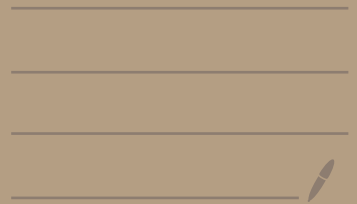
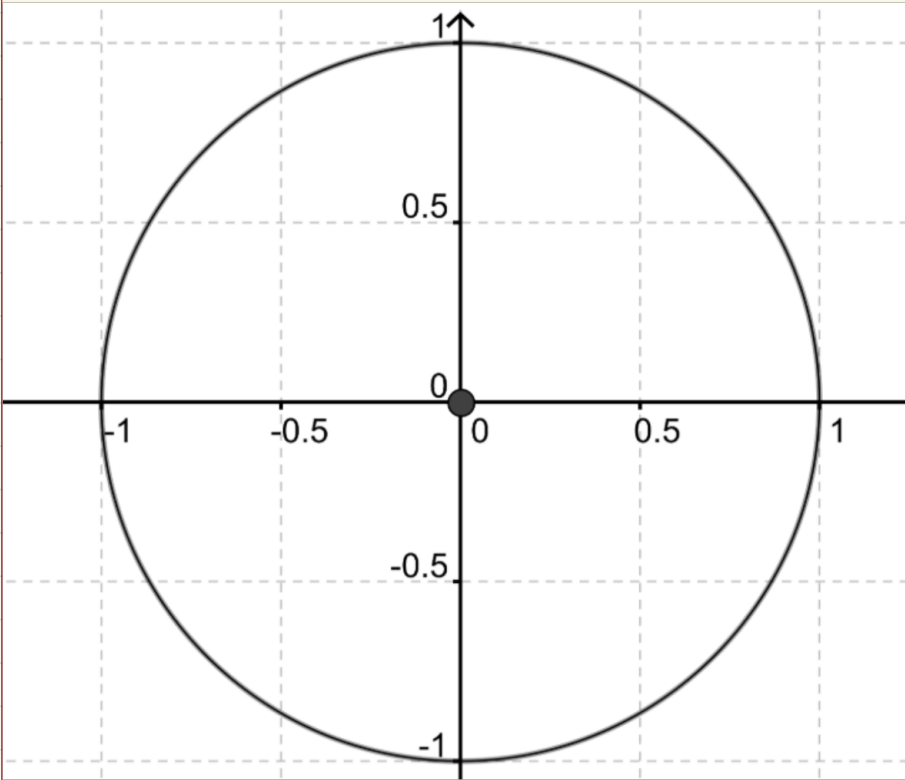


Trigonometriske funktioner



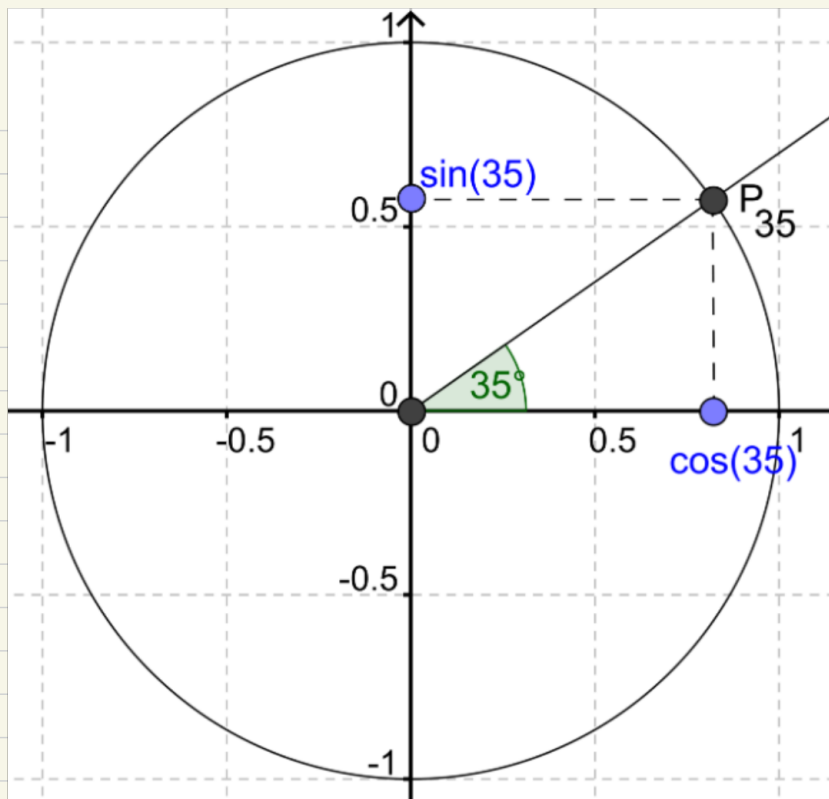
Dette om handler cosinus og sinus, men inden ser vi på enhedscirklen



Ud fra denne kan vi definere $\cos(x)$ og $\sin(x)$

VIGTIGT:

-Værdierne er mellem -1 og $1 \rightarrow$ se enhedscirklen



Hvis man kunne af læse meget præcist, kunne man se at

$$P_{35}(0.819, 0.574)$$

$\hookrightarrow x$ $\hookrightarrow y$

hvilket betyder at

$$\cos(35^\circ) = 0,819$$

$$\sin(35^\circ) = 0,574$$

↳ kan vi det ??

Der er ingen, der kan aflæse så præcist. Så i praksis benytter man en lommeregner, der har indbygget knapper for cosinus og sinus.

Vinkler angav vi i grader således:

$$v = 32^\circ$$

$$\cos(v) = 0,848$$

En vinkel kan også angives i radianer. Vi husker, at omkredsen af enhedscirklen med radius $r = 1$ er givet som:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow$$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi$$

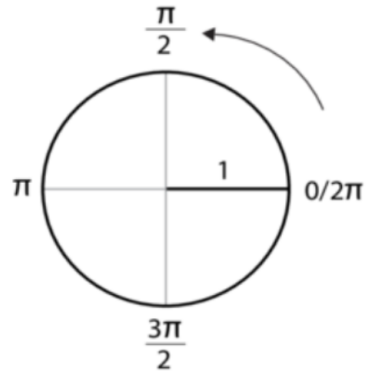
Vi ved, at en cirkel spænder over en vinkel på 360° . Vi indfører nu begrebet radianer, som er et vinkelmål, der svarer til en buelængde på enhedscirklen:

$$360^\circ = 2 \cdot \pi \text{ radianer}$$

Vi kan omregne:

$$1^\circ = \frac{2 \cdot \pi}{360} = 0,017 \text{ radianer}$$

$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2 \cdot \pi} = 57,296^\circ$$



Eksempel:

Hvad er radianer for følgende vinkler og radianer

$$0^\circ =$$

$$90^\circ =$$

$$450^\circ =$$

$$45^\circ =$$

$$360^\circ =$$

$$\frac{3\pi}{2} =$$

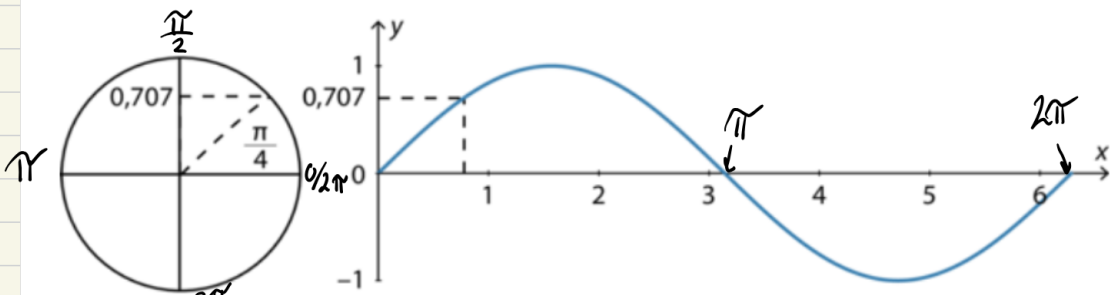
$$\pi =$$

Sinus

Dette er en trigonometrisk funktion, hvor vi skal forestille os at enhedscirklen "rulles" ud over x-aksen, så vi har følgende funktionsudtryk.

$$f(x) = \sin(x)$$

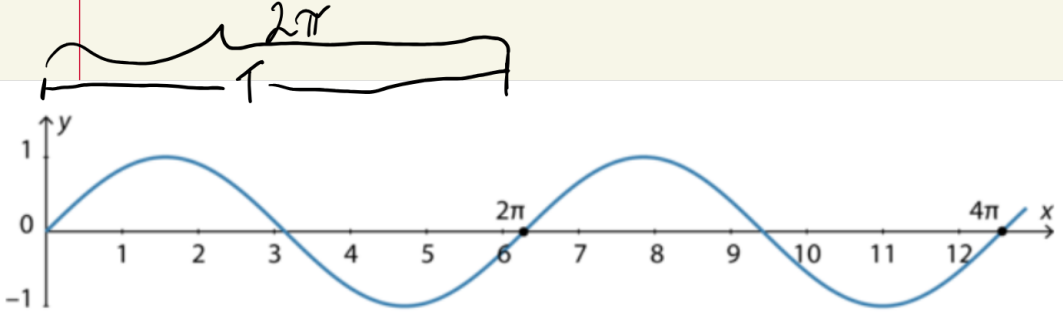
En værdi, som vi også kan aflæse på 2. akse i det koordinatsystem hvor enhedscirklen er afbildet.



Figur 7.14. ²¹ Sinuskurve

afbildet i intervallet $[0; 2\pi]$. Vi betragter således én omgang på enhedscirklen. Grafen kaldes en *sinuskurve*. Bemærk værdimængden $V_m(f) = [-1; 1]$.

Denne funktion fortsætter til ∞ ved at gentage sig selv også kaldet en periodisk funktion



Figur 7.14.1.2 Sinuskurve i intervallet $[0; 4\pi]$

En funktion, hvor funktionsværdierne gentages med faste mellemrum, kaldes en *periodisk* funktion.

I tilfældet $f(x) = \sin(x)$ er perioden $T = 2\pi$.

Det betyder, at:

$$f(x) = f(x + 2\pi \cdot n) = \sin(x + 2\pi \cdot n)$$

hvor n er et helt tal og repræsenterer antallet af omgange på enhedscirklen.

så: $\sin(\pi) = \sin(\pi + 2\pi) = \sin(\pi + 4\pi) = \dots = 0$

Vi kan se, at værdierne gentages:

$$f(x) = \sin(x) = \sin(x + 2\pi \cdot n)$$

$$n = 0 \Rightarrow f(1,3 + 2\pi \cdot 0) = \sin(1,3) = 0,964$$

$$n = 1 \Rightarrow f(1,3 + 2\pi \cdot 1) = \sin(1,3 + 2 \cdot \pi) = 0,964$$

$$n = 6 \Rightarrow f(1,3 + 2\pi \cdot 6) = \sin(1,3 + 12 \cdot \pi) = 0,964$$

Derfor vi altid bare fokusere på intervallet $[0, 2\pi]$

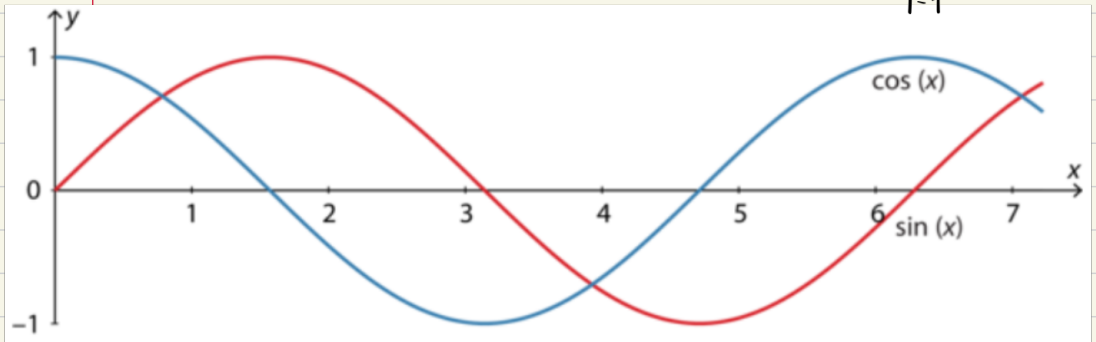
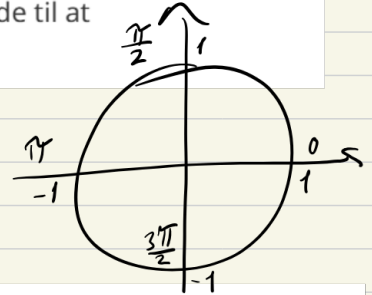
Cosinus

På figur 7.14.2.1 ses det grafiske billede af funktionen:

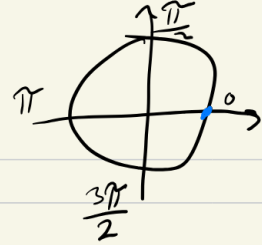
$$f(x) = \cos(x)$$

Grafen kaldes også her en sinuskurve. Den eneste forskel er, at kurven for cosinus er forskudt ($\frac{\pi}{2}$) svarende til 90° i forhold til grafen for sinus. Vi husker fra den retvinklede trekant, at $\cos(x) = \sin(90^\circ - x)$ svarende til at $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Hvad betyder dette?

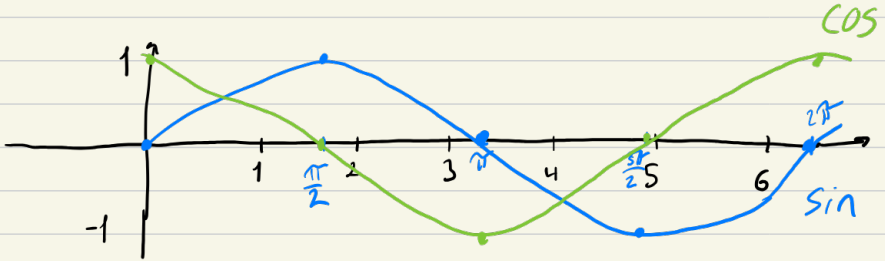


Husk Værdimængden (Vm) igen her er $[-1, 1]$



Skitsering

Ide: indtegn kendte punkter, og tegn mellem dem



Indtegn $\sin(x)$

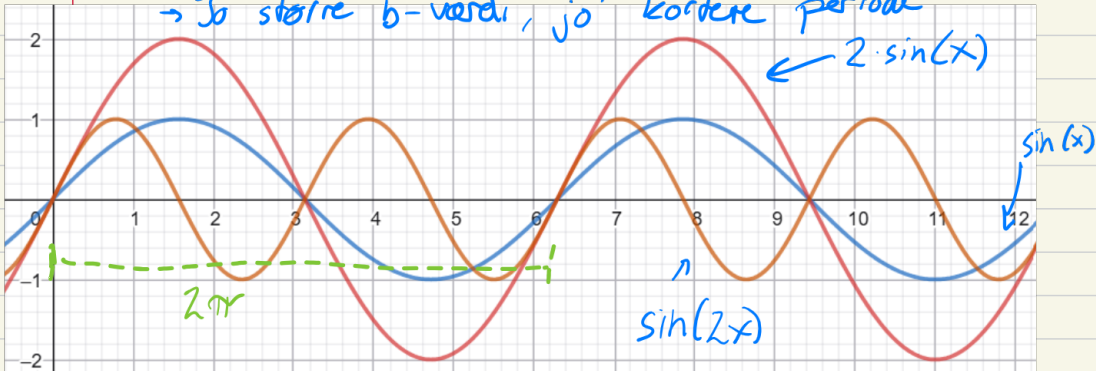
hvilke punkter kender vi?

Gå ind i geogebra og skriv: $a \cdot \sin(b \cdot x)$ og se om i kan forstå hvad a og b har af betydning

a 's betydning: Toppunkterne (Amplituden)

b ---: distance af perioden

→ Jo større b -værdi, jo kortere periode



Her har vi: $\sin(x)$, $\sin(2x)$ og $2 \cdot \sin(x)$, men hvilken graf er til hvilken funktion

Hvis vi har:

→ $n \cdot \sin(x)$, så er vores maximale værdier (1) blevet større

→ $\sin(2x)$, så er vores periode blevet kortere fordi vi har 2-gange vores x -værdi, så den bliver hurtigere gennem perioderne

Løsning af trigonometriske grundligninger

Vi vil se, hvordan man kan løse en trigonometrisk grundligning af typen:

$$\sin(x) = k \text{ hvor } -1 \leq k \leq 1 \text{ i intervallet } 0 \leq x \leq 2\pi$$

Hvorfor

↳ da $\sin(x)$ max kan give 1 og min -1

↳ hvorfor grundet vores perioder

Eksempel 7.14.5.1

Vi kigger på ligningen

$$\sin(x) = 0,7 \quad x \in [0; 2\pi] = 0 \leq x \leq 2\pi$$

Vi skal finde de vinkler, der har sinusværdien 0,7. Når vi bruger CAS-værktøjet, får vi:

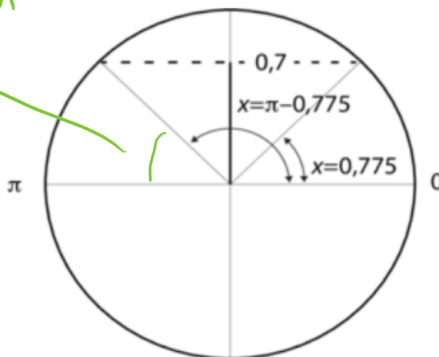
$$x = \sin^{-1}(0,7) = 0,775$$

↑ skal være i intervallet 0 til 2π

↗ modsat funktion

Ved at kigge på enhedscirklen kan vi se, at der er to vinkler med sinusværdien 0,7. Se figur 7.14.5.1.

magen til den anden ←



Figur 7.14.5.1 Sinusværdien 0,7
afbildet i en enhedscirkel

Den anden vinkel finder vi ved at trække den første vinkel fra π . Ligningens løsning bliver derfor:

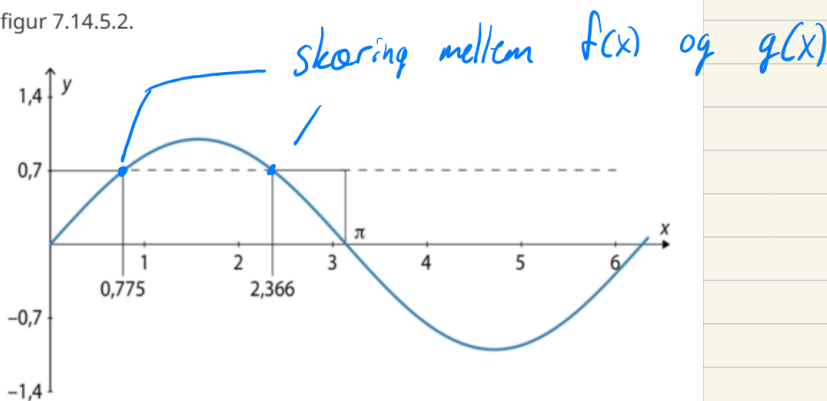
$$x = 0,775 \vee x = \pi - 0,775 = 2,366$$

kan også løses på følgende måde:

Vi kan også danne et indtryk af løsningen ved at kigge på graferne for:

$$f(x) = \sin(x) \text{ hvor } x \in [0; 2\pi] \text{ og } g(x) = 0,7$$

Se figur 7.14.5.2.



Figur 7.14.5.2 Graferne for $f(x) = \sin(x)$ $x \in [0; 2\pi]$ og $g(x) = 0,7$

Af figuren fremgår, at løsningerne er givet som:

$$x = 0,775 \vee x = \pi - 0,775 = 2,366$$

Sætning 7.14.5.1

Den trigonometriske grundligning:

$$\sin(x) = k \text{ i intervallet } 0 \leq x \leq 2\pi$$

har løsningen

$$x = \sin^{-1} k \vee x = \pi - \sin^{-1} k, \text{ hvor } 0 \leq k \leq 1$$

$$x = \pi - \sin^{-1} k \vee x = \sin^{-1} k + 2\pi, \text{ hvor } -1 \leq k \leq 0$$

for *cosinus*:

Vi vil se, hvordan man kan løse en trigonometrisk grundligning af typen:

$$\cos(x) = k \text{ hvor } -1 \leq k \leq 1 \text{ i intervallet } 0 \leq x \leq 2\pi$$

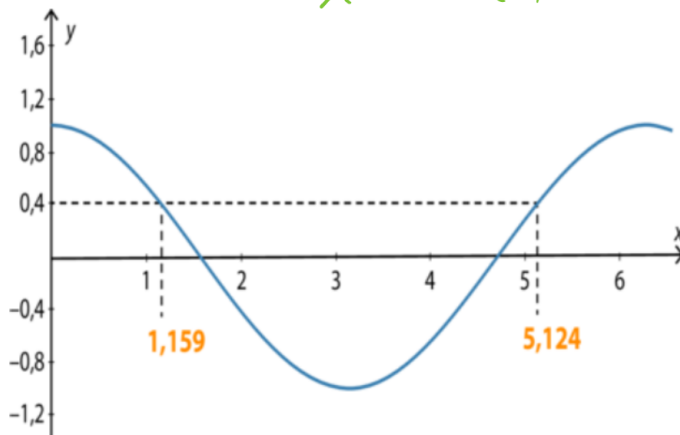
Eksempel 7.14.6.1

Vi løser ligningen:

$$\cos(x) = 0,4$$

Her ses den grafiske løsning:

$$x = \cos^{-1}(0,4)$$



Figur 7.14.6.1 Grafisk løsning af ligningen $\cos(x) = 0,4$

Med CAS-værktøjet får vi den ene vinkel:

$$x = \cos^{-1}(0,4) = 1,159$$

Da grafen er symmetrisk, ses det, at den anden løsning bliver:

$$x = 2\pi - 1,159 = 5,124$$

Løsningen til den trigonometriske grundligning $\cos(x) = 0,4$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ er:

$$x = 1,159 \quad \vee \quad x = 5,124$$

Sætning 7.14.6.1

Den trigonometriske grundligning

$$\cos(x) = k \text{ i intervallet } 0 \leq x \leq 2\pi$$

har løsningen

$$x = \cos^{-1}(k) \vee x = 2\pi - \cos^{-1}(k), \text{ hvor } -1 \leq k \leq 1$$

Øvelser



Opgave 7.14.1

Omregn følgende gradmål til radianer:

1. 23°
2. 45°
3. 170°
4. 210°
5. 293°



Opgave 7.14.2

Omregn følgende radiantal til grader:

1. 5,8
2. 0,65
3. 4,3



Opgave 7.14.3

Løs følgende trigonometriske grundligninger:

1. $\sin(x) = 0,8$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$

2. $\sin(x) = -0,2$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$

3. $\cos(x) = 0,37$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$

4. $\cos(x) = -0,77$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$

~~5. $\tan(x) = 2,8$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$~~

~~6. $\tan(x) = -1,9$, hvor $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$~~



Opgave 7.14.4

Find den fuldstændige løsning til følgende ligninger:

1. $\cos(x) = 0,54$

2. $2 \cdot \sin(x) = 1,64$

Skitses følgende i hånden og tjekket efter i GeoGebra.

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \cos(x)$$

$$h(x) = 3 \cdot \sin(x)$$

$$q(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$$

$$p(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$k(x) = \cos(2x)$$