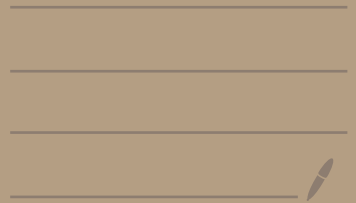
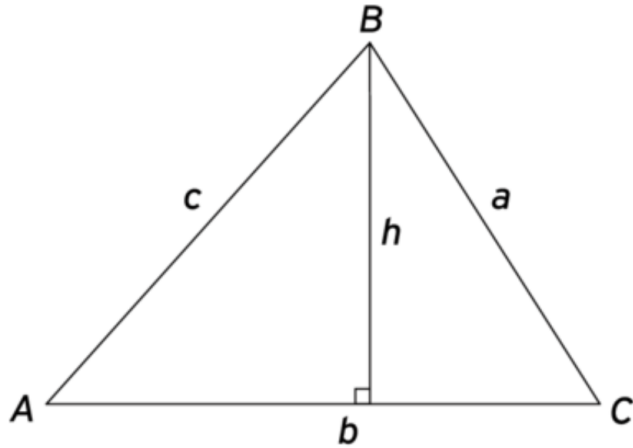


Sinus relation

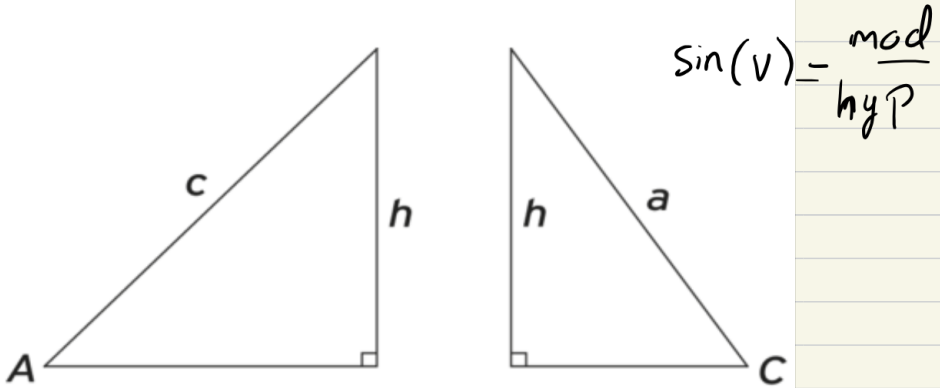


Vi arbejder med vilkårlige trekanter:
 - hvor vi laver 2 retvinklede trekanter



Figur 3.4.2.1 Vilkaarlig trekant

figur 3.4.2.2.



$$\sin(\nu) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}}$$

Figur 3.4.2.2 Vilkaarlig trekant delt op i to retvinklede trekanter

Vi kender sinus for retvinklede trekanter

$$\sin(A) = \frac{h}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(A) \cdot c = h$$

$$\sin(C) = \frac{h}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(C) \cdot a = h$$

Da begge udtrykke er lig h , sættes de lig hinanden

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

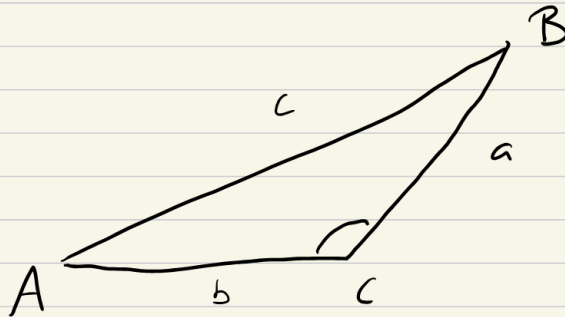
Ved at nedfælde højden h på en af de andre sider vil siden b og vinkel B indgå. Vi kan derfor opstille følgende sammenhæng som kaldes sinusrelationerne:

Sætning 3.4.2.1

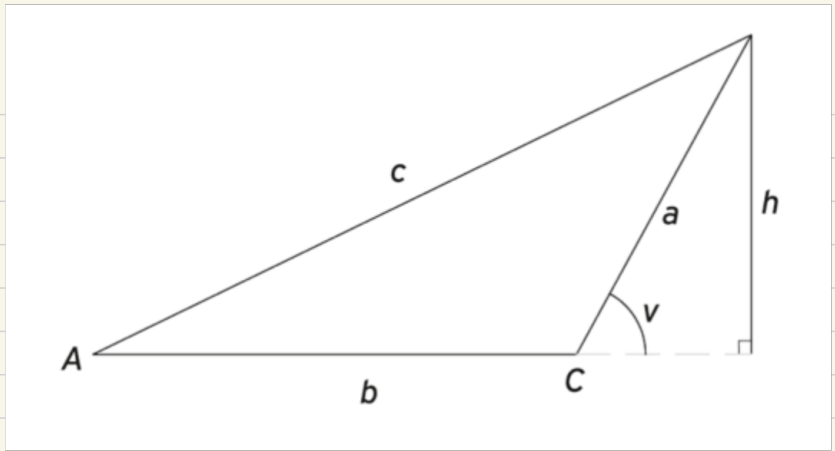
Sinusrelationerne for den vilkårlige trekant

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Dette er gjort for spidse vinkler, men gælder den også for stumpe vinkler ???



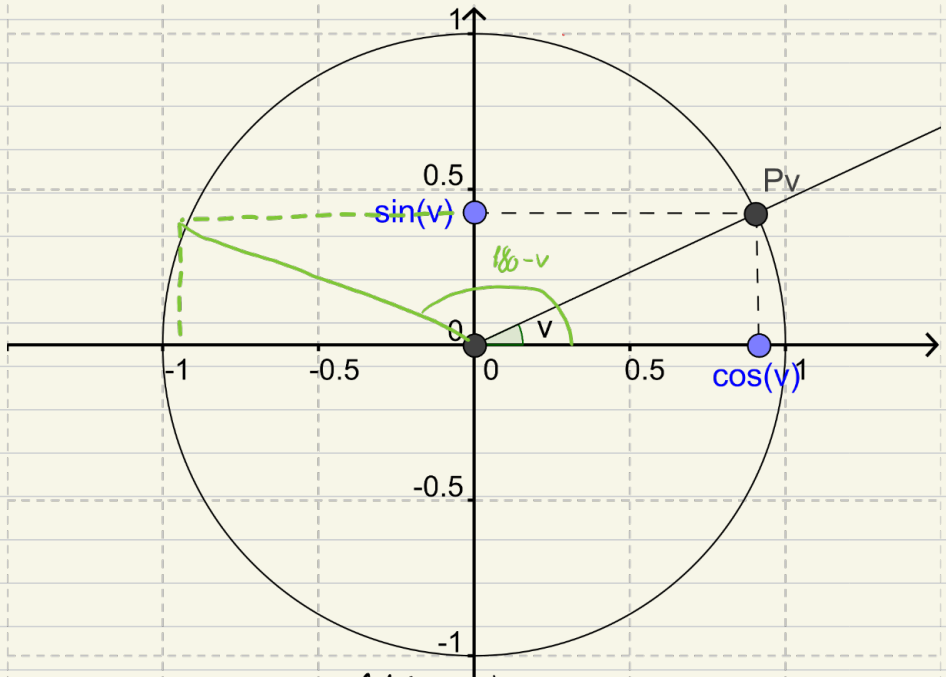
Howdan indtegnes højden her?



her kan vi se at der gælder

$$v = 180 - C$$

Nu skal vi se på enhedscirklen igen



$$\sin(v) = \sin(180 - v)$$

↳ samme værdi \Downarrow

Så på baggrund af enhedscirklen og:

$$\sin(C) = \sin(180 - C)$$

Dermed har vi:

$$\sin(C) = \sin(V)$$

for de vinklerne så gælder der det samme som før:

$$\sin(A) = \frac{h}{c} \quad \Leftrightarrow \quad h = \sin(A) \cdot c$$

$$\sin(C) = \frac{h}{a} \quad \Leftrightarrow \quad h = \sin(C) \cdot a$$

Sætning 3.4.2.1

Sinusrelationerne for den vilkårlige trekant

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

konstruer en trekant

Eksempel 3.4.2.1

Om $\triangle ABC$ gælder at $A = 35^\circ$, $a = 9$, $B = 87^\circ$.

Vi vil finde siderne b og c samt C .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B$$

Vi indsætter tallene:

$$b = \frac{9}{\sin 35^\circ} \cdot \sin 87^\circ = 15,7$$

C findes ved hjælp af vinkelsummen i en trekant:

$$C = 180^\circ - A - B = 58^\circ$$

Siden c beregnes af sinusrelationen:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{9}{\sin 35^\circ} \cdot \sin 58^\circ = 13,3$$

Sinusfælden

Vi kan faktisk lave 2 trekanter

Regel 3.4.2.1

I en trekant er oplyst en spids vinkel og længden af en af de hosliggende sider samt længden af vinklens modstående side.

Der er to løsningsmuligheder hvis:

- Den modstående side er kortere end den hosliggende side, men længere end højden på den ikke oplyste hosliggende side.

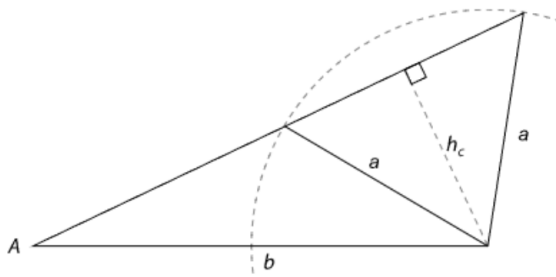
Eksempel 3.4.2.3

På figur 3.4.2.4 er

- A den spidse vinkel
- b er en hosliggende side
- a er vinkel A 's modstående side.

Det fremgår desuden, at $a > h_c$, hvor h_c er højden på den ikke oplyste hosliggende side c , og hvor:

$$h_c = b \cdot \sin(A)$$



Figur 3.4.2.4

Det fremgår af figuren, at der kan konstrueres to trekanter.

Eksempel 3.4.2.4

Om trekant ABC oplyses at:

- $a = 5$
- $b = 10$
- $A = 25^\circ$

Det ses, at den modstående til A er kortere end den hosliggende:

$$a < b$$

Desuden er

$$h_c = b \cdot \sin(A) = 10 \cdot \sin(25^\circ) \approx 4,22618262$$

Der er derfor to mulige løsninger, som findes med sinusrelationerne:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin B = b \cdot \frac{\sin(A)}{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$B = \left(b \cdot \frac{\sin(A)}{a} \right)$$

Nu husker vi at $\sin(v) = \sin(180 - v)$

Værdierne indsættes. Bemærk at der beregnes to forskellige værdier for B .

$$B = \left(10 \cdot \frac{\sin(25^\circ)}{5} \right) \vee B = 180^\circ - \left(10 \cdot \frac{\sin(25^\circ)}{5} \right) \Leftrightarrow$$

$$B = 57,7^\circ \vee B = 122,3^\circ$$

Den sidste vinkel findes nu:

Nu er:

$$C = 180^\circ - A - B \quad \Leftrightarrow$$

$$C = 180^\circ - 25^\circ - 57,7^\circ \vee C = 180^\circ - 25^\circ - 122,3^\circ \quad \Leftrightarrow$$

$$C = 97,3^\circ \vee C = 32,7^\circ$$

Den sidste side findes nu her:

Siden c beregnes:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \Leftrightarrow$$

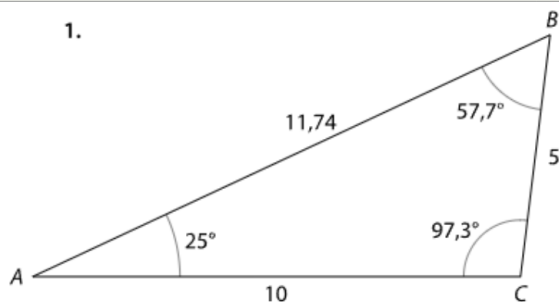
$$c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C \quad \Rightarrow$$

$$c = \frac{5}{\sin(97,3^\circ)} = 11,74 \vee c = \frac{5}{\sin(32,7^\circ)} = 6,39$$

Trekant 1:

- $B = 57,7^\circ$
- $C = 97,3^\circ$
- $c = 11,74$

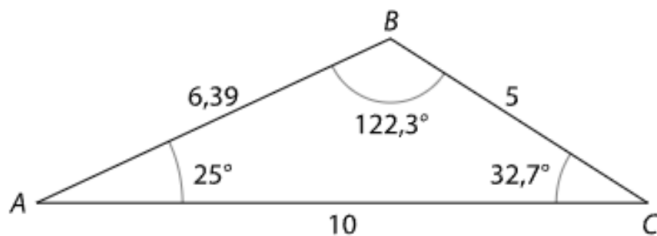
1.



Trekant 2:

- $B = 122,3^\circ$
- $C = 32,7^\circ$
- $c = 6,39$

2.



Figur 3.4.2.5

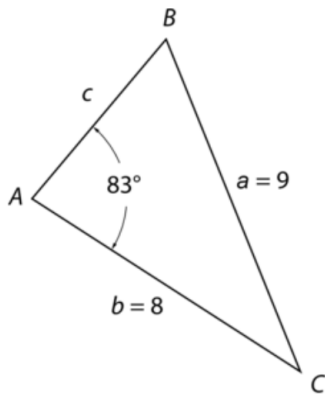
Øvelse



Opgave 3.4.3

I den vilkårlige trekant ABC er

- $\angle A = 83^\circ$
- $a = 9$
- $b = 8$.



1. Beregn trekantens øvrige stykker.



Opgave 3.4.4

I den vilkårlige trekant ABC er $a = 7,5$ cm, $b = 9,6$ cm og $A = 50^\circ$.

1. Vis, at der findes to trekanter med de givne størrelser.
2. Hvor lang skal siden b være, for at der netop ikke er to trekanter?



Opgave 3.4.6

I $\triangle DEF$ er $\angle F = 111^\circ$, $d = 10,6$ og $f = 16,7$.

1. Beregn trekantens øvrige stykker.



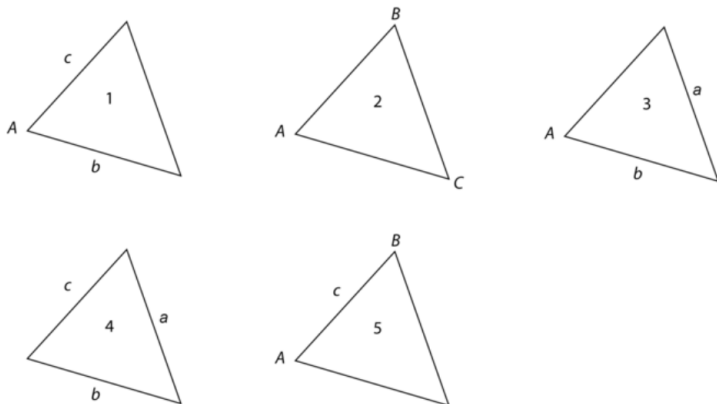
Opgave 3.4.7

I $\triangle ABC$ er $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 54^\circ$, $c = 6$.

1. Beregn $\angle C$.
2. Beregn siderne a og b .



Opgave 3.4.19



På tegningen herover ses fem trekanter mærket 1 til 5.

Kendte sider og vinkler er betegnet med bogstaver.

1. Beskriv, for hver af de fem trekanter, hvilke muligheder der er, for at beregne den første ukendte side eller vinkel.