Funktionen generell

Fortæl mig ALT hvad i ved om funktioner og hvad vi kan bruge det til

Funktioner er vigtige for matematik, vi bruger dem til at beskrive sammenhængen mellem 2, 3 eller flere forskellige størrelser vi ser kun på 2 forskellige

→ ofte x (den uafhængige) og y (afhængige)

→ hvorfor har vi givet dem de navne?

- Brændstofforbruget i en bil er en funktion af, hvor hurtigt bilen kører.
- Varmetabet fra et hus er en funktion af temperaturforskellen mellem inde og ude.
- Opfattelsen af lydstyrke fra en lydkilde er en funktion af, hvor langt vi befinder os fra lydkilden.

Vi skal kigge på følgende ord:

- Sammenhæng
- Afhængig variabel
- Uafhængig variabel
- forskrift
- Graf

kort fortæl hvad i tænker det betyder

7.1 Sammenhænge

I dagligdagen er vi omgivet af sammenhænge. Daggry, tidevand og lufttemperatur hænger sammen med tidspunktet på døgnet.

Det, vi skal betale for mælken, afhænger af, hvor mange liter mælk vi køber og selvfølgelig også af prisen pr. liter.

Fælles for disse sammenhænge er, at den ene størrelse (daggryet) afhænger af den anden (tidspunktet). Men den anden afhænger ikke af den ene! Tidspunktet afhænger ikke af daggryet.

Der er altså tale om en afhængig og en uafhængig størrelse.

Fælles for ovennævnte fænomener er ligeledes, at der ved én uafhængig størrelse kun er én afhængig størrelse:

Variabel

Vi betragter endnu en gang sammenhængen mellem en afhængig og en uafhængig størrelse. I stedet for ordet størrelse vil vi bruge ordet *variabel*.

Når tiden varierer, så varierer vandstanden ved havet også.

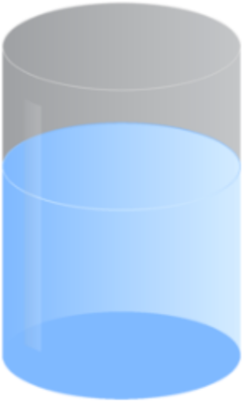
Hvis vi varierer indkøbet af mælk, vil det beløb, vi skal betale, også variere.

Således bliver en uafhængig størrelse til en uafhængig variabel.

En afhængig størrelse bliver til en afhængig variabel.

Eksempel 7.1.1.1

Hvis man hælder vand i en lodret stående cylinder, vil vandmængden i cylinderen afhænge af, hvilken højde, h, man fylder til. Se tabel 7.1.1.1.



Figur 7.1.1.1 Cylinder med væske

I dette tilfælde er der frit valg med hensyn til, hvilken variabel vi vælger som afhængig og uafhængig variabel. Vi kan fx betragte højden h som en uafhængig variabel. Vandmængden er da afhængig af fyldningshøjden.

Cylinderens grundfladeareal er $T = 0{,}5\,\mathrm{m}^2$. Vi kan opstille en tabel, der viser sammenhængen mellem højden h og vandets rumfang V.

h	$V = 0{,}5\,\mathrm{m}^2 \cdot h$
0,1 m	0,05 m^3
0,2 m	0,10 m^3
0,3 m	0,15 m^3
0,4 m	0,20 m^3
...	...

Tabel 7.1.1.1 Sammenhængen mellem vandstand (højden h) og rumfang V

Vi ser, at højden kan varieres frit. Den er uafhængig – i hvert fald indtil cylinderen er fyldt. Rumfanget er afhængigt af højden.

Funktions begrebet

I matematikken omtales en sammenhæng mellem to størrelser ofte som en funktion. Tidevandet er en funktion af tiden. Lufttrykket i atmosfæren afhænger af højden over jordoverfladen. Vi siger, at lufttrykket er en funktion af højden.

Med udgangspunkt i eksempel 7.1.1.1 vil vi opstille en funktion, også kaldet et funktionsudtryk, der beskriver sammenhængen mellem vandets rumfang V og højden h i cylinderen. For nemheds skyld er enheden (m^2) udeladt:

$$V(h) = 0{,}5 \cdot h$$

"Rumfanget som funktion af højden er lig med 0,5 multipliceret med højden".

Ved hjælp af funktionsudtrykket kan vi beregne værdierne i tabel 7.1.1.1. Vi indsætter værdier for den uafhængige variabel, h:

x-værdien indsat

$$V(0{,}1) = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \Leftrightarrow$$
$$V(0{,}1) = 0{,}05$$

Værdien af den uafhængige variabel er 0,1. Da er værdien af den afhængige variabel 0,05.

$$V(0{,}2) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \Leftrightarrow$$
$$V(0{,}2) = 0{,}1$$

Værdien af den uafhængige variabel er 0,2. Da er værdien af den afhængige variabel 0,1. Osv.

Vi vil i dette kapitel ofte anvende betegnelsen "x" for den uafhængige variabel. Den afhængige variabel betegnes $f(x)$, som udtrykkes "f af x". Hvis der er flere forskellige funktioner, kan disse beskrives med forskellige betegnelser, $g(x)$, $h(x)$ osv.

Vi kan definere en funktion som:

> En funktion forstås som en beskrivelse af sammenhængen mellem en uafhængig variabel x og en afhængig variabel $f(x)$.
>
> Det gælder, at der til én værdi af den uafhængige variabel x kun findes én værdi af den afhængige variabel $f(x)$.

Ofte anvendes ordet "regneforskrift" eller bare "forskrift" om en funktion.

I forbindelse med grafisk afbildning afbildes den afhængige variabel på y-aksen. Derfor betegnes en funktion ofte som:

$$y = f(x)$$

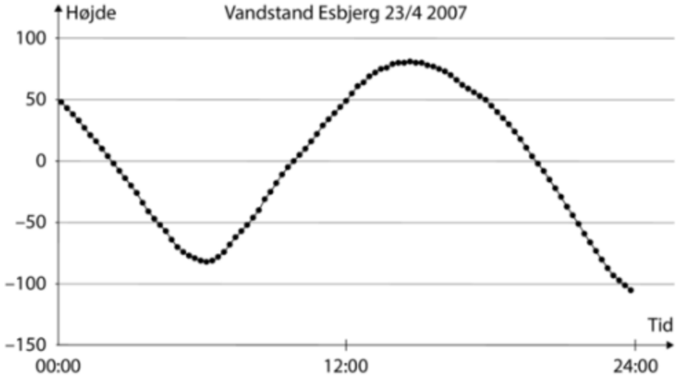
(x, y)

Vi taler derfor om x-værdier og tilhørende y-værdier.

Grafisk afbildning

Vi kan vise en given sammenhæng i et koordinatsystem. Herved får vi en overskuelig repræsentation af sammenhængen mellem to variable.

På figur 7.1.3.1 ses en grafisk afbildning af vandstanden ved Esbjerg, den 23. april 2007. Tidsrummet fra klokken 00:00 til klokken 24:00 aflæses på den vandrette akse. Vandstanden aflæses på den lodrette akse.



Figur 7.1.3.1 Vandstanden ved Esbjerg som funktion af tiden

Eksempel 7.1.3.1

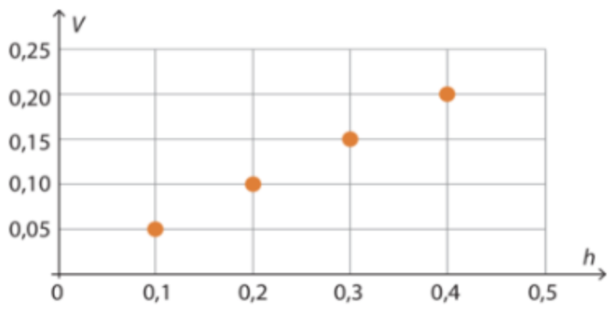
Værdierne i tabel 7.1.1.1 kan også vises i en grafisk afbildning. De uafhængige værdier afsættes som regel på den vandrette akse (x-aksen). De afhængige værdier afsættes på den lodrette akse (y-aksen). Se figur 7.1.3.2. Tabel 7.1.3.1 benævnes af og til som et "sildeben".

h	$V = 0{,}5\,\mathrm{m}^2 \cdot h$
0,1 m	0,05 m^3
0,2 m	0,10 m^3
0,3 m	0,15 m^3
0,4 m	0,20 m^3
...	...

→ (0,1 ; 0,05)

x y

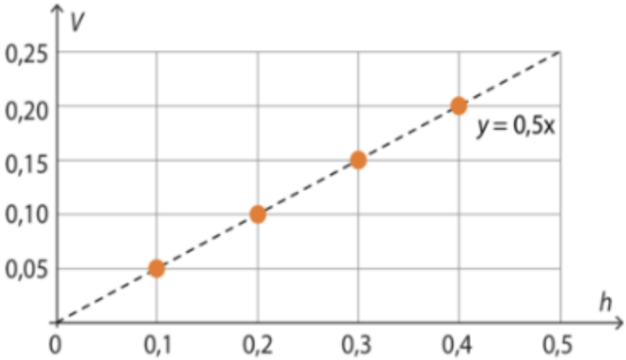
Tabel 7.1.3.1



Figur 7.1.3.2 Værdier fra tabel 8.2 afsat i koordinatsystem

Vi kan godt fornemme, at punkterne ligger på linje. Ved at forbinde punkterne som på figur 7.1.3.3 fås den grafiske afbildning af funktionen:

Vi kan godt fornemme, at punkterne ligger på linje. Ved at forbinde punkterne som på figur 7.1.3.3 fås den grafiske afbildning af funktionen:



Figur 7.1.3.3 Punkterne fra figur 7.1.3.2 forbundet

Eksempel 7.1.3.2

En bil kan lejes under følgende betingelser:

- Leje pr. dag: 650 kr.
- Derudover 2 kr. pr. kørt kilometer.

Vi vil opstille en forskrift (funktion), der beskriver sammenhængen mellem det, vi skal betale, og antal kørte kilometer. Vi vælger antal kørte kilometer som den uafhængige variabel x. Det, vi skal betale, er jo en funktion af antal kørte kilometer. Funktionen kalder vi $f(x)$:

$$f(x) =$$

Vi kan nu beregne, hvad det koster at køre f.eks. 100 km. Vi skriver:

[redacted]

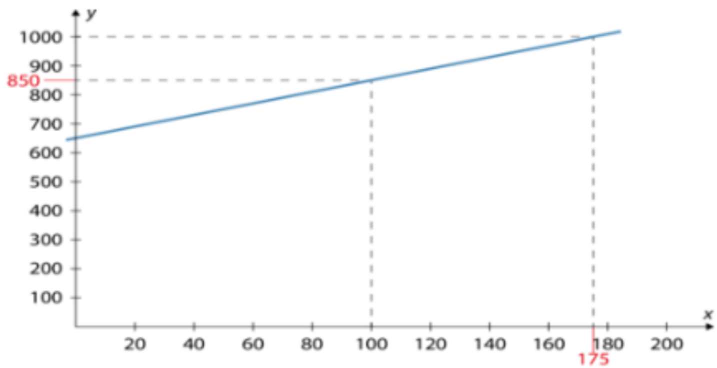
Ligesom i eksempel 7.1.3.1 kan vi lave en tabel (et sildeben) og tegne en graf.

På figur 7.1.3.4 er $f(x)$ afbildet, og vi kan aflæse, at det vil koste 850 kr. at køre 100 km.

Vi kan også bruge funktionen baglæns: Hvor langt kan vi køre for 1000 kr.? Det betyder, at funktionsværdien (den afhængige variabel) er kendt, og vi skal beregne den uafhængige variabel ved at løse en ligning:

[redacted]

Vi kan altså køre 175 km for 1000 kr.



Figur 7.1.3.4 Grafisk afbildning af sammenhængen mellem pris (x) og kørte kilometer (y)

Med fremkomsten af computer og lommeregner er man stort set gået bort fra at lave "sildeben", inden funktionen afbildes.

Øvelser

Opgave 7.1.1

En bil ruller af sted på landevejen. Den uafhængige variabel x betegner tiden i timer.

$f(x)$ betegner, hvor langt bilen kører (målt i kilometer).

Bilen kører med en konstant hastighed på 75 km/t.

1. Hvilket af følgende 3 funktionsudtryk beskriver, hvor langt bilen kører?

a. $f(x) = \frac{75}{x}$

b. $f(x) = 75 - x$

c. $f(x) = 75 \cdot x$

Opgave 7.1.2

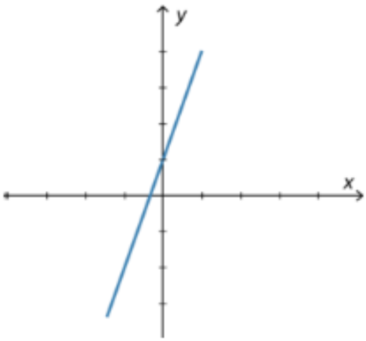
1. Beregn, hvor langt bilen fra opgave 7.1.1 har kørt i løbet af 4 timer.

På et tidspunkt er $f(x) = 138$.

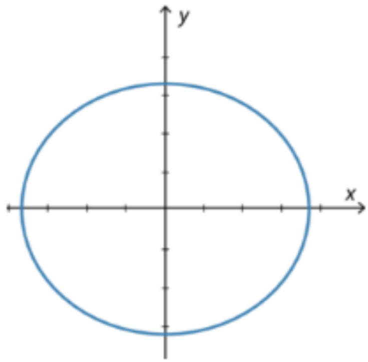
2. Hvilken værdi har x?
3. Hvad er denne værdi et udtryk for?

Opgave 7.1.4

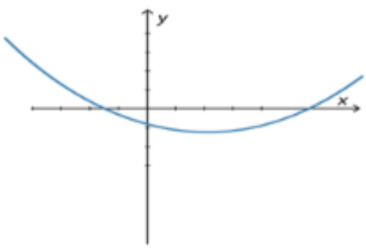
1. Hvilke af figurerne nedenfor viser det grafiske billede af en funktion $y = f(x)$?



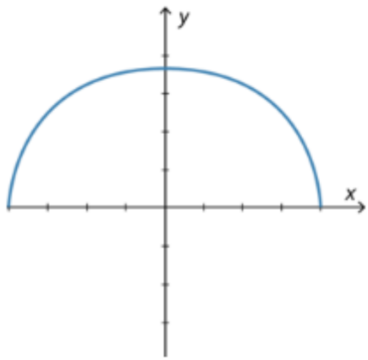
A



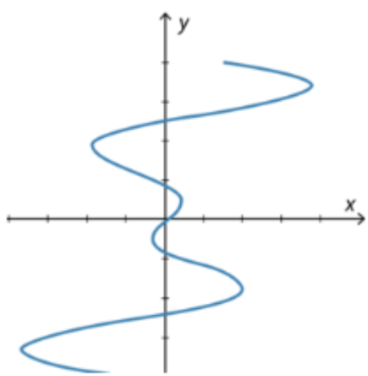
B



C



D



E

Definitions mængde og værdi mængde

Ved en definitionsmængde forstås den mængde af tal, der kan anvendes som uafhængig variabel i en funktion. Definitionsmængden betegnes $\mathrm{Dm}(f)$.

Ved en værdimængde forstås den mængde af funktionsværdier, der fremkommer ved gennemløb af definitionsmængden. Værdimængden betegnes $\mathrm{Vm}(f)$.

Hjælp mig med hvad det betyder

Når vi taster et tal ind på lommeregneren og trykker på x^2-tasten, kvadreres tallet. Det kan vi skrive som en funktion:

$$f(x) = x^2$$

Vi kan indsætte:

$$\begin{aligned} f(-5) &= (-5)^2 &= 25 \\ f(0) &= (0)^2 &= 0 \\ f(2{,}5) &= (2{,}5)^2 &= 6{,}25 \end{aligned}$$

osv...

Vi bemærker, at både positive og negative tal giver en værdi. Det betyder, at vi kan bruge alle reelle tal som uafhængig variabel i funktionen f.

Hvis vi prøver med en anden funktion:

$$g(x) = \sqrt{x}$$

opdager vi, at negative tal giver fejl. Vi kan altså kun anvende positive tal og 0 som uafhængig variabel. Der er med andre ord en begrænsning i de tal, vi kan tillade os at anvende som uafhængig variabel. Denne begrænsning er selvfølgelig afhængig af funktionsforskriften.

Eksempel 7.1.4.1

En funktion:

$$f(x) = 2 \cdot x + 1$$

Den størst mulige definitionsmængde er alle reelle tal:

$$\mathrm{Dm}(f) = R$$

Den tilhørende værdimængde er også alle de reelle tal:

$$\mathrm{Vm}(f) = R$$

Vi vil nu indskrænke definitionsmængden til:

$$\mathrm{Dm}(f) = [-2; 3]$$

Værdimængden kan nu findes ved at lave en tabel:

x	–2	–1	0	1	2	3
$f(x) = 2 \cdot x + 1$	–3	–1	1	3	5	7

Tabel 7.1.4.1 Værdimængden af en række x-værdier for funktionen $f(x) = 2 \cdot x + 1$

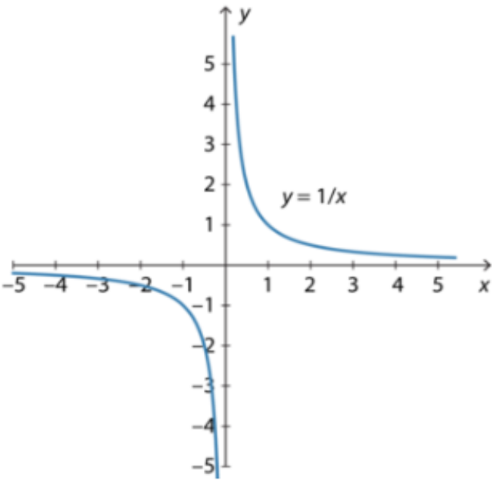
Ved hjælp af tabellen vil vi fastslå, at:

$$\mathrm{Vm}(f) =$$

Eksempel:

Hvad er Dm og Vm for $f(x) = \frac{1}{x}$

Ved at se på den grafiske afbildning af funktionen, figur 7.1.4.2, får vi et indtryk af definitions- og værdimængde:



Figur 7.1.4.2 Grafisk afbildning af funktionen $f(x)$.

Definitionsmængden $\mathrm{Dm}(f)$ er givet som alle reelle tal undtagen 0. Vi kan ikke dividere med 0:

$$\mathrm{Dm}(f) = \text{[redacted]}$$

Værdimængden $\mathrm{Vm}(f)$ er også alle reelle tal frataget 0. Vi skriver:

$$\mathrm{Vm}(f) = \text{[redacted]}$$

At [redacted]

ikke har nogen løsning.

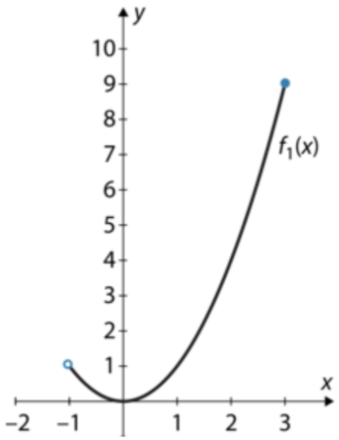
For alle øvrige funktionsværdier vil ligningen have en løsning.

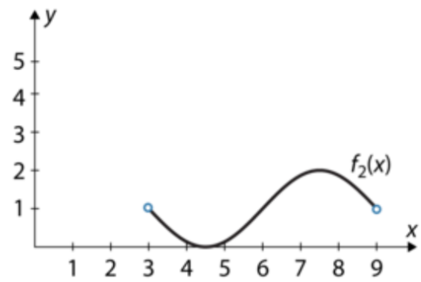
Øvelse

Opgave 7.1.5

På figuren ses det grafiske billede af funktionerne $f_1(x)$ og $f_2(x)$.

1. Angiv ved aflæsning definitions- og værdimængde for de to funktioner.





Opgave 7.1.6

Afbild funktionerne nedenfor i hver sit koordinatsystem. Angiv definitions- og værdimængde for funktionerne.

1. $f_1(x) = 2 \cdot x + 4$
2. $f_2(x) = \sqrt{x - 1}$
3. $f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$
4. $f_4(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

Monotoni forhold

Dette er omkring hvordan en funktion udarder sig

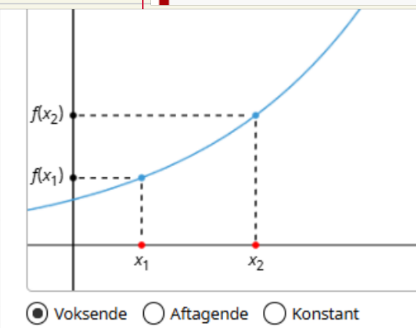
f er voksende i et interval, hvis $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

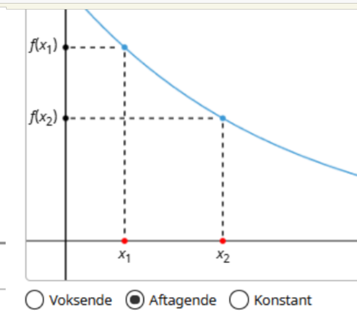
f er aftagende i et interval, hvis $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

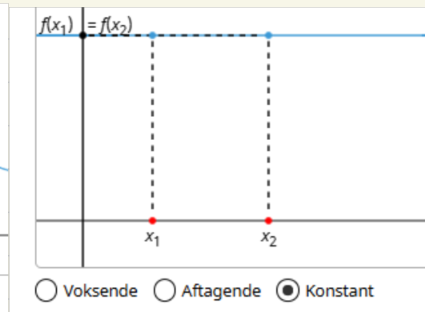
f er konstant, hvis $f(x) = k$ i hele definitionsmængden.

f kaldes monoton, hvis den er enten voksende eller aftagende i hele definitionsmængden.

Et monotoniinterval for f er et interval, hvori f er monoton eller konstant.

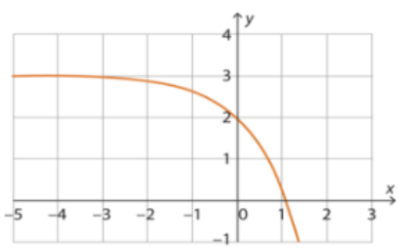






At noget er monotont betyder, at det er ensformigt. En funktion siges at være monoton, hvis den vokser eller aftager i hele definitionsintervallet. Funktionerne på figur 7.1.5.1 og figur 7.1.5.2 er monotone.

Figur 7.1.5.1 Stigende monoton funktion, $f(x)$



Figur 7.1.5.2 Faldende monoton funktion, $g(x)$

En funktion er voksende, når man får stigende y-værdier ved stigende x-værdier.

En funktion er aftagende, når man får faldende y-værdier ved stigende x-værdier.

En funktion, der hverken er voksende eller aftagende, kaldes en konstant funktion.

Fortegn

Hvis en funktion $f(x) > 0$ i et givet interval, siges f at have fortegnet "plus" i det pågældende interval.

Man kan også udtrykke det, som at f er positiv i intervallet.

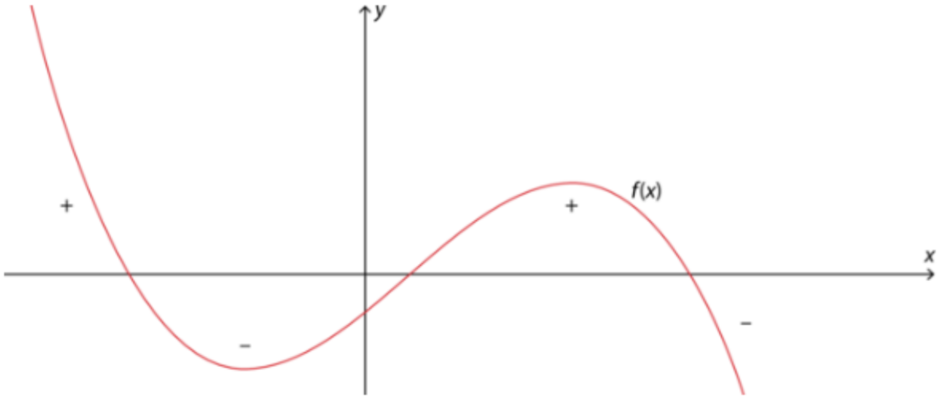
Når $f(x) > 0$, ligger grafen for f over 1. aksen (x-aksen).

Hvis $f(x) < 0$, i et givet interval, siges f at have fortegnet "minus" i det pågældende interval.

Man kan også udtrykke det, som at f er negativ i intervallet.

Når $f(x) < 0$, ligger grafen for f under 1. aksen (x-aksen).

Se figur 7.1.5.4.



Figur 7.1.5.4

For at kunne foretage en *fortegnsanalyse* skal funktionens definitionsmængde $Dm(f)$ fastlægges.

Vigtigt begreb: <u>Rodder</u>

Ligeledes skal rødderne i f bestemmes.

Rødderne er x-værdierne i koordinaterne til grafens skæringspunkter med x-aksen.

Rødderne findes derfor som løsning(er) til ligningen:

$$f(x) = 0$$

Maksimum og minimum

På figur 7.1.6.1 ses det grafiske billede af en funktion afbildet for $Dm(f) = [1;5]$. Vi kan se, at funktionen har en maksimumværdi på 8, når $x = 2$.

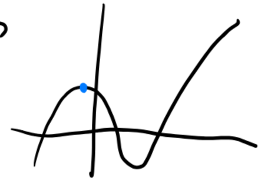
Endvidere er funktionen voksende i [1;2] og aftagende i [2;4] samt voksende i [4;5].

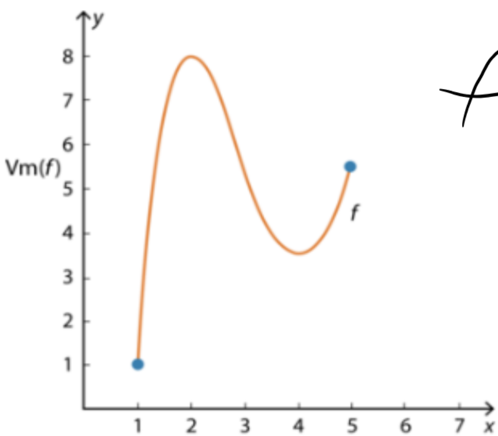
Punktet med *x*-værdien 1 kaldes et *globalt minimumspunkt*. Dér finder vi den mindste funktionsværdi i definitionsintervallet.

Punktet med *x*-værdien 2 kaldes et *globalt maksimumspunkt*. Dér finder vi den største funktionsværdi i definitionsintervallet. Det viste maksimumspunkt er også det sted, hvor funktionen går fra at være voksende til at være aftagende.

Punktet med *x*-værdien 4 kaldes et *lokalt minimumspunkt*. Det er et sted, hvor funktionen lokalt går fra at være aftagende til at være voksende.

Et *lokalt maksimumspunkt* kan også forekomme. Det er et sted, hvor funktionen lokalt går fra at være voksende til at være aftagende.





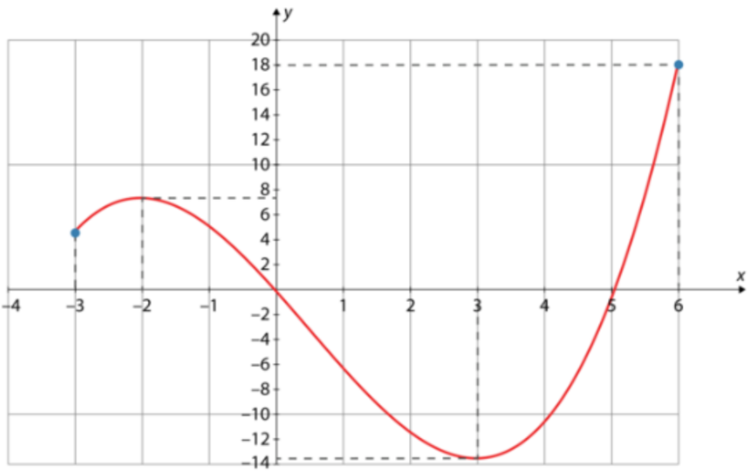
Figur 7.1.6.1 Grafisk afbildning af funktionen for $Dm(f) = [1;5]$.

Eksempel 7.1.6.1

På figur 7.1.6.2 ses det grafiske billede af funktionen

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6 \cdot x$$

hvor $\mathrm{Dm}(f) = [-3; 6]$.



Figur 7.1.6.2 Funktionen f afbildet i et koordinatsystem for $\mathrm{Dm}(f) = [-3; 6]$

Vi vil fastlægge funktionens monotoniforhold. I tabel 7.1.6.1 ses en oversigt over ekstremumspunkter.

Punkt	Type
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

Tabel 7.1.6.1 Ekstremumspunkter for funktionen f

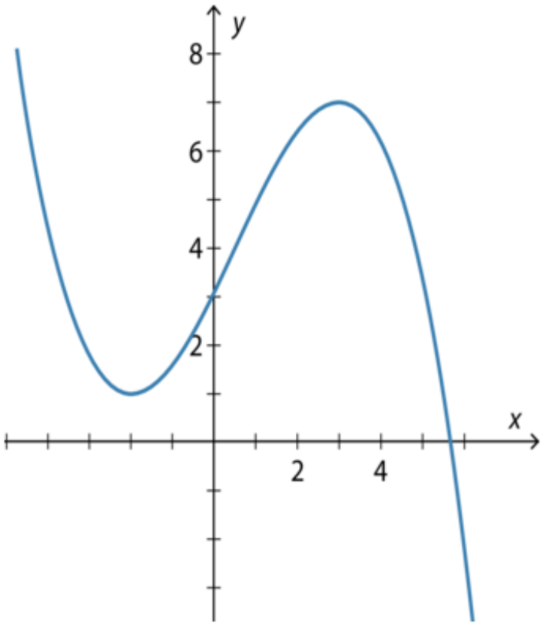
Vi kan derfor fastslå følgende:

- Funktionen er voksende i intervallerne [illegible] og [illegible].
- Funktionen er aftagende i intervallet [illegible]
- Værdimængden er mellem det globale minimum og globale maksimum, [illegible].

Øvelser

Opgave 7.1.8

På figuren ses det grafiske billede af en funktion $f(x)$:



1. Aflæs koordinaterne til de steder, hvor der er lokalt maksimum og minimum.
2. Fastlæg funktionens monotoniforhold.
3. Bestem funktionens definitions- og værdimængde, $\mathrm{Dm}(f)$ og $\mathrm{Vm}(f)$.
4. Udfør en fortegnsanalyse af f.

Opgave 7.1.9

En funktion har forskriften:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x$$

1. Afbild grafen for $f(x)$ i et koordinatsystem.
2. Du skal angive funktionens definitionsmængde $\mathrm{Dm}(f)$.
3. Du skal angive funktionens værdimængde $\mathrm{Vm}(f)$.
4. Find eventuelle lokale maksimums- og minimumspunkter. Gerne ved aflæsning på grafen eller ved hjælp af CAS.
5. Redegør for funktionens monotoniforhold.