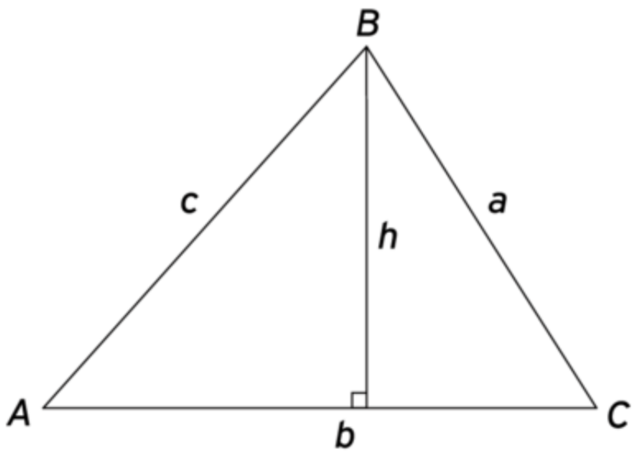
Sinus relation

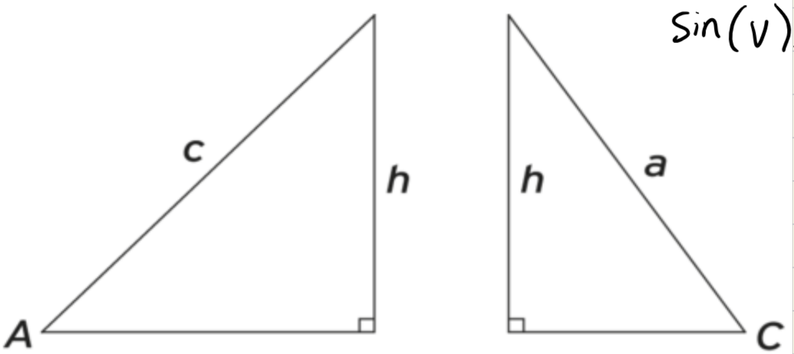
Vi arbejder med vilkårlige trekanter:
- hvor vi laver 2 retvinklet trekanter



Figur 3.4.2.1 Vilkårlig trekant

igur 3.4.2.2.

$$\sin(v) = \frac{mod}{hyp}$$



Figur 3.4.2.2 Vilkårlig trekant delt op i to retvinklede trekanter

Vi kender sinus for retvinklet trekanter

$$\sin(A) = \frac{h}{c} \overset{\cdot c}{\iff} \sin(A) \cdot c = h$$

$$\sin(C) = \frac{h}{a} \overset{\cdot a}{\iff} \sin(C) \cdot a = h$$

Da begge udtryk er lig h, sættes de lig hinanden

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

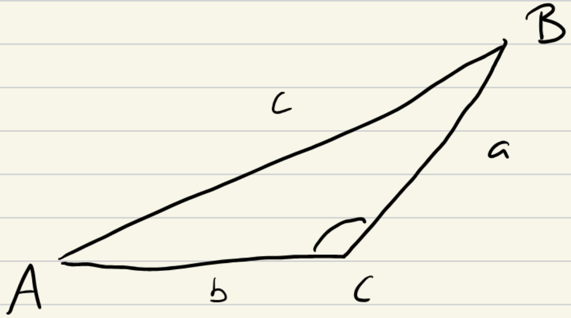
Ved at nedfælde højden h på en af de andre sider vil siden b og vinkel B indgå. Vi kan derfor opstille følgende sammenhæng som kaldes sinusrelationerne:

Sætning 3.4.2.1

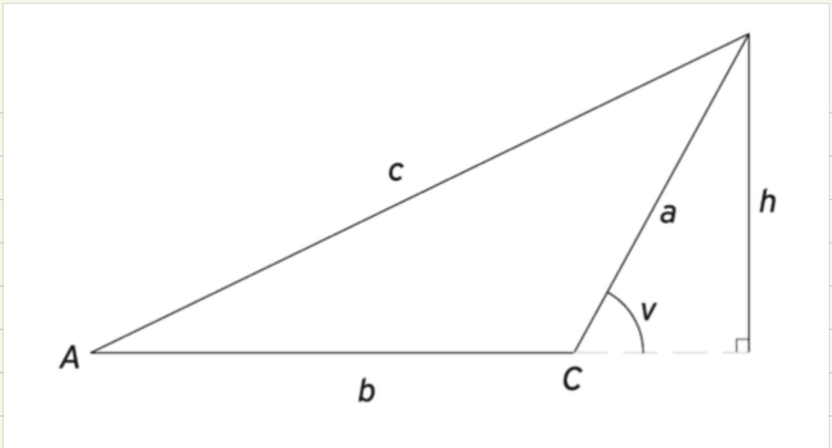
Sinusrelationerne for den vilkårlige trekant

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Dette er gjort for spidse vinkler, men gælder den også for stumpe vinkler ???



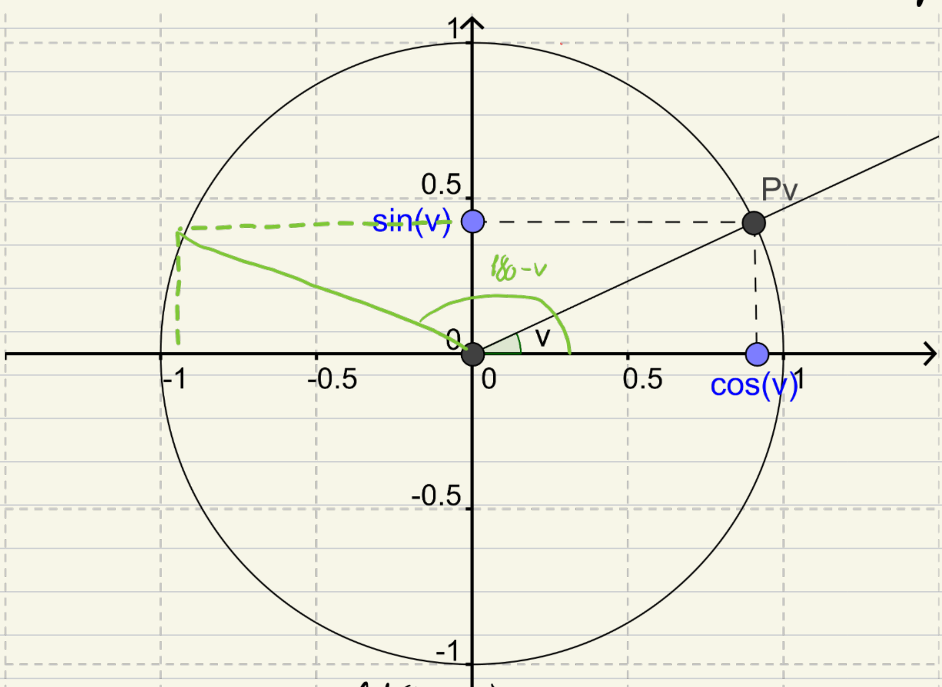
Hvordan indtegnes højden her ?



her kan vi se at der gælder

$$v = 180 - C$$

Nu skal vi se på enhedscirklen igen



$$\sin(v) = \sin(180 - v)$$

↳ samme værdi :)

Så på baggrund af enhedscirklen og:

$$\sin(C) = \sin(\underbrace{180 - C}_{\to V})$$

Dermed har vi:

$$\sin(C) = \sin(V)$$

fordi vinklerne så gælder der det samme som ~~før~~ for:

$$\sin(A) = \frac{h}{c} \overset{\cdot c}{\Longleftrightarrow} h = \sin(A) \cdot c$$

$$\sin(C) = \frac{h}{a} \overset{\cdot a}{\Longleftrightarrow} h = \sin(C) \cdot a$$

Sætning 3.4.2.1

Sinusrelationerne for den vilkårlige trekant

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

konstruer en trekant

Eksempel 3.4.2.1

Om $\triangle ABC$ gælder at $A = 35°$, $a = 9$, $B = 87°$.

Vi vil finde siderne b og c samt C.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B$$

Vi indsætter tallene:

$$b = \frac{9}{\sin 35°} \cdot \sin 87° = 15{,}7$$

C findes ved hjælp af vinkelsummen i en trekant:

$$C = 180° - A - B = 58°$$

Siden c beregnes af sinusrelationen:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \qquad \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C \qquad \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{9}{\sin 35°} \cdot \sin 58° = 13{,}3$$

Sinusfælden

Vi kan faktisk lave 2 trekanter

mod

kender

hos

Regel 3.4.2.1

I en trekant er oplyst en spids vinkel og længden af en af de hosliggende sider samt længden af vinklens modstående side.

Der er to løsningsmuligheder hvis: mod<hos mod > h

- Den modstående side er kortere end den hosliggende side, men længere end højden på den ikke oplyste hosliggende side.

Eksempel 3.4.2.3

På figur 3.4.2.4 er

- A den spidse vinkel
- b er en hosliggende side
- a er vinkel A's modstående side.

$\sin(v) = \frac{mod}{hyp}$

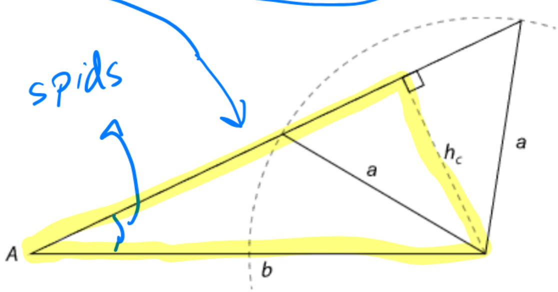
Det fremgår desuden, at $a > h_c$, hvor h_c er højden på den ikke oplyste hosliggende side c, og hvor:

$$h_c = b \cdot \sin(A)$$

mod<hos
a < b

ikke kendte hosliggende

spids



Figur 3.4.2.4

Det fremgår af figuren, at der kan konstrueres to trekanter.

Eksempel 3.4.2.4

Om trekant ABC oplyses at:

- $a = 5$ mod
- $b = 10$ hos
- $A = 25°$

spids vinkel: ✓

Det ses, at den modstående til A er kortere end den hosliggende:

$$a < b$$ ✓

Desuden er

$h_c <$ mod ✓

altid denne for højden

$$h_c = b \cdot sin(A) = 10 \cdot sin(25°) \approx 4{,}22618262$$

Der er derfor to mulige løsninger, som findes med sinusrelationerne:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin B = b \cdot \frac{\sin(A)}{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$B = \cancel{\left(b \cdot \frac{\sin(A)}{a}\right)} = \sin^{-1}\left(b \cdot \frac{\sin(A)}{a}\right)$$

Nu husker vi at $\sin(v) = \sin(180 - v)$

Værdierne indsættes. Bemærk at der beregnes to forskellige værdier for B.

$$B = \sin^{-1}\left(10 \cdot \frac{\sin(25°)}{5}\right) \vee B = 180° - \sin^{-1}\left(\left(10 \cdot \frac{\sin(25°)}{5}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$B = 57{,}7° \vee B = 122{,}3°$$

Den sidste vinkel findes nu:

Nu er:

$$C = 180° - A - B \quad \Leftrightarrow$$

$$C = 180° - 25° - 57{,}7° \vee C = 180° - 25° - 122{,}3° \quad \Leftrightarrow$$

$$C = 97{,}3° \vee C = 32{,}7°$$

Den sidste side findes nu her:

Siden c beregnes:

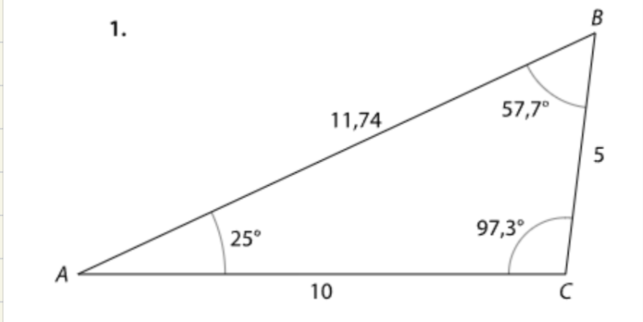
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C \quad \Rightarrow$$

$$c = \frac{5}{\sin(97{,}3^\circ)} = 11{,}74 \vee c = \frac{5}{\sin(32{,}7^\circ)} = 6{,}39$$

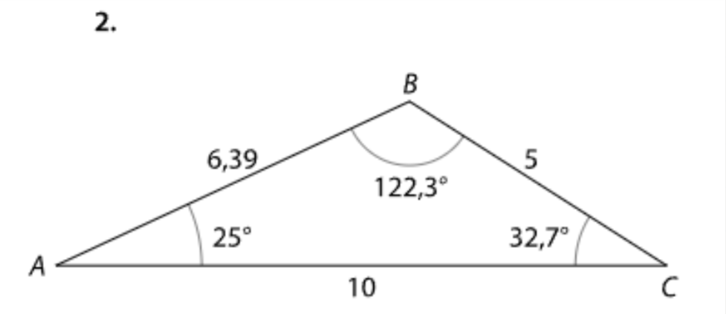
Trekant 1:

- $B = 57{,}7^\circ$
- $C = 97{,}3^\circ$
- $c = 11{,}74$



Trekant 2:

- $B = 122{,}3^\circ$
- $C = 32{,}7^\circ$
- $c = 6{,}39$



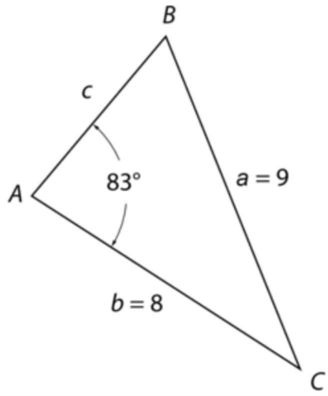
Figur 3.4.2.5

Øvelser

Opgave 3.4.3

I den vilkårlige trekant ABC er

- $\angle A = 83°$
- $a = 9$
- $b = 8$.



1. Beregn trekantens øvrige stykker.

Opgave 3.4.4

I den vilkårlige trekant ABC er a = 7,5 cm, b = 9,6 cm og $A = 50°$.

1. Vis, at der findes to trekanter med de givne størrelser.
2. Hvor lang skal siden b være, for at der netop ikke er to trekanter?

Opgave 3.4.6

I $\triangle DEF$ er $\angle F = 111°$, $d = 10{,}6$ og $f = 16{,}7$.

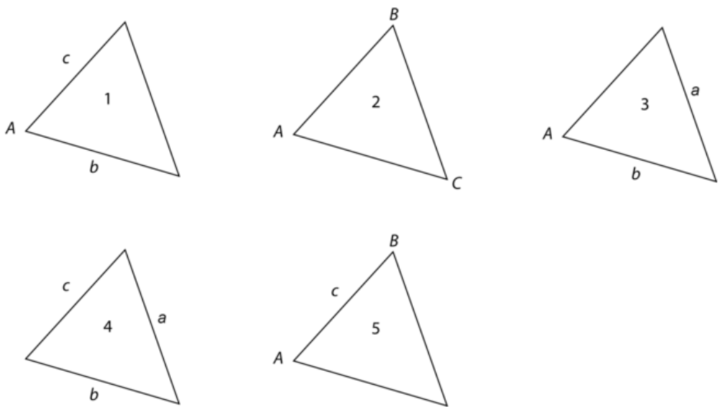
1. Beregn trekantens øvrige stykker.

Opgave 3.4.7

I $\triangle ABC$ er $\angle A = 80°$, $\angle B = 54°$, $c = 6$.

1. Beregn $\angle C$.
2. Beregn siderne a og b.

Opgave 3.4.19



På tegningen herover ses fem trekanter mærket 1 til 5.

Kendte sider og vinkler er betegnet med bogstaver.

1. Beskriv, for hver af de fem trekanter, hvilke muligheder der er, for at beregne den første ukendte side eller vinkel.