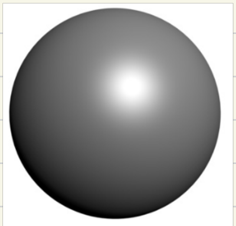
Kuglen

En kugle kendes vi til i mange tilfælde:

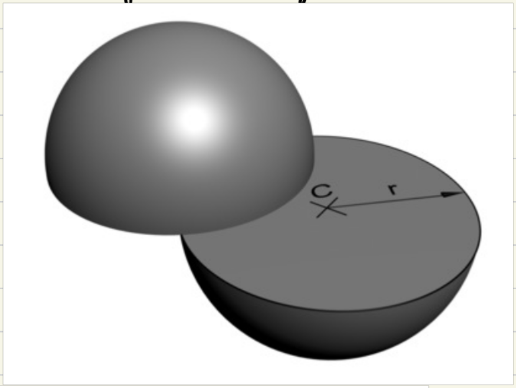
→ bolde
→
→
→



Figur 6.6.1 Kugle

Alle punkter der udgør overfladen af kuglen har samme afstand fra centrum (r)

→ hvis vi deler kuglen i 2 lige store dele, får vi et cirkulær snitflade.
→ Radius i cirklen er også kuglens radius



Vi kan udtrykke kuglens rumfang.

Sætning 6.6.1 Rumfanget af en kugle

En kugle med radius r har rumfanget

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Kuglens udvendige overflade er krum. Vi har:

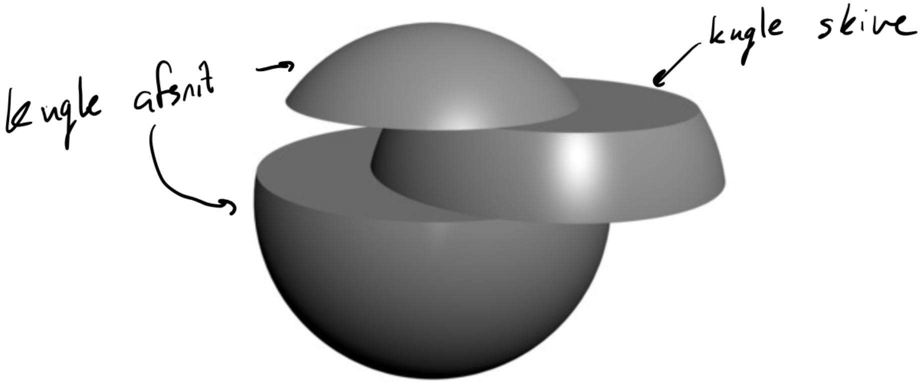
Sætning 6.6.2 Arealet af en kugles overflade

Overfladearealet af en kugle med radius r

$$T = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Areal for kugle skive og kugle afsnit

Hvis vi lægger to parallelle plane snit gennem en kugle, får vi en *kugleskive* og to *kugleafsnit*. Se figur 6.7.1.1



Overfladen af en kugle skive udgøres af 2 plane cirkelflader og en krum overflade, der kaldes et kugle bælte

Figur 6.7.1.2 Tværsnit af kugleskive

Arealet T af kugleskivens krumme overflade (kuglebæltet) beregnes af formlen:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Hvor r er kuglens radius, og h er højden af kugleskiven. Se figur 6.7.1.2.

Overfladen af et kugleafsnit udgøres af en plan cirkelflade og en krum overflade, der kaldes en *kalot*.

Arealet T af kugleafsnittets krumme overflade (kalotten) beregnes af formlen:

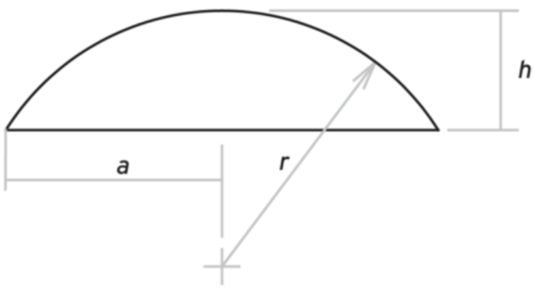
$$T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Det er den samme formel som for kugleskiven.

Sætning 6.7.1.1 Kugleafsnittets krumme overflade

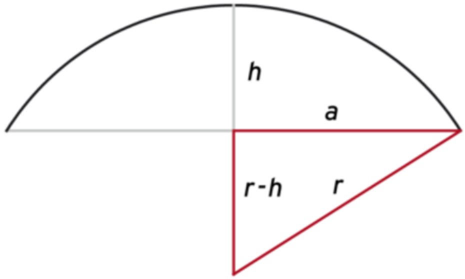
For et kugleafsnit med højden h og radius r er arealet af den krumme overflade givet som

$$T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



Figur 6.7.1.3 Tværsnit af kugleafsnit

Størrelsen a er radius i den cirkulære snitflade figur 6.7.1.3. Vi kan udtrykke h ved hjælp af r og a:



Af figur 6.7.1.4 fremgår at:

$$r^2 = (r-h)^2 + a^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$r^2 = r^2 + h^2 - 2rh + a^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2rh = a^2 + h^2$$

Nu kan vi skrive arealet som:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot (a^2 + h^2)$$

Vi kan nu formulere følgende:

Sætning 6.7.1.2 Kugleafsnittets krumme overflade

For et kugleafsnit med radius a i den cirkulære snitflade og pilhøjden h er arealet af den krumme overflade givet som

$$T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot (a^2 + h^2)$$

Rumfang af kugle afsnit

Rumfanget af kugleafsnit er givet ved

Sætning 6.7.2.1 Kugleafsnittets rumfang

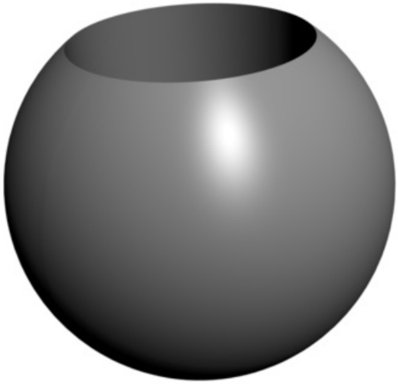
For et kugleafsnit med højden h og fra en kugle med radius r er rumfanget

kugle, hvor noget er "skåret" fra

$$V = \pi \cdot h^2 \cdot \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

Eksempel 6.7.2.1

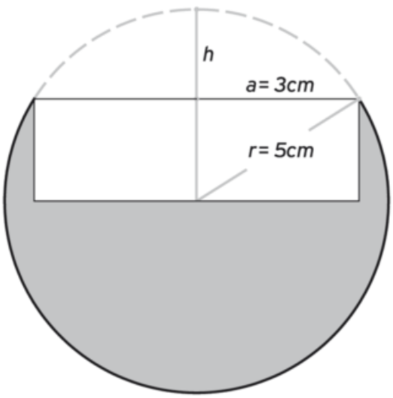
I en kugle med radius $r = 5$ cm er der boret et hul med radius $a = 3$ cm. Hullet går ind til kuglens midte. Se figur 6.7.2.1.



Figur 6.7.2.1 Kugle med hul i

Vi vil beregne den udborede kugles rumfang.

Udover selve hullet har vi jo også fjernet et kugleafsnit ved udboringen. Rumfanget beregnes derfor som rumfanget af en hel kugle, hvor vi fratrækker rumfanget af det, vi har fjernet. Figur 6.7.2.2 viser en *snitflade* gennem den udborede kugles midte. Snitfladen er parallel med hullets frembringere.



Figur 6.7.2.2 Snitflade gennem udboret kugle

Vi skal beregne pilhøjden h. Se figur 6.7.2.2.

$$r - h = \sqrt{r^2 - a^2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$h = r - \sqrt{r^2 - a^2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$h = 5 \text{ cm} - \sqrt{(5 \text{ cm})^2 - (3 \text{ cm})^2}$$

$$= 1 \text{ cm}$$

Rumfanget V_a af afsnittet:

$$V_a = \pi \cdot h^2 \cdot \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

$$= \pi \cdot (1 \text{ cm})^2 \cdot \left(5 \text{ cm} - \frac{1 \text{ cm}}{3}\right)$$

$$= 14{,}66 \text{ cm}^3$$

Rumfanget V_h af hullet med dybden h_h:

$$V_h = \pi \cdot a^2 \cdot h_h$$

$$= \pi \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 4 \text{ cm}$$

$$= 113{,}10 \text{ cm}^3$$

Kuglens rumfang V_k beregnes:

$$V_k = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (5 \text{ cm})^3$$

$$= 523{,}60 \text{ cm}^3$$

Nu har vi det endelige rumfang:

$$\begin{aligned} V &= V_k - V_a - V_h \\ &= 523{,}60\ \text{cm}^3 - 14{,}66\ \text{cm}^3 - 113{,}1\ \text{cm}^3 \\ &= 395{,}84\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Kuglens krumme overflade skal males grøn. Vi er derfor interesserede i at beregne arealet af den krumme overflade.

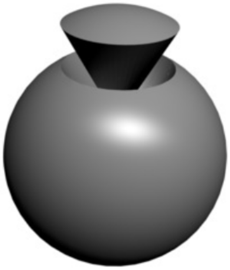
$$\begin{aligned} T &= 4 \cdot \pi \cdot r^2 - \pi \cdot (a^2 + h^2) \\ &= 4 \cdot \pi \cdot (5\ \text{cm})^2 - \pi \cdot ((3\ \text{cm})^2 + (1\ \text{cm})^2) \\ &= 282{,}7\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

6.7.3 Kugleudsnit

Aa

På figur 6.7.3.1 ses et kugleudsnit. Det ses, at udsnittet er sat sammen af en *kegle* og et *kugleafsnit*.

Ved beregning af rumfang og overflade anvender vi derfor formlerne fra keglen og fra kugleafsnittet.



Figur 6.7.3.1 Kugleudsnit

Øvelser

Opgave 6.7.1

En kugle har en radius r = 40 mm.

1. Beregn kuglens rumfang.
2. Beregn arealet af kuglens overflade.

Opgave 6.7.2

Kugle A har rumfanget $V = 100$.

Radius i kugle B er 5% større end radius i kugle A.

1. Beregn radius i kuglerne A og B.
2. Hvor mange % større rumfang har kugle B i forhold til kugle A?

Opgave 6.7.6

Foto: iStockphoto/xamtiw

En slikproducent markedsfører chokoladeovertrukne marcipankugler i to forskellige varianter.

Den ene variant har en diameter $d = 2{,}5$ cm.

Den anden variant har en diameter $D = 4{,}5$ cm.

Hver chokoladekugle er emballeret i tynd plastfolie.

1. Beregn rumfanget af en kugle af hver variant.

I denne opgave antages, at hver kugle pakkes ind i en mængde plastfolie, der svarer til kuglens overfladeareal.

2. Beregn, hvor meget plastfolie, der medgår til indpakning af hver variant.
3. Beregn forholdet mellem forbruget af plastfolie i forhold til rumfanget af en kugle for hver variant. Resultatet udtrykkes i $\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^3}$ (kvadratcentimeter folie pr. kubikcentimeter marcipan).
4. Opstil en formel, der beskriver forholdet mellem overfladearealet af en kugle og kuglens rumfang.

Brug tid på jeres projekt.