

# Cosinus relation


---

---

---

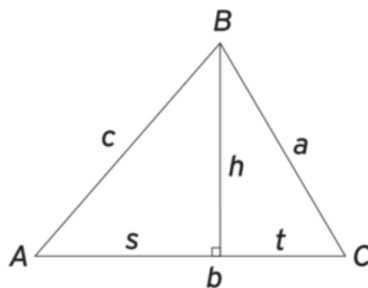
---

---



Der er tilfælde hvor sinus relationen ikke virker / kan anvendes  
 → hvis vi kender alle 3 sider

Derfor vi bruger cosinus relationer:



Figur 3.4.3.1 Vilkårlig  $\triangle ABC$

Højden  $h$  deler siden  $b$  i to stykker  $s$  og  $t$ .

Sammenhængen mellem  $a$ ,  $h$  og  $t$  er:

*Pythagoras*

	$h^2 + t^2 = a^2$	(1)
--	-------------------	-----

Vi ser endvidere at:

$$\cos A = \frac{s}{c} \Leftrightarrow$$

$$s = c \cos A$$

og:

$$\sin A = \frac{h}{c} \Leftrightarrow$$

	$h = c \sin A$	(2)
--	----------------	-----

Endelig er:

$$t = b - s \Leftrightarrow$$

	$t = b - c \cos A$	(3)
--	--------------------	-----

Vi kombinerer nu formlerne (1) (2) og (3):

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$2 \text{ kvadrat Sætning: } (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

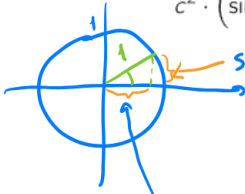
$$(c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2 = a^2 \Leftrightarrow \text{udregning}$$

$$c^2 \cdot \sin^2 A + b^2 + c^2 \cdot \cos^2 A - 2bc \cdot \cos A = a^2 \Leftrightarrow$$

hvad er ens i led?

$$c^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc \cdot \cos A = a^2 \Leftrightarrow$$

Vi husker at:



Pythagoras

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

enhedscirklen  
idiotformlen

↙ så vi kan faktorisere / sætte udenfor ( )

Vi har nu:

$$c^2 + b^2 - 2bc \cos A = a^2 \rightarrow \text{færdig formel}$$

Vi kan isolere cos A:

før at finde vinkel

$$c^2 + b^2 - 2bc \cos A = a^2 \Leftrightarrow c^2 + b^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos A \Leftrightarrow c^2 + b^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (4)$$

Vi kan også vælge at isolere a:

$$c^2 + b^2 - 2bc \cos A = a^2 \Leftrightarrow$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

Ligeledes kan det gøres for andre sider og vinkler

Sætning 3.4.3.1

Cosinusrelationerne for den vilkårlige trekant

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{eller } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\text{eller } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{eller } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Krav: kender alle sider →

Husk:  $\cos^{-1}$

Husk:  $\sqrt{\quad}$

kend de 2 andre sider og modstående vinkel til siden ELLER

Vinkel og dens 2 påliggende sider

### Eksempel 3.4.3.1

I  $\triangle ABC$  er sidelængderne:  $a = 7$ ,  $b = 8$ ,  $c = 9$ . Vi vil beregne vinkel  $A$ :

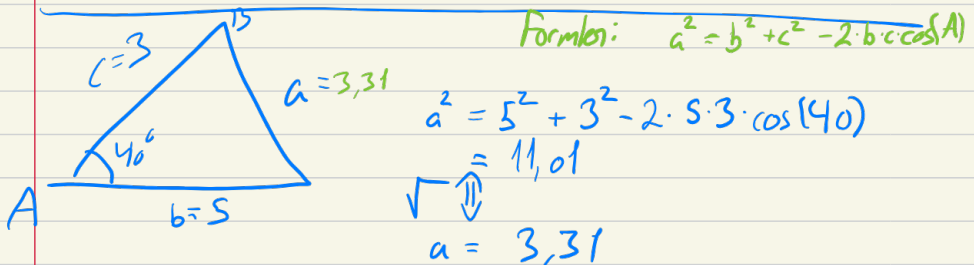
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \cos^{-1} \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \cos^{-1} \left( \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} \right) = 48,2^\circ$$

På samme måde kan vinkel  $B$  og  $C$  bestemmes.

Så hvordan regner vi  $B$  og  $C$ ?



vinkel  $A$  og dens 2  
hosliggende sider

## Øvelser



### Opgave 3.4.11

I  $\triangle ABC$  er  $\angle A = 32^\circ$ ,  $b = 10$  og  $c = 8$ .

1. Beregn  $a$ ,  $\angle B$  og  $\angle C$ .

2. Beregn trekantens areal.

vent



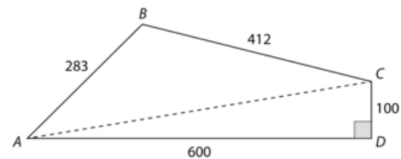
### Opgave 3.4.13

I  $\triangle ABC$  er  $\angle C = 52^\circ$ ,  $c = 14$  og  $a = 17$ . Normalt vil man løse denne opgave med *sinusrelationen* og få to løsninger.

1. Brug et CAS-værktøj og beregn længden af siden  $b$  ved hjælp af *cosinusrelationen*. ~~Vis, at der er to løsninger.~~
2. Beregn de resterende stykker ~~af den anden løsning.~~



### Opgave 3.4.16



På billedet herover ses facaden på et moderne højhus. På tegning ses målene på et af vinduerne.

Alle mål er i cm.

1. Beregn længden af diagonalen  $AC$
2. Beregn vinklerne i trekant  $ACD$
3. Beregn vinklerne i trekant  $ABC$ .

### Øvelse 4:

vi kender  $a = 7$ ,  $b = 5$  og  $C = 60^\circ$

Beregn de resterende mål og tegn den

### Øvelse 5:

En tømrer skal bygge en skrå støttebjælke mellem to vægge i et værksted.

- Afstanden langs gulvet mellem væggene er 4,5 m
- Den ene væg er 3,0 m høj
- Den anden væg er 2,5 m høj

Bjælken skal gå direkte fra toppen af den ene væg til toppen af den anden.

Opgave:

1. Beregn længden af bjælken
2. Beregn vinklen, som bjælken danner med gulvet ved den højeste væg

👉 Hint: Tegn en trekant. Forskellen i højder bliver den ene side, og afstanden på gulvet er en anden side → brug cosinusrelationen.