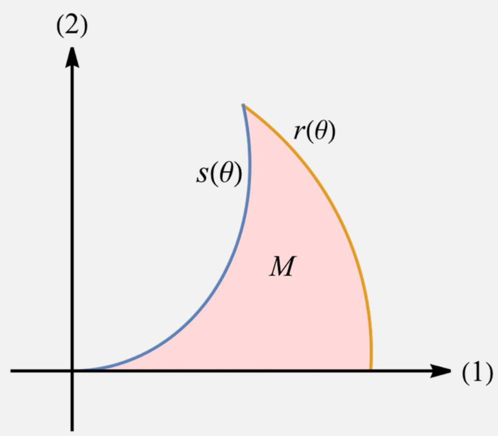
Eksempel 13 To polære funktioner r og s er for $0 \le \theta \le 2\pi$ givet ved

$$r(\theta) = \sqrt{\theta + 8}$$

$$s(\theta) = 3\theta$$

Graferne for r og s afgrænser i intervallet $\theta \in [0;1]$ et område M. Se figuren.

a) Bestem arealet af området M.



Figur 23

For at bestemme arealet af området M benyttes formlen $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r(\theta)^2 - s(\theta)^2\right)d\theta$.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\left(\sqrt{\theta+8}\right)^2 - (3\theta)^2\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\theta + 8 - 9\theta^2\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\theta^2 + 8\theta - 3\theta^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 8\cdot 1 - 3\cdot 1^3\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0^2 + 8\cdot 0 - 3\cdot 0^3\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2} + 8 - 3\right) - 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{2} = \frac{11}{4}
\end{aligned}$$

Dvs. arealet af området M er lig $\frac{11}{4}$.

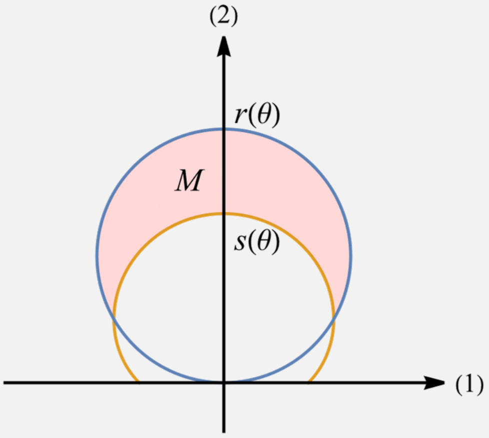
Eksempel 14 To polære funktioner r og s er for $0 \le \theta \le \pi$ givet ved

$$r(\theta) = 3\sin(\theta)$$

$$s(\theta) = 1 + \sin(\theta)$$

Graferne for r og s afgrænser i intervallet $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ et område M. Se figuren.

a) Bestem arealet af området M.



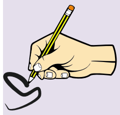
Figur 24

For at bestemme arealet af området M benyttes formlen $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r(\theta)^2 - s(\theta)^2\right)d\theta$.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\left(3\sin(\theta)\right)^2 - \left(1+\sin(\theta)\right)^2\right)d\theta = \pi \quad \text{(regnet med CAS)}$$

Dvs. arealet af området M er π.

Opgave 12



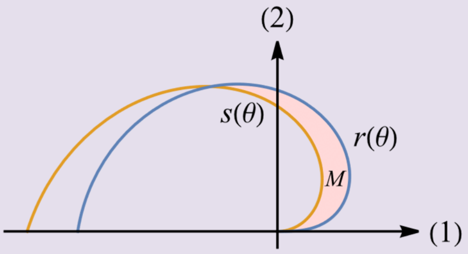
To polære funktioner r og s er for $0 \le \theta \le \pi$ givet ved

$$r(\theta) = \sqrt{18\theta}$$

$$s(\theta) = 3\theta$$

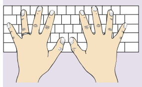
Graferne for r og s afgrænser i intervallet $\theta \in [0;2]$ et område M. Se figuren.

a) Bestem arealet af området M.



Figur 25

Opgave 13



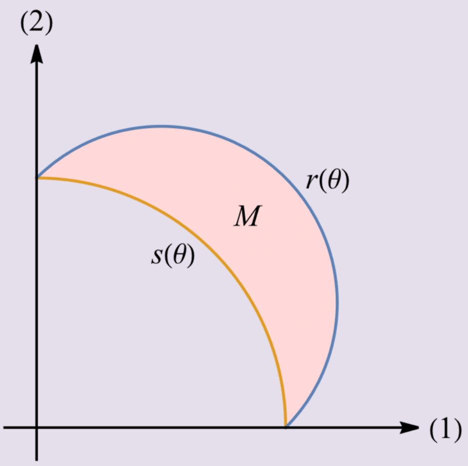
To polære funktioner r og s er for $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ givet ved

$$r(\theta) = \sin(\theta) + \cos(\theta)$$

$$s(\theta) = 1$$

Graferne for r og s afgrænser i intervallet $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et område M. Se figuren.

a) Bestem arealet af området M.



Figur 26

Kurvelængde af polær graf

Ligesom man kan bestemme kurvelængden af grafen for en almindelig funktion, kan man også bestemme kurvelængden af grafen for en polær funktion. Der gælder følgende

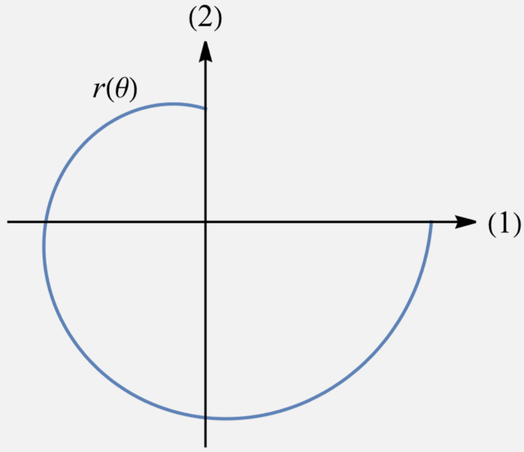
Sætning 4 Kurvelængden L af den polære graf for en differentiabel, polær funktion $r(\theta)$ i intervallet $\theta \in [\alpha;\beta]$ er givet ved

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\, d\theta\,.$$

Eksempel 15 En polær funktion r er givet ved

$$r(\theta) = \sqrt{\theta}\,, \qquad \frac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi\,.$$

a) Bestem kurvelængden af grafen for r i intervallet $\theta \in \left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.



Figur 27

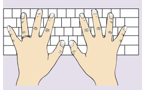
For at bestemme kurvelængden af grafen for r i intervallet $\theta \in \left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ benyttes formlen $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\, d\theta$.

Den afledede funktion af r er $r'(\theta) = \dfrac{1}{2\sqrt{\theta}}$, og dermed fås

$$L = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\right)^2 + \left(\sqrt{\theta}\right)^2}\, d\theta = 9{,}286 \quad \text{(regnet med CAS)}$$

Dvs. kurvelængden af grafen for r i intervallet $\theta \in \left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ er $9{,}286$.

Opgave 14



En polær funktion r er givet ved

$$r(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{\theta}{4}}\,, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi\,.$$

a) Tegn grafen for r.

b) Bestem kurvelængden af den polære graf for r i intervallet $\theta \in [0;2\pi]$.

Opgave 15

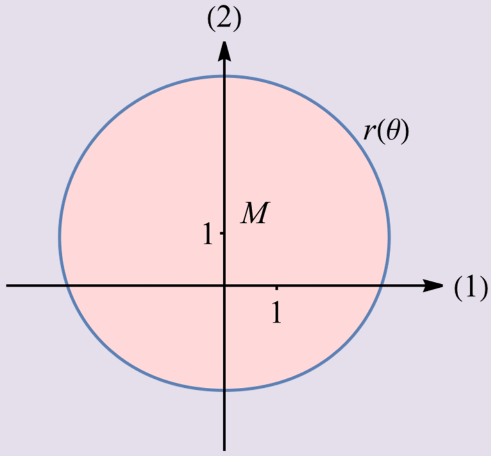
En polær funktion r er givet ved

$$r(\theta) = 3 + \sin(\theta)\,, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi\,.$$

Grafen for r afgrænser i intervallet $\theta \in [0;2\pi]$ et område M. Se figuren.

a) Bestem arealet af M.

b) Bestem omkredsen af M.

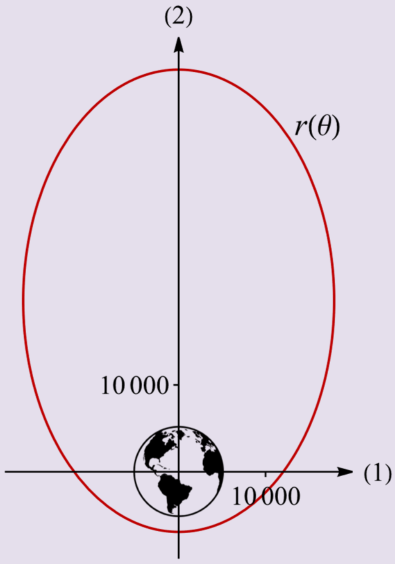


Figur 28

Opgave 16

Figur 29

Billedkilde: NASA



Figur 30

En Molniya-bane for en satellit er en ellipseformet bane omkring Jorden, der gør, at satellitten kan dække kommunikation og overvågning af områder ved høje nordlige breddegrader. Se figur 29.

Figur 30 viser Molniya-banen for en bestemt satellit indlagt i et koordinatsystem med enheden km på begge akser.

I en model kan satellittens bane beskrives ved den polære funktion

$$r(\theta) = \frac{12034}{1 - 0{,}74 \cdot \sin(\theta)}\,, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi\,,$$

hvor Jordens centrum er placeret i origo $O(0,0)$, og r måles i km.

a) Bestem længden af satellittens bane rundt om Jorden.

b) Bestem den korteste og længste afstand fra Jordens centrum til satellitten.

Indstiksark til formelsamlingen

Omregning fra polære koordinater (r,θ) til rektangulære koordinater (x,y)	F(1)	$x = r\cdot\cos(\theta)$, $y = r\cdot\sin(\theta)$
Arealet A af området udspændt af grafen for en polær funktion r i intervallet $\theta \in [\alpha\,;\beta]$	F(2)	$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2\,d\theta$
Arealet A af området mellem graferne for to polære funktioner r og s i intervallet $\theta \in [\alpha\,;\beta]$, hvor $r(\theta) \geq s(\theta)$	F(3)	$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(r(\theta)^2 - s(\theta)^2\right)d\theta$
Kurvelængden L af den polære graf for en polær funktion r i intervallet $\theta \in [\alpha\,;\beta]$	F(4)	$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\,d\theta$

Polære funktioner og polære grafer i Maple

To polære funktioner r og s er for $0 \le \theta \le 2\pi$ givet ved

$$r(\theta) = 2 + \sin(\theta)$$

$$s(\theta) = \frac{\theta}{4}$$

For at tegne graferne for r og s skal man importere pakkerne ”Gym” og ”plots”.

Herefter skal funktionerne r og s defineres.

Graferne kan nu tegnes ved hjælp af kommandoen *polarplot*. Se nedenfor.

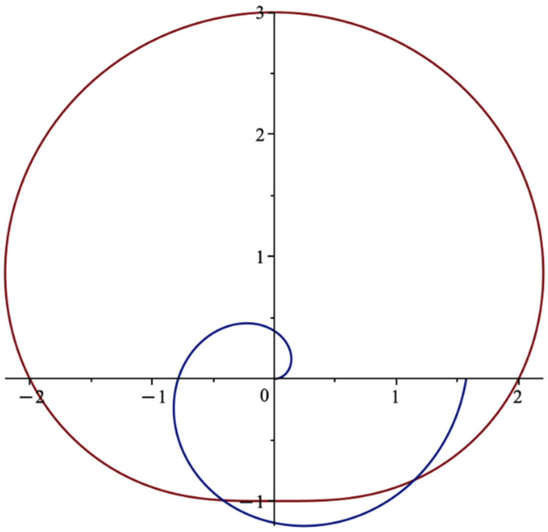
with(*Gym*) :
with(*plots*) :
$r(\theta) := 2 + \sin(\theta)$

$$r := \theta \mapsto 2 + \sin(\theta)$$

$s(\theta) := \frac{\theta}{4}$

$$s := \theta \mapsto \frac{\theta}{4}$$

polarplot([$r(\theta)$, $s(\theta)$], $\theta = 0\,..2\,\pi$, *axiscoordinates* = *cartesian*, *scaling* = *constrained*)



Hvis man ønsker at bestemme de polære koordinatsæt til skæringspunkterne mellem de polære grafer, kan man løse ligningen $r(\theta) = s(\theta)$ ved hjælp af kommandoen *intervalsolve*, hvorefter de tilhørende r-værdier kan beregnes

intervalsolve($r(\theta) = s(\theta)$, $\theta = 0\,..2\,\pi$)
Warning, some roots are returned as numeric approximations

$$[4.313706679, 5.657549760]$$

$r(4.313706679)$

$$1.078426670$$

$r(5.657549760)$

$$1.414387440$$

Differentiation og integration af polære funktioner udføres med de sædvanlige kommandoer.

Polære funktioner og polære grafer i Nspire

To polære funktioner r og s er for $0 \le \theta \le 2\pi$ givet ved

$$r(\theta) = 2 + \sin(\theta)$$

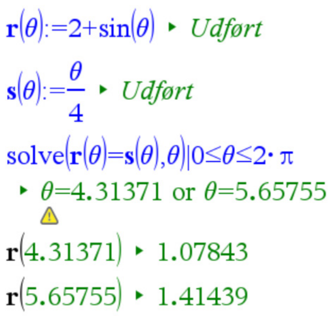
$$s(\theta) = \frac{\theta}{4}$$

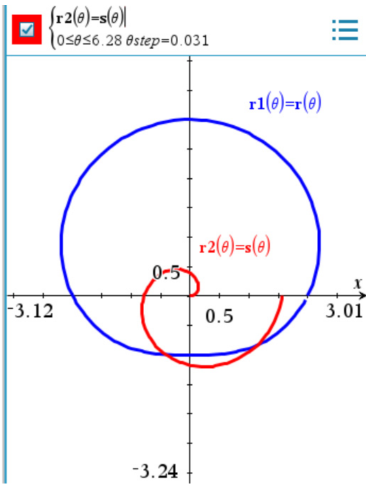
For at tegne graferne for r og s skal funktionerne r og s defineres.

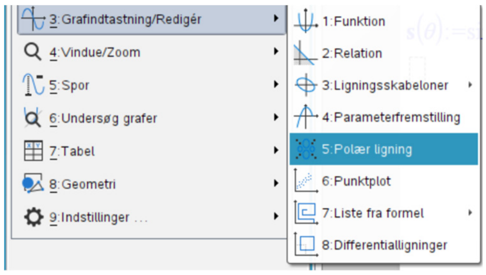
Graferne kan nu tegnes ved at vælge ”Indsæt grafer”, værktøjskassen  ,

”Grafindtastning/Rediger” og til sidst ”Polær ligning”.

Funktionsudtrykkene kan nu angives (standardintervallet er $[0;2\pi]$, men det kan ændres).







Hvis man ønsker at bestemme de polære koordinatsæt til skæringspunkterne mellem de polære grafer, kan man løse ligningen $r(\theta) = s(\theta)$ ved hjælp af kommandoen *solve* med intervalbegrænsning, hvorefter de tilhørende r-værdier kan beregnes. Se ovenfor.

Differentiation og integration af polære funktioner udføres med de sædvanlige kommandoer.

Polære funktioner og polære grafer i GeoGebra 5

To polære funktioner r og s er for $0 \le \theta \le 2\pi$ givet ved

$$r(\theta) = 2 + \sin(\theta)$$

$$s(\theta) = \frac{\theta}{4}$$

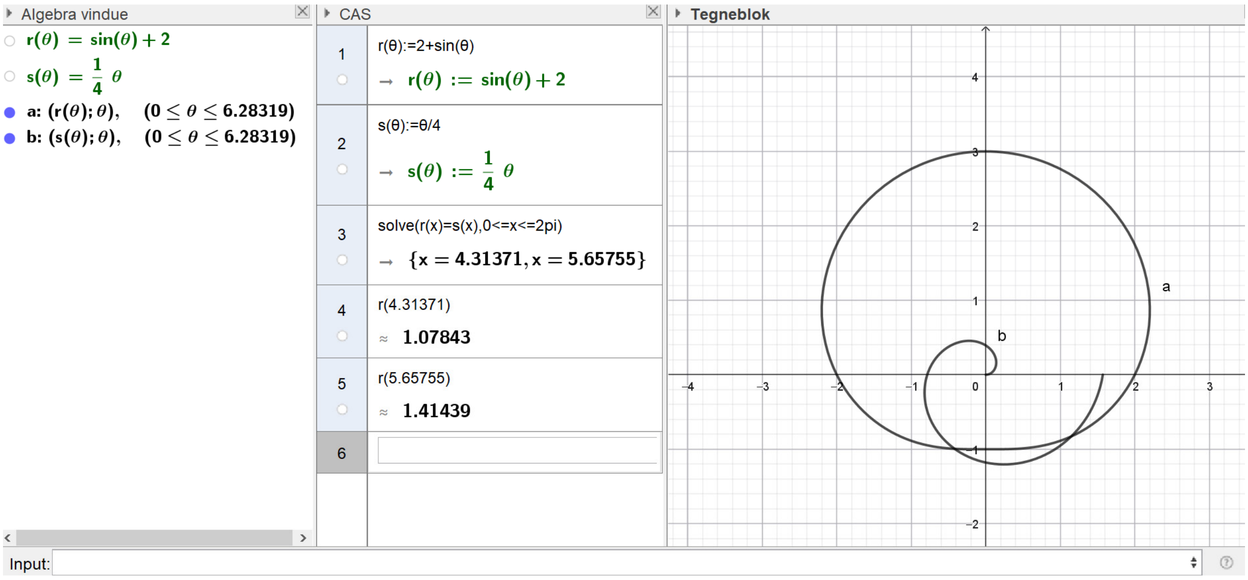
For at tegne graferne for r og s skal funktionerne r og s defineres i ”CAS”-vinduet.

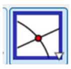
Herefter skrives følgende kommandoer i ”Algebra”-vinduet

Kurve((r(θ); θ), θ, 0, 2pi)

Kurve((s(θ); θ), θ, 0, 2pi)

Graferne kan nu ses i ”Tegneblok”-vinduet.



Bemærk, at hvis man benytter skæringsværktøjet  til at bestemme koordinatsættene til skæringspunkterne mellem graferne for r og s, fås de *rektangulære* koordinatsæt.

Hvis man ønsker at bestemme de polære koordinatsæt til skæringspunkterne mellem de polære grafer, kan man løse ligningen $r(\theta) = s(\theta)$ ved hjælp af kommandoen *solve* med intervalbegrænsning i ”CAS”-vinduet, hvorefter de tilhørende r-værdier kan beregnes. Bemærk, at θ er skiftet ud med x i *solve*-kommandoen. Se ovenfor.

Differentiation og integration af polære funktioner udføres med de sædvanlige kommandoer.

Polære funktioner og polære grafer i GeoGebra 6

To polære funktioner r og s er for $0 \leq \theta \leq 2\pi$ givet ved

$$r(\theta) = 2 + \sin(\theta)$$

$$s(\theta) = \frac{\theta}{4}$$

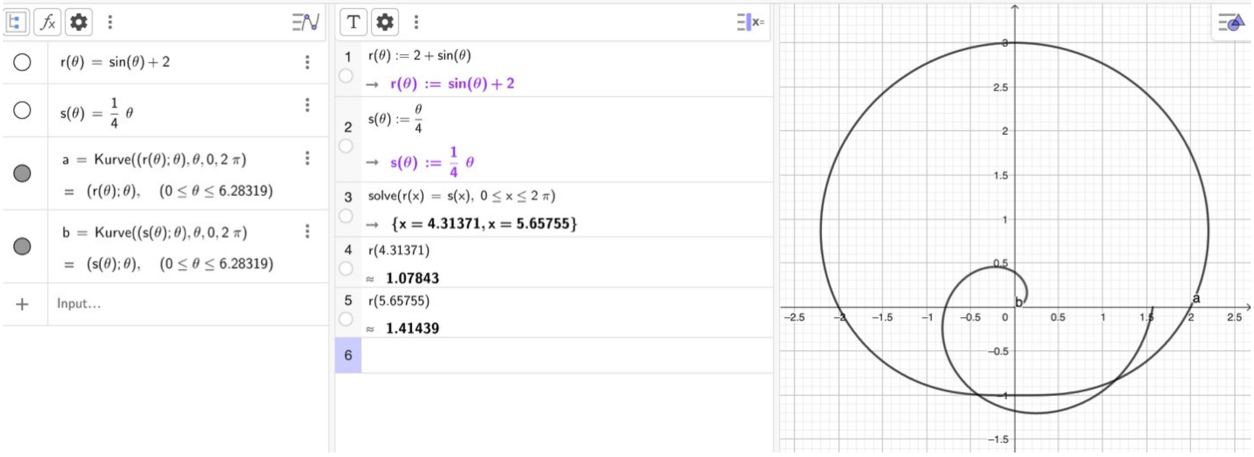
For at tegne graferne for r og s skal funktionerne r og s defineres i "CAS"-vinduet.

Herefter skrives følgende kommandoer i "Algebra"-vinduet

Kurve((r(θ); θ), θ, 0, 2pi)

Kurve((s(θ); θ), θ, 0, 2pi)

Graferne kan nu ses i "Tegneblok"-vinduet.



Hvis man ønsker at bestemme de polære koordinatsæt til skæringspunkterne mellem de polære grafer, kan man løse ligningen $r(\theta) = s(\theta)$ ved hjælp af kommandoen *solve* med intervalbegrænsning i "CAS"-vinduet, hvorefter de tilhørende r-værdier kan beregnes. Bemærk, at θ er skiftet ud med x i *solve*-kommandoen. Se ovenfor.

Differentiation og integration af polære funktioner udføres med de sædvanlige kommandoer.