Logaritme funktion

Vi kigger nu på: logaritmefunktionen :)
som skal anses som den modsatte funktion til eksponentiel funktionen. Vi kigger nu på hvad det betyder.
Svært at regne i hovedet

I eksponentialfunktionen $f(x) = a^x$ kan vi beregne funktionsværdier ved indsætning af talværdier på x's plads. Men hvad nu, hvis vi har en funktionsværdi og gerne vil finde den tilhørende x-værdi?

For at svare på det spørgsmål vil vi i det følgende kigge på en eksponentialfunktion med grundtallet 10. Forskriften er:

$$y = 10^x$$

Eksempel 7.11.1

Vi ved, at $1000 = 10^3$, og ligeledes er

- $100 = 10^2$
- $10 = 10^1$
- $1 = 10^0$
- $0{,}1 = 10^{-1}$
- osv.

I ovenstående potenser er grundtallet lig med 10.

Man siger derfor, at *logaritmen* til 1000 er lig med 3, logaritmen til 100 er lig med 2 ... logaritmen til 0,1 er lig med -1, osv.

Logaritmen til 100 skrives på kort form som log(100).

Vi kan derfor skrive: $100 = 10^{\log(100)} = 10^2$

Eksponenten behøver ikke at være heltallig. For eksempel er $5 \approx 10^{0.69895}$. Derfor er $\log(5) \approx 0.69895$.

Vi kan dermed skrive følgende

Sætning 7.11.1.1

Logaritmen til et tal er den eksponent, vi skal give 10 for at få tallet.

Da grundtallet i vores definition er 10, kaldes logaritmen for titals-logaritmen.

Logaritmen kan kun anvendes for positive tal, da eksponentialfunktionen 10^x ikke kan antage negative værdier eller 0.

Vi kan nu definere en titals-logaritmefunktion:

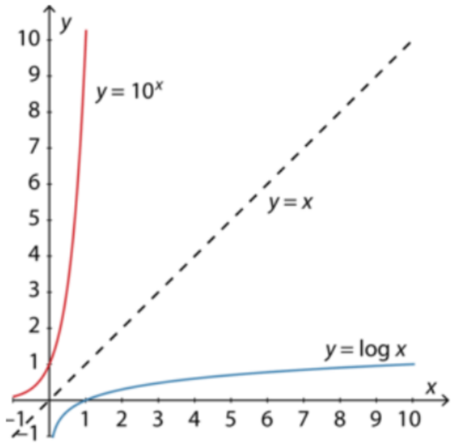
$$f(x) = \log(x)$$

Definitionsmængden er de positive tal. Værdimængden er de reelle tal.

Grafisk →
→ Modsatte funktioner

$$f(x) = 10^x,\ f^{-1}(x) = \log(x)$$

$$f(f^{-1}(x)) = 10^{\log(x)} = x, \quad \text{når } x > 0$$



Figur 7.11.1.1 $y = 10^x$ og $y = \log x$ afbildet i et koordinatsystem

Eksempel 7.11.1.2

$$0{,}1 = 10^{\log(0{,}1)}, \text{ da } 10^{-1} = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \log(0{,}1) = -1$$

$$1 = 10^{\log(1)}, \text{ da } 10^{0} = 1 \quad \Leftrightarrow \log(1) = 0$$

$$10 = 10^{\log(10)}, \text{ da } 10^{1} = 10 \quad \Leftrightarrow \log(10) = 1$$

$$100 = 10^{\log(100)}, \text{ da } 10^{2} = 100 \quad \Leftrightarrow \log(100) = 2$$

$$1000 = 10^{\log(1000)}, \text{ da } 10^{3} = 1000 \quad \Leftrightarrow \log(1000) = 3$$

Regne regler

Sætning 7.11.2.1 - 1. logaritmeregel

Logaritmen til et produkt er lig med logaritmen til den ene faktor plus logaritmen til den anden faktor:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Eksempel 7.11.2.1

Der er ingen begrænsninger i antallet af faktorer:

$$\log(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = \log(3) + \log(4) + \log(5) + \log(6) = 2{,}556$$

Sætning 7.11.2.2 - 2. logaritmeregel

Logaritmen til en brøk er lig med logaritmen til tælleren minus logaritmen til nævneren:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Eksempel:

$$\log\left(\frac{3}{4}\right) = \log(3) - \log(4) = -0{,}1249\ldots$$

Sætning 7.11.2.3 - 3. logaritmeregel

Logaritmen til en potens er lig med eksponenten gange logaritmen til grundtallet:

$$\log(a^n) = n \cdot \log(a)$$

$$\log\left(\sqrt[n]{a^b}\right) = \log\left(a^{\frac{b}{n}}\right) = \frac{b}{n} \cdot \log(a)$$

Eksempel: (Anvendt lommeregner)

$$\log(3^4) = 4 \cdot \log(3) = 1{,}90849$$

$$\log\left(\sqrt[3]{5^2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \log(5) = 0{,}46598$$

I spørger nok hvorfor i skal kende til dette.

Bogen gør også:

Hvorfor skal vi så lære om logaritmer, når nu vi har lommeregner og computer? Det skal vi, fordi logaritmer bl.a. kan anvendes til løsning af ligninger, som indeholder eksponentielle udtryk. Vi skal senere se på, hvordan logaritmer også anvendes ved definition af for eksempel lydstyrke. Ved måling af et jordskælvs styrke anvendes *Richter-skalaen,* som er en logaritmisk skala. Det samme er pH-skalaen i kemi.

Eksempel 7.11.3.1

Vi vil løse ligningen:

$$0{,}8 = 1{,}5^x$$

Vi tager nu logaritmen på begge sider af lighedstegnet for at få x "trukket ned":

$$\log(0{,}8) = \log\left(1{,}5^x\right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\log(0{,}8) = x \cdot \log(1{,}5) \qquad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\log(0{,}8)}{\log(1{,}5)} = -0{,}55$$

Det betyder, at:

$$1{,}5^{-0{,}55} = 0{,}8$$

Eksempel med PENGE
I har sat 2.000 ind på en opsparing, hvor i får 3% i rente hvert år

Eksempel med PENGE

I har sat 2.000 ind på en opsparing, hvor i får 3% i rente hvert år.

Undersøg hvor mange år der går før i har 3.500 kr.

Husk $k_n = k_0 \cdot (1+r)^n$

Eksempel 7.11.3.2

husk at $\log(x)$ og 10^x er hinandens modsatte: $10^{\log(x)} = x$

Vi har en ligning:

$$\log(x) = 1{,}25 \Leftrightarrow$$

$$x = 10^{\log(x)} = 10^{1{,}25} = 17{,}783$$

Eksempel 7.11.3.3

Vi løser ligningen:

$$\log(3 \cdot x - 2) = 1{,}8 \qquad \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot x - 2 = 10^{1{,}8} \qquad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{10^{1{,}8} + 2}{3} = 21{,}7$$

Den naturlige logaritme

Titals-logaritmen har grundtallet 10. Med udgangspunkt i eksponentialfunktionen:

$$f(x) = e^x$$

hvor e er Eulers tal, definerer vi den omvendte funktion:

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

som den *naturlige logaritmefunktion*.

Det betyder, at:

$$x = e^{\ln(x)}$$

Sætning 7.11.4.1

Den naturlige logaritme til et tal er den eksponent, vi skal give e for at få tallet.

Da grundtallet er e i vores definition, kaldes logaritmen for den naturlige logaritme, ln.

Logaritmen kan kun anvendes for positive tal, da eksponentialfunktionen e^x ikke kan antage negative værdier eller 0.

Der gælder ved den naturlige logaritme de samme regneregler som for titals-logaritmen:

Logaritmeregler

1. logaritmeregel: $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
2. logaritmeregel: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. logaritmeregel: $\ln\left(a^n\right) = n \cdot \ln(a)$, $\ln\left(\sqrt[n]{a^b}\right) = \frac{b}{n} \cdot \ln(a)$

Øvelser

Opgave 7.11.2

Løs følgende ligninger:

1. $\log(x) = 0{,}5$
2. $\log(3 \cdot x - 2) = 2$

Opgave 7.11.1

Løs følgende ligninger:

1. $1{,}8 = 10^{x-3}$
2. $10 = 10^{x^2-3\cdot x+1}$

Opgave 7.11.3

Du skal udfylde de tomme pladser, markeret med _ , i ligningerne:

1. $\log(3 \cdot x) = \log \_ + \log \_$
2. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log \_ - \log \_$
3. $\log \frac{a \cdot b}{c} = \log \_ + \log \_ - \log \_$
4. $\log 2^x = \_ \cdot \log \_$
5. $\log \sqrt[n]{x} = log(x^{\frac{1}{n}}) = \_ \cdot \_$
6. $\log \frac{x^2 \cdot \sqrt{b}}{a} = \_ \cdot \_ + \_ \cdot \_ - \_$

Opgave 7.11.6

1. Løs denne ligning:

$$\log(x-4)+\log(x+7)=2$$

Opgave 7.11.7

1. Løs denne ligning:

$$\ln(x-1)+\log(x-1)=1$$

Øvelse 1 — Hvor lang tid tager det at nå 20.000 kr?

Du har arvet **12.000 kr**, som du sætter i banken. Banken tilbyder en årlig rente på **3,2%**, og du sætter ingen ekstra penge ind efter startbeløbet.

Bankens udvikling kan beskrives med modellen:

$$A(t)=12000\cdot 1,032^t$$

hvor

- $A(t)$ er opsparingen efter t år
- t er antallet af år

Opgaver

1. Brug modellen til at undersøge, hvor mange år der går, før opsparingen overstiger **20.000 kr.**
2. Forklar med ord, hvorfor man skal bruge logaritmer for at finde antallet af år.
3. Hvor meget står der på kontoen efter præcis **10 år**?

Øvelse 2 — Hvornår er pengene fordoblet?

En elev sætter **5.000 kr** ind på en investeringskonto. Kontoen vokser med **5% om året**. Den eksponentielle model er:

$$B(t) = 5000 \cdot 1,05^t$$

Opgaver

1. Bestem, hvor mange år der går, før opsparingen er fordoblet. (Hint: Løs ligningen $5000 \cdot 1,05^t = 10000$ vha. logaritmer).
2. Hvor stor er opsparingen efter **7 år**?
3. Forklar kort, hvad rente betyder i denne sammenhæng.

Øvelse 3 — Opsparing til kørekort

En studerende vil spare op til et kørekort, som koster **13.000 kr**. De sætter **4.000 kr** i banken, og banken giver **2,6% i årlig rente**.

Modellen er:

$$C(t) = 4000 \cdot 1,026^t$$

Opgaver

1. Undersøg, hvor mange år der går, før opsparingen når **13.000 kr**.
2. Skriv de trin du bruger, når du anvender logaritmer til at isolere t.
3. Vurdér, om det vil være hurtigere at nå målet ved at øge renteprocenten til 4%, og vis en kort beregning.