Cirklen og alt info

kommer vi til

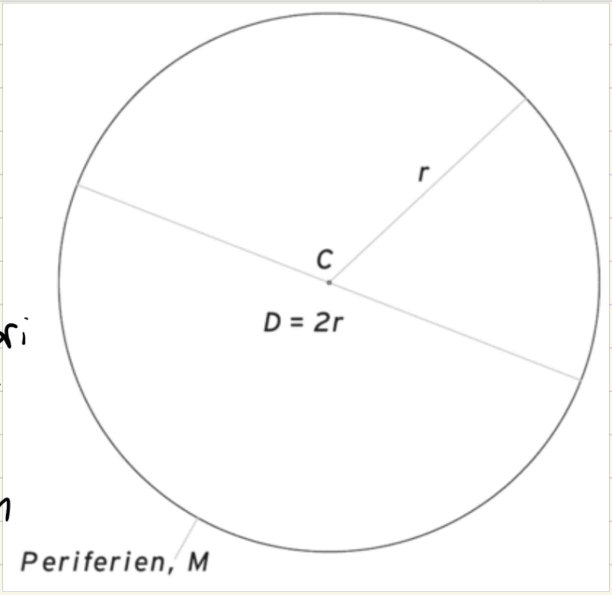
Cirkler og cirkelbuen møder vi i mange konstruktioner og i andre tekniske sammenhæng

→ Et rør har en cirkulær endeflade
→ Emballage kan være cirkler
→ Hjul
→ har i nogle eksempler fra jeres felt.

Vi repetere kort nogle begreber som vi skal bruge.
→ En cirkel defineres som en punktmængde M, der ligger i samme afstand r, fra et punkt C
↳ centrum

- M er cirklens periferi
- r er radius
- C er centrum

→ D er diameter som forbinder 2 punkter på cirklens periferi og går gennem C



→ Sammenhæng mellem r og D:

$$D = 2r$$

Cirklens omkreds og areal

Forestil jer et hjul på 1 meter i diameter og den triller én gang rundt.

Hjulet har dermed tilbagelagt π meter $\rightarrow 3{,}14\,m$

$\rightarrow$ Er hjulet 2 meter vil distancen være dobbelt

$\rightarrow$ π er altså et forhold imellem cirklens omkreds og dens diameter:

$$\pi = \frac{O}{D} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{omkreds} \\ \rightarrow \text{diameter} \end{matrix}$$

$\Updownarrow \cdot D$

$$O = \pi \cdot D$$

Husk $D = 2r$

$$O = \pi \cdot 2 \cdot r \quad = 2\pi \cdot r$$

Cirklens areal:

$$T = \pi \cdot r^2$$

eller: igen husk $D = 2r \overset{/2}{\Leftrightarrow} r = \frac{D}{2}$

$$T = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

Regneregel: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$= \pi \cdot \frac{D^2}{2^2} \quad = \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

Sætning 3.6.1.1

Omkreds O af en cirkel:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \text{eller} \quad O = \pi \cdot D$$

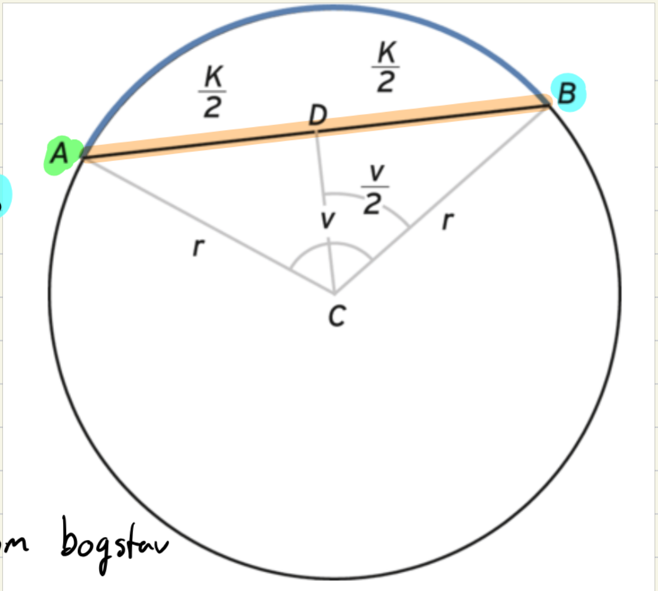
Areal T af en cirkel:

$$T = \pi \cdot r^2 \quad \text{eller} \quad T = \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

bare vælg én formel :)

Korde

→ Det er linjen ret mellem A og B



Figur 3.6.4.1 Korde

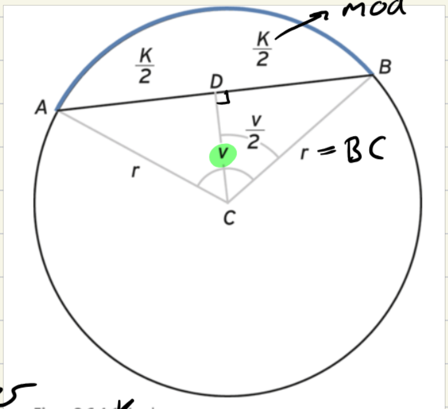
→ En korde er: et linje stykke der forbinder 2 punkter på cirkel periferien

→ bruger K som bogstav

Udledning af korde:

→ korden spænder over en vinkel v

→ laver en højde fra C til D, så vi nu har en retvinklet trekant $\triangle BCD$, hvor vinklen er $\frac{v}{2}$, hyptenusen er fra B til C, som er lig med r, modstående er $\frac{k}{2}$



Figur 3.6.4.1 Korde

$$\sin\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{mod}{hyp}$$

$$\sin\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)}{r} \qquad \Updownarrow \cdot r$$

$$r \cdot \sin\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{k}{2} \qquad \Updownarrow \cdot 2$$

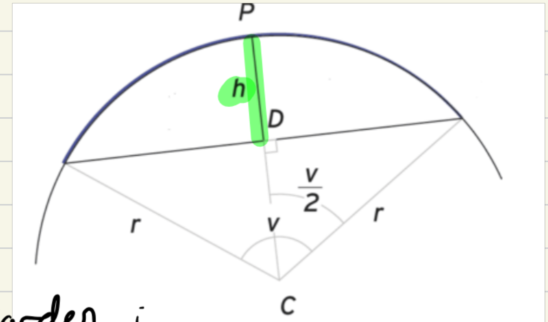
$$k = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{v}{2}\right)$$

Sætning 3.6.4.1

Kordelængden i en cirkel:

$$K = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{v}{2}\right)$$

Pilhøjde



- En pilhøjde h er et linjestykke, der går fra punkt P på cirkelperiferien og som står vinkelret på midten af korden i punkt D

Udledning:

$$r = h + \overbrace{\text{afstand mellem } C \text{ og } D}^{\text{noteres } CD}$$

$$r = h + CD \quad \Big\Updownarrow -CD$$

$$(*) \qquad h = r - CD$$

Vi finder et udtryk for CD

$$\cos(v) = \frac{hos}{hyp} \rightarrow \text{her er } hos = CD \text{ og } hyp = r$$

$$v \rightarrow \frac{v}{2}$$

$$\cos\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{CD}{r} \overset{\cdot r}{\Longleftrightarrow} CD = r \cdot \cos\left(\frac{v}{2}\right)$$

Indsæt i $(*)$

$$h = r - r \cdot \cos\left(\frac{v}{2}\right) = r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$

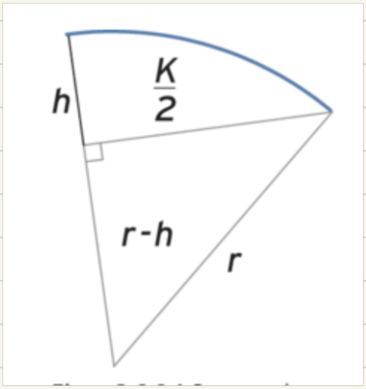
Sætning 3.6.5.1

Pilhøjden i en cirkel:

$$h = r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$

Sammenhæng mellem radius, korde og pilhøjde

Vi anvender pythagoras til at finde sammenhængen



$a^2 + b^2 = c^2$

$r^2 =$

2. kvadrat sætning $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$\Updownarrow -r^2 + 2hr$

Sætning 3.6.6.1

Sammenhængen mellem radius, pilhøjde og korde:

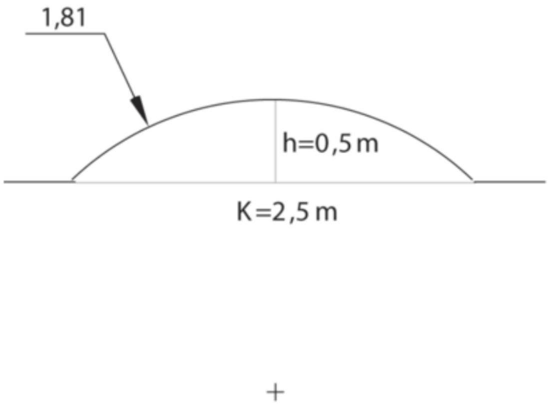
$$r = \frac{h}{2} + \frac{K^2}{8h}$$

Eksempel 3.6.6.1

Ved et delvist nedgravet rør måles en kordelængde $K = 2{,}5\ \mathrm{m}$ og en pilhøjde $h = 0{,}5\ \mathrm{m}$.

Vi vil gerne fastlægge rørets diameter uden først at skulle grave det op.

På figuren er den synlige del at røret målsat i et tegneprogram. Desuden er tegningen forsynet med et kontrolmål svarende til cirklens radius.



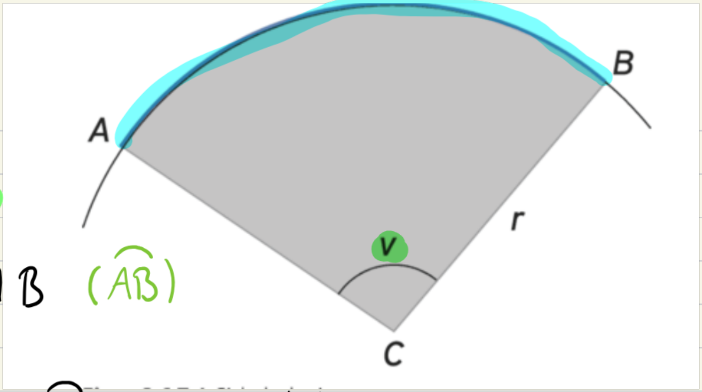
Figur 3.6.6.2 Synlig del af rør målsat i et tegneprogram

Vi udregner:

$$r = \frac{h}{2} + \frac{K^2}{8h}$$

$$= \frac{0{,}5\ \mathrm{m}}{2} + \frac{(2{,}5\ \mathrm{m})^2}{8 \cdot 0{,}5\ \mathrm{m}} = 1{,}81\ \mathrm{m}$$

Så kender vi h (pilhøjden) og K (korden)
kan man udregne r (radius)



Cirkeludsnit

- centervinklen v spænder over buen fra A til B ($\overset{\frown}{AB}$)

- Området, der afgrænses af $\overset{\frown}{AB}$ samt stykkerne AC og BC kaldes cirkeludsnit
  → gråt område

- Arealet af en cirkel er givet ved
  $T_c = \pi \cdot r^2$

Vinklen v spænder over en brøkdel af hele cirklen, derfor har vi $\frac{v}{360°}$ som er afgørende for arealet af gråt område

Sætning 3.6.7.1

Arealet af et cirkeludsnit er givet ved:

$$T = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{v}{360°}$$

Cirkelbue

længden mellem A og B langs cirklen kaldes cirkelbuen

Sætning 3.6.8.1

Længden af en cirkelbue, der spænder over en vinkel, v:

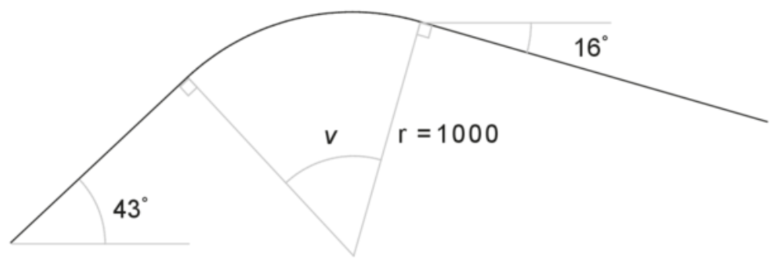
$$l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{v}{360°}$$

formlen kommer fra:

→ omkreds af cirkel givet ved: $O = 2 \cdot \pi \cdot r$

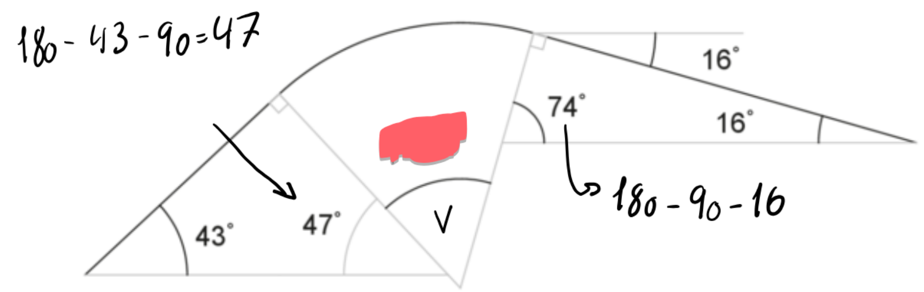
igen her er vinkelbuen en brøkdel af omkredsen.

Eksempel 3.6.8.1



Figur 3.6.8.1 Skitse af rørføring for kloakledning

På figur 3.6.8.1 ses en skitse af rørføringen for en kloakledning. Buen er sat sammen af rørbøjninger med en standardradius r = 1.000 mm. Vi vil finde ud af, hvor mange bøjninger, der medgår, når buelængden for en bøjning er 500 mm.



Først skal vi fastlægge udsnitsvinklen v. Vi skal opfatte de lige stykker som tangenter til cirkelbuen. Vi husker, at tangenter står vinkelret på cirkelbuens radius. Vi tegner derfor nogle hjælpelinjer som på figur 3.6.8.2.

Det fremgår af tegningen, at

$$v = 180^\circ - 47^\circ - 74^\circ = 59^\circ$$

Nu kan vi beregne buelængden:

$$l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{v}{360^\circ} \qquad \Leftrightarrow$$

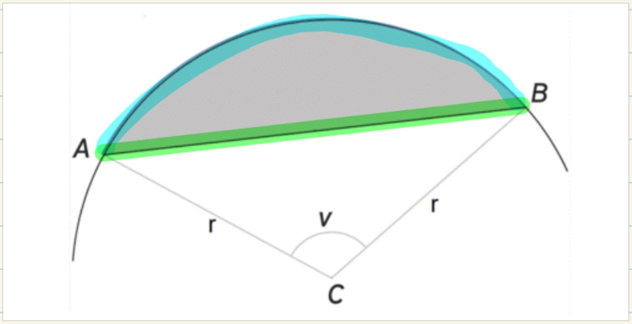
$$l = 2 \cdot \pi \cdot 1000\,\text{mm} \cdot \frac{59^\circ}{360^\circ}$$

$$= 1030\,\text{mm}$$

Entreprenøren skal derfor bestille tre bøjninger. Man må så håbe, at den store rest kan bruges i et andet projekt.

Cirkelafsnit

- Cirkelafsnit er området mellem korden og cirkelbuen



Sætning 3.6.9.1

Arealet af et cirkelafsnit:

$$T = r^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot v}{360^\circ} - \frac{\sin v}{2} \right)$$

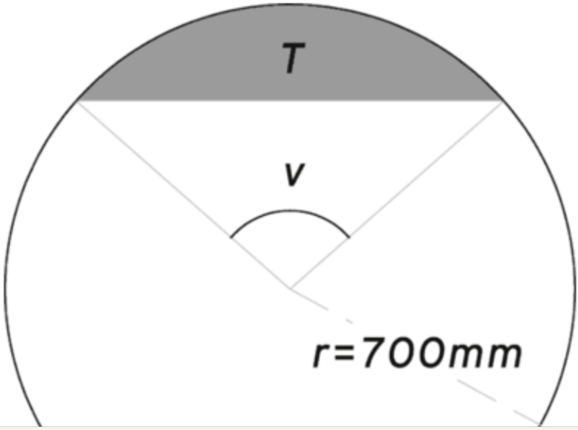
Udledning ses i bogen

Eksempel 3.6.9.1

Et cirkelafsnit skal have et areal $T = 0{,}173\ \mathrm{m}^2$.

Cirklen har radius $r = 700$ mm.

Vi skal fastlægge vinkel v.



Arealet af et cirkelafsnit er givet ved:

$$T = r^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot v}{360°} - \frac{\sin v}{2}\right)$$

Vi indsætter kendte størrelser:

$$0{,}173\,\mathrm{m}^2 = (0{,}7\,\mathrm{m})^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot v}{360°} - \frac{\sin v}{2}\right)$$

Ligningen ovenfor kan kun løses med et matematikprogram.

Vi får, at $v = 97{,}29°$.

Formelsamling

Sætning 3.6.1.1

Omkreds O af en cirkel:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \text{eller} \quad O = \pi \cdot D$$

Areal T af en cirkel:

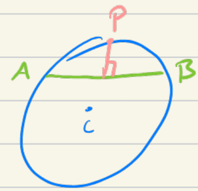
$$T = \pi \cdot r^2 \quad \text{eller} \quad T = \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

Sætning 3.6.4.1

Kordelængden i en cirkel:

retlinje fra A til B

$$K = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{v}{2}\right)$$



Sætning 3.6.5.1

Pilhøjden i en cirkel:

Vinkelret linje fra punkt P til korden

$$h = r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$

$$= r - r \cdot \cos\left(\frac{v}{2}\right)$$

Sætning 3.6.6.1

Sammenhængen mellem radius, pilhøjde og korde:

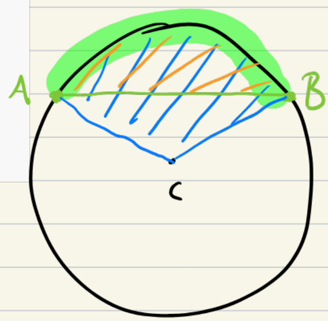
$$r = \frac{h}{2} + \frac{K^2}{8h}$$

Sætning 3.6.7.1

Arealet af et cirkeludsnit er givet ved:

fra A og B til Centrum

$$T = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{v}{360°}$$



Længden af en cirkelbue, der spænder over en vinkel, v:

$$l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{v}{360°}$$

Sætning 3.6.9.1

Arealet af et cirkelafsnit:

fra cirkelbue til korde

$$T = r^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot v}{360°} - \frac{\sin v}{2}\right)$$

Øvelser

Opgave 3.6.1

En cirkel har radius, $r = 5$.

1. Beregn cirklens omkreds.
2. Beregn cirklens areal.

Opgave 3.6.2

En cirkel har omkredsen, $O = 15{,}8$.

1. Beregn cirklens radius, r.
2. Beregn cirklens areal T.

Opgave 3.6.4

En cirkels radius, $r_1 = 5$.

En anden cirkels radius, $r_2 = 10$.

1. Beregn omkredsen af de to cirkler.
2. Hvilken af to nedenstående påstande er rigtig?
   a. Når en cirkels radius fordobles, fordobles cirklens omkreds også.
   b. Når en cirkels radius fordobles, bliver cirklens omkreds fire gange så stor.

Opgave 3.6.5

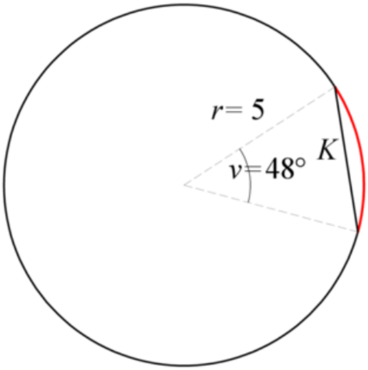
En cirkels radius, $r_1 = 5$.

En anden cirkels radius, $r_2 = 10$.

1. Beregn arealerne af de to cirkler.
2. Hvilken af to nedenstående påstande er rigtig?
   a. Når en cirkels radius fordobles, fordobles cirklens areal også.
   b. Når en cirkels radius fordobles, bliver cirklens areal fire gange så stort.

Opgave 3.6.6

En cirkelbue spænder over en vinkel $v = 48°$. Cirkelbuens radius $r = 5$.



1. Beregn længden af den tilhørende korde *K*.

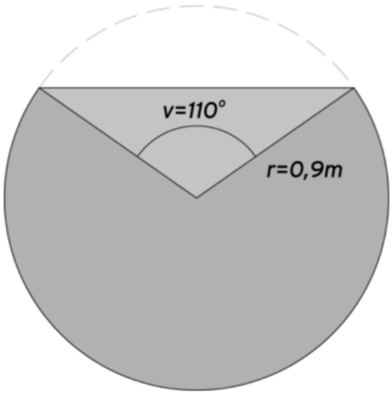
Opgave 3.6.8

Foto: Trevor Allen

En pizza med en diameter på 50 cm skal deles i cirkeludsnit i forholdet 1:2:4.

1. Beregn arealet af hvert cirkeludsnit.

Opgave 3.6.9

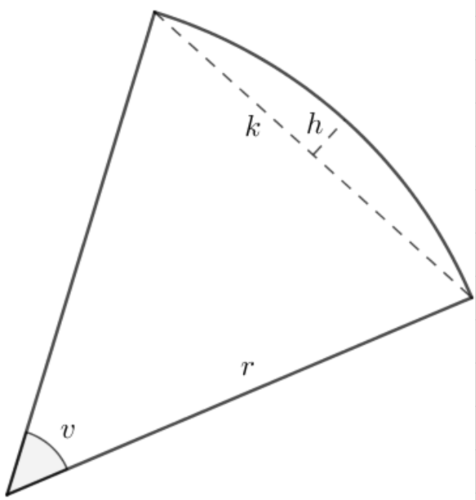


Cirkelafsnit

På figuren ses et cirkelafsnit. Radius i cirklen er givet ved r = 0,9 m. Ligeledes er angivet en udsnitsvinkel $v = 110°$.

1. Beregn arealet af de to grå områder.

Opgave 3.6.11



På figuren herover ses et *cirkeludsnit*, hvor radius $r = 5$ og vinklen $v = 50°$.

1. Beregn pilhøjden h.
2. Beregn korden k.

Opgave 3.6.12

På en cirkel er afsat en korde $k = 4{,}19$. Cirklens radius $r = 10$.

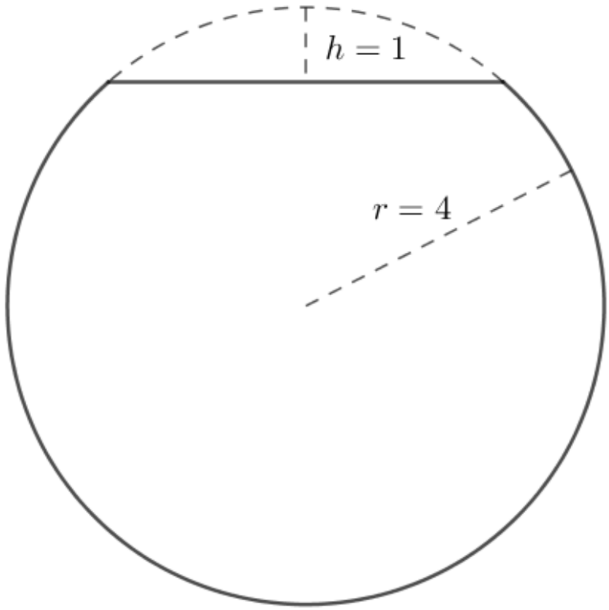
Hvis man løser ligningen:

$$r = \frac{h}{2} + \frac{k^2}{8h}$$

- for at finde h, fås to løsninger.

1. Løs ligningen, f.eks. med CAS. Beregn summen af de to løsninger og forklar resultatet.

Opgave 3.6.16



På figuren ses en del af en cirkel, hvor radius $r = 4$.

$h = 1$ er pilhøjde i den del af cirklen, der er fjernet.

1. Beregn arealet af den del af cirklen, der er tilbage.

Du skal lave et buet gelænder til en altan. Buen spænder over en vinkel på $v = 60^\circ$, og radius er $r = 2,5$ m.

Spørgsmål:

1. Hvor lang bliver gelænderet (buelængden)?
2. Hvor stor en del af en hel cirkel er det?

En rund træplade skal skæres til et cirkeludsnit med radius $r = 1,2$ m og vinkel $v = 90^\circ$.

Spørgsmål:

1. Hvor stort er arealet af stykket?
2. Hvor stor en procentdel er det af hele cirklen?

En metalbøjle formes som en cirkel med radius $r = 50$ cm. Afstanden mellem de to ender (korden) skal findes, når vinklen er $v = 120^\circ$.

Spørgsmål:

1. Beregn kordelængden K.

En muråbning har form som en cirkelbue. Radius er $r = 3$ m, og vinklen er $v = 80^\circ$.

Spørgsmål:

1. Hvor høj er buen (pilhøjden h)?

En håndværker måler en korde til $K = 2,4$ m og pilhøjden til $h = 0,3$ m.

Spørgsmål:

1. Bestem radius r på cirklen.
2. Hvad kunne denne måling være brugt til i praksis?