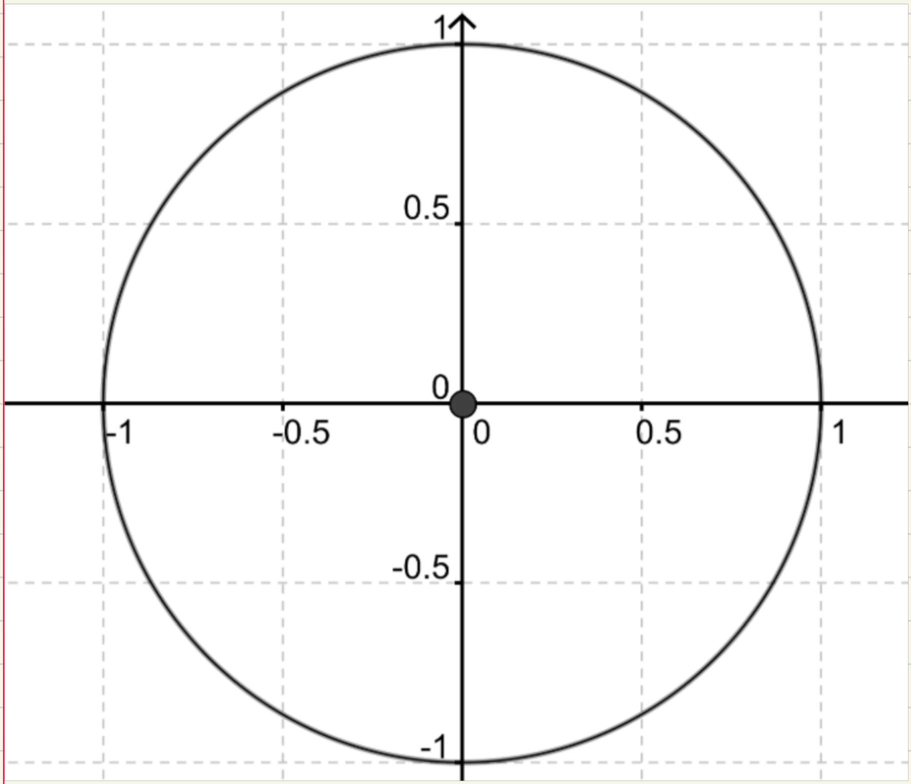
Trigonometriske funktioner

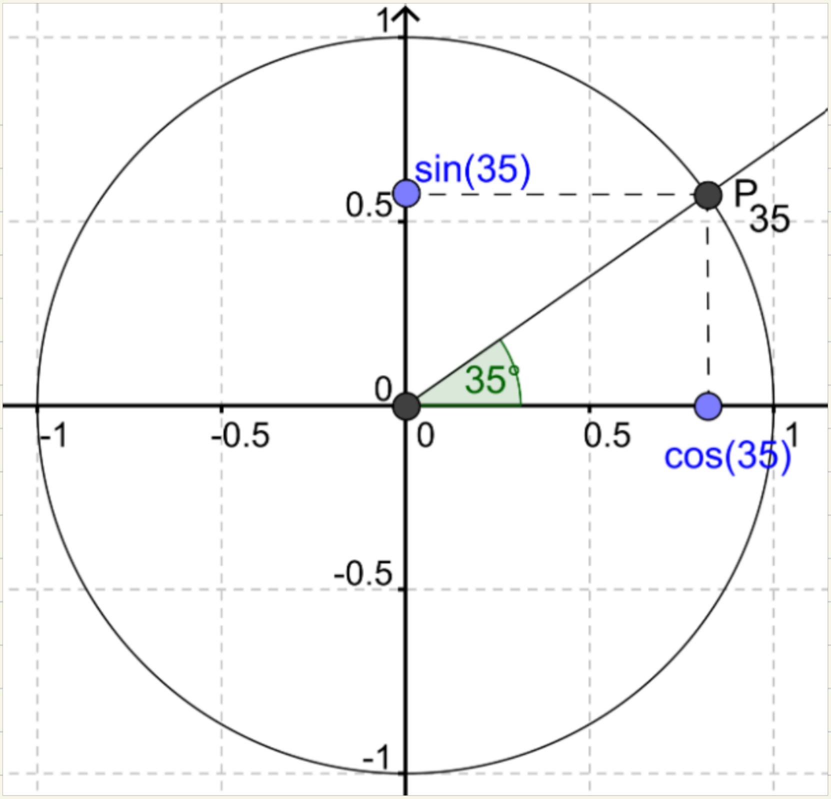
Dette omhandler cosinus og sinus, men inden ser vi på enhedscirklen



Ud fra denne kan vi definere cos(x) og sin(x)

VIGTIGT:

- Værdierne er mellem −1 og 1 → se enhedscirklen



Hvis man kunne aflæse meget præcist, kunne man se at

↳ kan vi det ??

$$P_{35}(0.819,\ 0.574)$$

↳ x ↳ y

hvilket betyder at

$$\cos(35^\circ) = 0,819$$

$$\sin(35^\circ) = 0,574$$

Der er ingen, der kan aflæse så præcist. Så i praksis benytter man en lommeregner, der har indbygget knapper for cosinus og sinus.

Vinkler angav vi i grader således:

$$v = 32^\circ$$
$$\cos(v) = 0{,}848$$

En vinkel kan også angives i radianer. Vi husker, at omkredsen af enhedscirklen med radius $r = 1$ er givet som:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow$$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi$$

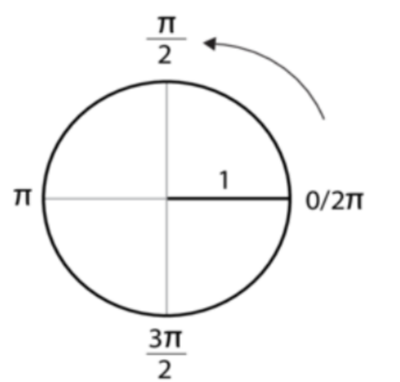
Vi ved, at en cirkel spænder over en vinkel på 360°. Vi indfører nu begrebet radianer, som er et vinkelmål, der svarer til en buelængde på enhedscirklen:

$$360^\circ = 2 \cdot \pi \quad \text{radianer}$$

Vi kan omregne:

$$1^\circ = \frac{2 \cdot \pi}{360} = 0{,}017 \quad \text{radianer}$$

$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2 \cdot \pi} = 57{,}296^\circ$$



Eksempel:

Hvad er radianen for følgende vinkler og radianer

$0^\circ =$ $\qquad$ $45^\circ =$

90° $\qquad$ $360^\circ =$

450°

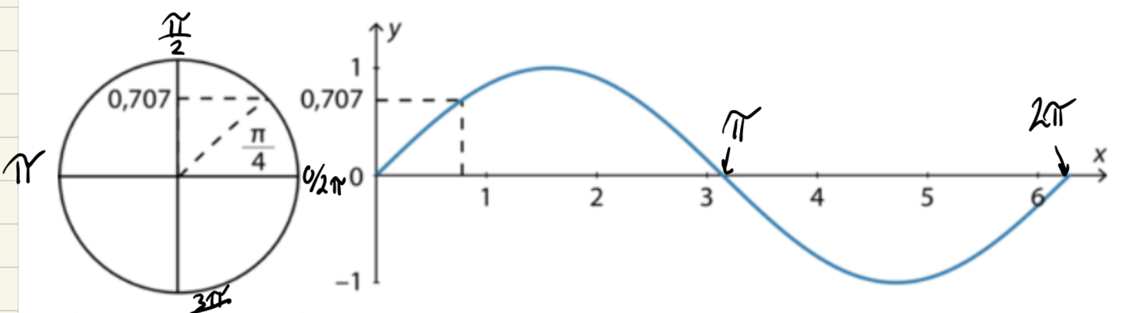
$\frac{3\pi}{2} =$ $\qquad$ $\pi =$

Sinus

Dette er en trigonometrisk funktion, hvor vi skal forestille os at enhedscirklen "rulles" ud over x-aksen, så vi har følgende funktions udtryk.

$$f(x) = \sin(x)$$

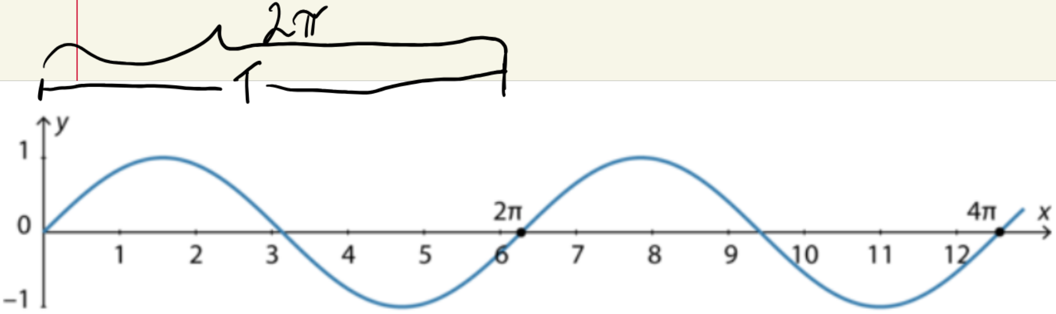
En værdi, som vi også kan aflæse på 2. aksen i det koordinatsystem hvor enhedscirklen er afbildet.



Figur 7.14.11 Sinuskurve

afbildet i intervallet $[0; 2\pi]$. Vi betragter således én omgang på enhedscirklen. Grafen kaldes en *sinuskurve*. Bemærk værdimængden $Vm(f) = [-1; 1]$.

Denne funktion fortsætter til ∞ ved at gentage sig selv også kaldet en periodisk funktion



Figur 7.14.1.2 Sinuskurve i intervallet $[0; 4\pi]$

En funktion, hvor funktionsværdierne gentages med faste mellemrum, kaldes en *periodisk* funktion.

I tilfældet $f(x) = \sin(x)$ er perioden $T = 2\pi$.

Det betyder, at:

$$f(x) = f(x + 2\pi \cdot n) = \sin(x + 2\pi \cdot n)$$

hvor n er et helt tal og repræsenterer antallet af omgange på enhedscirklen.

så: $\sin(\pi) = \sin(\pi + 2\pi) = \sin(\pi + 4\pi) =$ osv

Vi kan se, at værdierne gentages:

$$f(x) = \sin(x) = \sin(x + 2\pi \cdot n)$$

$$n = 0 \Rightarrow f(1{,}3 + 2\pi \cdot 0) = \sin(1{,}3) = 0{,}964$$

$$n = 1 \Rightarrow f(1{,}3 + 2\pi \cdot 1) = \sin(1{,}3 + 2 \cdot \pi) = 0{,}964$$

$$n = 6 \Rightarrow f(1{,}3 + 2\pi \cdot 6) = \sin(1{,}3 + 12 \cdot \pi) = 0{,}964$$

Derfor vi altid bare fokusere på intervallet $[0, 2\pi]$

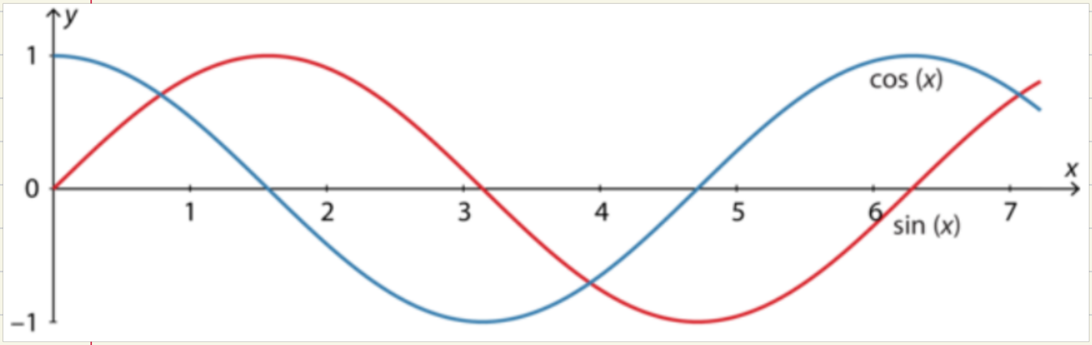
Cosinus

På figur 7.14.2.1 ses det grafiske billede af funktionen:

$$f(x) = \cos(x)$$

Grafen kaldes også her en sinuskurve. Den eneste forskel er, at kurven for cosinus er forskudt $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ svarende til 90° i forhold til grafen for sinus. Vi husker fra den retvinklede trekant, at $\cos(x) = \sin(90^\circ - x)$ svarende til at $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

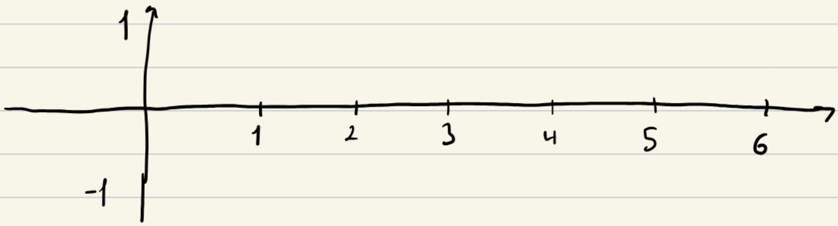
Hvad betyder dette?



Husk Værdimængden (Vm) igen her er [-1, 1]

Skitsering

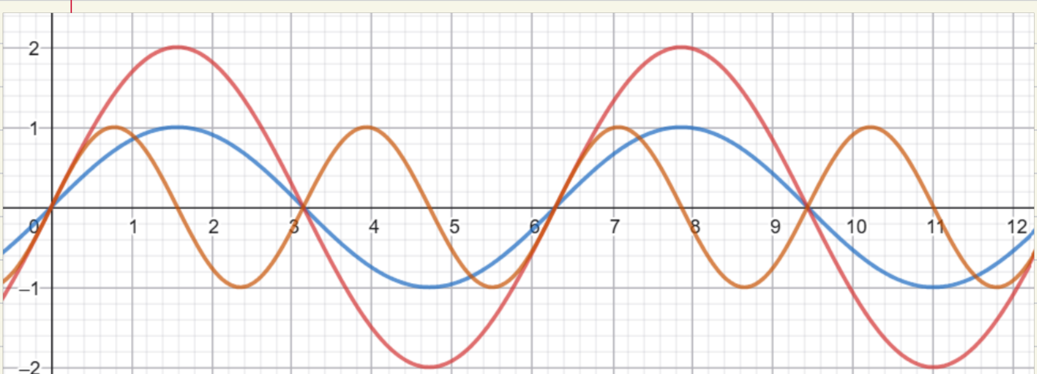
Ide: indtegn kendte punkter, og tegn mellem dem



Indtegn $\sin(x)$

hvilke punkter kender vi?

Gå ind i geogebra og skriv: $a \cdot \sin(b \cdot x)$ og se om i kan forstå hvad a og b har af betydning



Her har vi: $\sin(x)$, $\sin(2x)$ og $2 \cdot \sin(x)$, men hvilken graf er til hvilken funktion

Hvis vi har:
→ $n \cdot \sin(x)$, så er vores maximale værdier (1) blevet større

→ $\sin(2x)$, så er vores periode blevet kortere fordi vi har 2-gange vores x-værdi, så den bliver hurtigere igennem perioderne

Løsning af trigonometriske grundligninger

Vi vil se, hvordan man kan løse en trigonometrisk grundligning af typen:

$$\sin(x) = k \text{ hvor } \underbrace{-1 \leq k \leq 1}_{} \text{ i intervallet } \underbrace{0 \leq x \leq 2\pi}_{}$$

Hvorfor ← ↳ hvorfor

Eksempel 7.14.5.1

Vi kigger på ligningen

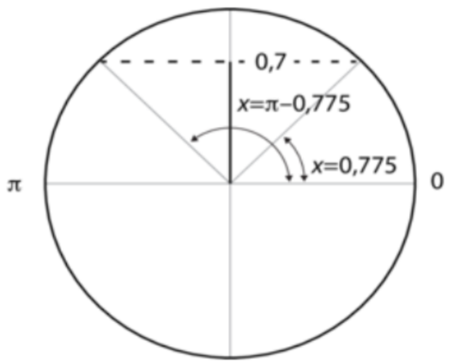
$$\sin(x) = 0{,}7 \quad x \in [0; 2\pi]$$

Vi skal finde de vinkler, der har sinusværdien 0,7. Når vi bruger CAS-værktøjet, får vi:

modsat funktion

$$x = \sin^{-1} 0{,}7 = 0{,}775$$

Ved at kigge på enhedscirklen kan vi se, at der er to vinkler med sinusværdien 0,7. Se figur 7.14.5.1.



Figur 7.14.5.1 Sinusværdien 0,7 afbildet i en enhedscirkel

Den anden vinkel finder vi ved at trække den første vinkel fra π. Ligningens løsning bliver derfor:

$$x = 0{,}775 \vee x = \pi - 0{,}775 = 2{,}366$$

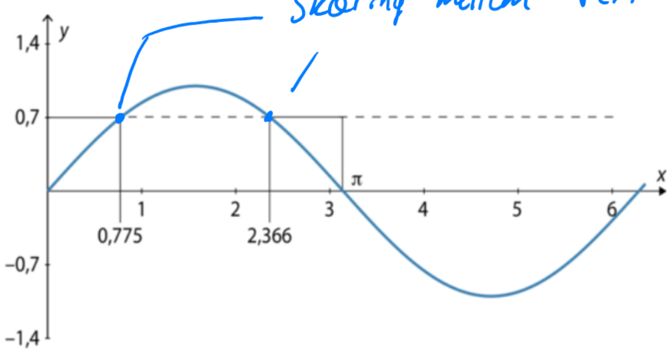
kan også løses på følgende måde:

Vi kan også danne et indtryk af løsningen ved at kigge på graferne for:

$$f(x) = \sin(x) \text{ hvor } x \in [0; 2\pi] \text{ og } g(x) = 0{,}7$$

Se figur 7.14.5.2.

skæring mellem f(x) og g(x)



Figur 7.14.5.2 Graferne for $f(x) = \sin(x) \quad x \in [0; 2\pi]$ og $g(x) = 0{,}7$

Af figuren fremgår, at løsningerne er givet som:

$$x = 0{,}775 \vee x = \pi - 0{,}775 = 2{,}366$$

Sætning 7.14.5.1

Den trigonometriske grundligning:

$$\sin(x) = k \text{ i intervallet } 0 \leq x \leq 2\pi$$

har løsningen

$$x = \sin^{-1} k \vee x = \pi - \sin^{-1} k \text{ , hvor } 0 \leq k \leq 1$$

$$x = \pi - \sin^{-1} k \vee x = \sin^{-1} k + 2\pi \text{ , hvor } -1 \leq k \leq 0$$

for cosinus:

Vi vil se, hvordan man kan løse en trigonometrisk grundligning af typen:

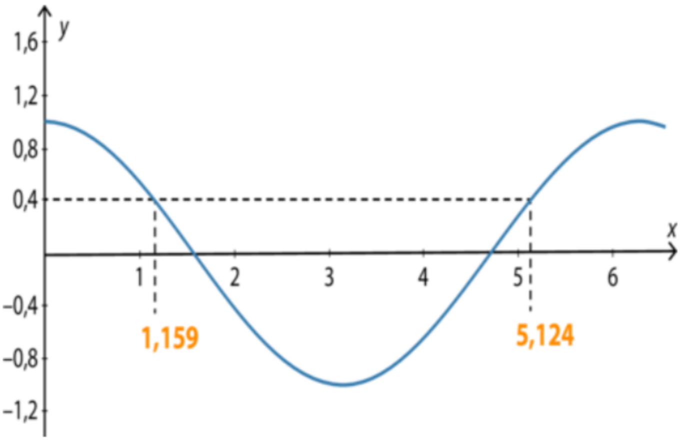
$$\cos(x) = k \text{ hvor } -1 \leq k \leq 1 \text{ i intervallet } 0 \leq x \leq 2\pi$$

Eksempel 7.14.6.1

Vi løser ligningen:

$$\cos(x) = 0{,}4$$

Her ses den grafiske løsning:



Figur 7.14.6.1 Grafisk løsning af ligningen $\cos(x) = 0{,}4$

Med CAS-værktøjet får vi den ene vinkel:

$$x = \cos^{-1}(0{,}4) = 1{,}159$$

Da grafen er symmetrisk, ses det, at den anden løsning bliver:

$$x = 2\pi - 1{,}159 = 5{,}124$$

Løsningen til den trigonometriske grundligning $\cos(x) = 0{,}4$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ er:

$$x = 1{,}159 \quad \vee \quad x = 5{,}124$$

Sætning 7.14.6.1

Den trigonometriske grundligning

$$\cos(x) = k \text{ i intervallet } 0 \leq x \leq 2\pi$$

har løsningen

$$x = \cos^{-1}(k) \vee x = 2\pi - \cos^{-1}(k) \text{ , hvor } -1 \leq k \leq 1$$

Øvelser

Opgave 7.14.1

Omregn følgende gradmål til radianer:

1. $23°$
2. $45°$
3. $170°$
4. $210°$
5. $293°$

Opgave 7.14.2

Omregn følgende radiantal til grader:

1. 5,8
2. 0,65
3. 4,3

Opgave 7.14.3

Løs følgende trigonometriske grundligninger:

1. $\sin(x) = 0{,}8$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$
2. $\sin(x) = -0{,}2$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$
3. $\cos(x) = 0{,}37$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$
4. $\cos(x) = -0{,}77$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$
5. $\tan(x) = 2{,}8$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$
6. $\tan(x) = -1{,}9$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$

Opgave 7.14.4

Find den fuldstændige løsning til følgende ligninger:

1. $\cos(x) = 0{,}54$
2. $2 \cdot \sin(x) = 1{,}64$

Skitser følgende i hånden og tjek efter i geogebra.

$f(x) = \sin(x)$ $h(x) = 3 \cdot \sin(x)$

$g(x) = \cos(x)$ $q(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$

$p(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$

$k(x) = \cos(2x)$