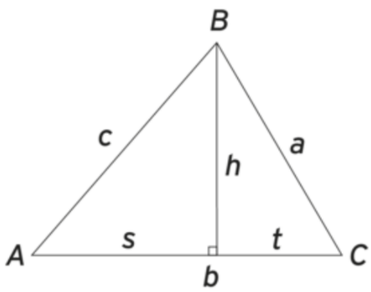
Cosinus relation

Der er tilfælde hvor sinus relationen ikke virker/kan anvendes
→ hvis vi kender alle 3 sider

Derfor vi bruger cosinus relationen:



Figur 3.4.3.1 Vilkårlig $\triangle ABC$

Højden h deler siden b i to stykker s og t.

Pythagoras

Sammenhængen mellem a, h og t er:

$$h^2 + t^2 = a^2 \qquad (1)$$

Vi ser endvidere at:

$$\cos A = \frac{s}{c} \Leftrightarrow$$

$$s = c\cos A$$

og:

$$\sin A = \frac{h}{c} \Leftrightarrow$$

$$h = c\sin A \qquad (2)$$

Endelig er:

$$t = b - s \Leftrightarrow$$

$$t = b - c\cos A \qquad (3)$$

Vi kombinerer nu formlerne (1) (2) og (3):

$$\underbrace{(c\sin A)^2}_{h} + \underbrace{(b - c\cos A)^2}_{t} = a^2 \quad \Leftrightarrow$$

ligning 1

udregning

$$c^2 \cdot \sin^2 A + b^2 + c^2 \cdot \cos^2 A - 2bc \cdot \cos A = a^2 \quad \Leftrightarrow$$

hvad er ens i led?

$$c^2 \cdot \left(\sin^2 A + \cos^2 A\right) + b^2 - 2bc \cdot \cos A = a^2 \quad \Leftrightarrow$$

Vi husker at:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

enhedscirklen

Vi har nu:

$$c^2 + b^2 - 2bc\cos A = a^2$$

Vi kan isolere $\cos A$:

$$c^2 + b^2 - 2bc\cos A = a^2 \Leftrightarrow$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{4}$$

Vi kan også vælge at isolere a:

$$c^2 + b^2 - 2bc\cos A = a^2 \Leftrightarrow$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

Ligeledes kan det gøres for andre sider og vinkler

Sætning 3.4.3.1

Cosinusrelationerne for den vilkårlige trekant

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{eller } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{eller } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{eller } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Eksempel 3.4.3.1

I $\triangle ABC$ er sidelængderne: $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$. Vi vil beregne vinkel A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9}\right) = 48{,}2^\circ$$

På samme måde kan vinkel B og C bestemmes.

Så hvordan regner vi B og C ?

Øvelse

Opgave 3.4.11

I $\triangle ABC$ er $\angle A = 32°$, $b = 10$ og $c = 8$.

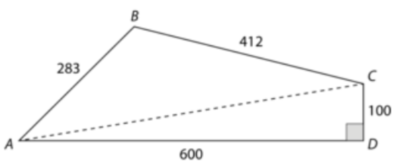
1. Beregn a, $\angle B$ og $\angle C$.
2. Beregn trekantens areal.

Opgave 3.4.13

I $\triangle ABC$ er $\angle C = 52°$, $c = 14$ og $a = 17$. Normalt vil man løse denne opgave med *sinusrelationen* og få to løsninger.

1. Brug et CAS-værktøj og beregn længden af siden b ved hjælp af *cosinusrelationen*. Vis, at der er to løsningsmuligheder.
2. Beregn de resterende stykker i begge løsningstrekanter.

Opgave 3.4.16



På billedet herover ses facaden på et moderne højhus. På tegning ses målene på et af vinduerne.

Alle mål er i cm.

1. Beregn længden af diagonalen AC
2. Beregn vinklerne i trekant ACD
3. Beregn vinklerne i trekant ABC.

Øvelse 4:
vi kender $a = 7$, $b = 5$ og $C = 60°$

Beregn de resterende mål og tegn den

Øvelse 5:

En tømrer skal bygge en skrå støttebjælke mellem to vægge i et værksted.

- Afstanden langs gulvet mellem væggene er 4,5 m
- Den ene væg er 3,0 m høj
- Den anden væg er 2,5 m høj

Bjælken skal gå **direkte fra toppen af den ene væg til toppen af den anden.**

Opgave:

1. Beregn længden af bjælken
2. Beregn vinklen, som bjælken danner med gulvet ved den højeste væg

👉 Hint: Tegn en trekant. Forskellen i højder bliver den ene side, og afstanden på gulvet er en anden side → brug cosinusrelationen.