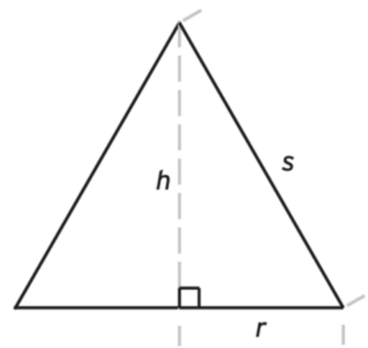
Kegler

Grundfladen i en kegle er en cirkel, og alle "siderne" mødes i et punkt: Keglespidsen.

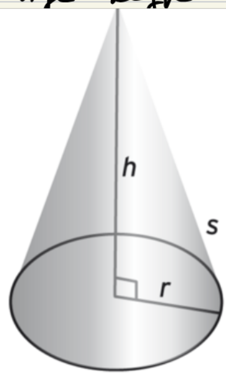
Keglens højde h er afstand fra keglespidsen og vinkelret på grundfladen.

- → Når højden rammer grundfladens centrum er der tale om en lige kegle
- → Ellers er der tale om en skæv kegle

Vi ser kun på lige kegler



Figur 6.8.1.2 Tværsnit af en lige kegle



Figur 6.8.1.3 Kig gennem lige kegle

Længden af keglens skrå side beregnes ved Pythagoras

$$s^2 = r^2 + h^2 \iff s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Areal er keglens grundflade G er givet ved

$$G = \pi \cdot r^2$$ areal af en cirkel

Keglens rumfang er givet ved

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

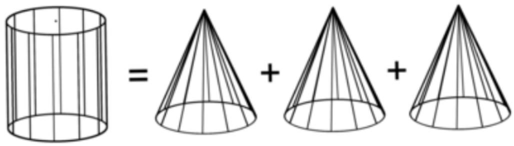
Sætning 6.8.1.1 Keglens rumfang

Rumfanget af en lige kegle med højden h og radius r i grundfladen

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

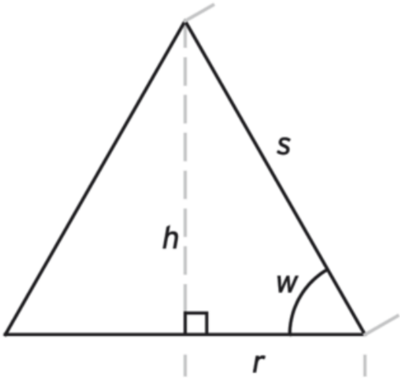
$\frac{1}{3}$ kommer fra

Bemærk, som det vises i figur 6.8.1.4 herunder, at keglens rumfang er en tredjedel af cylinderens.



Eksempel 6.8.1.1

Ved en kegleformet skål har man målt en diameter $D = 14$ cm og en skrå sidelængde $s = 21$ cm.



Figur 6.8.1.5 Tværsnit af kegleformet skål

For at beregne rumfanget skal vi kende radius og højde, figur 6.8.1.5.

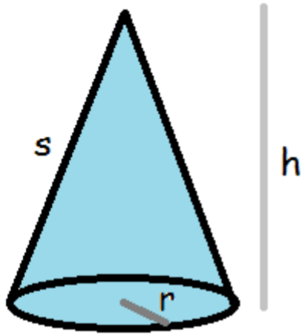
$$r = \frac{D}{2} = \frac{14 \text{ cm}}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{s^2 - r^2} \\ &= \sqrt{(21 \text{ cm})^2 - (7 \text{ cm})^2} \\ &= 19{,}8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nu er rumfanget:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (7 \text{ cm})^2 \cdot 19{,}8 \text{ cm} = 1.016 \text{ cm}^3$$



Arealet af den krumme overflade beregnes således

$$O_{\text{kegle}} = \pi \cdot r \cdot s$$

Det samlede overfladeareal (inklusiv bunden) er derfor

$$A_{\text{kegle}} = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{kegle}} = \pi \cdot r \cdot (s + r)$$

Eksempel

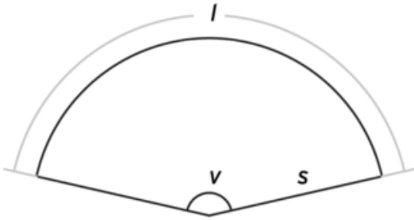
Vi har en kegle med $d = 10$ og højde $= 15$
find rumfang og overflade areal

Keglens udfoldning

Vi skal se, hvordan man kan beregne arealet af keglens krumme overflade. De fleste af os har nok prøvet at lave kræmmerhuse til jul ved at folde et stykke papir, der er klippet som et cirkeludsnit. Et kræmmerhus er jo en kegle.

På figur 6.8.2.1 ses en kegleudfoldning. De to lige kanter svarer til længden af en frembringer (keglens skrå side s). Længden af buen l svarer til omkredsen O af keglens grundflade. Vinklen v er udfoldningsvinklen.

$$l = O = 2 \cdot \pi \cdot r$$



Nu kan vi beregne udfoldnings-vinklen v ved at bruge formlen for beregning af *buelængd*

$$l = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{v}{360°}$$

Vi kombinerer formlerne:

$$2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{v}{360°} = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \Leftrightarrow$$

$$v = 360° \cdot \frac{r}{s}$$

Sætning 6.8.2.1 Udfoldningsvinkel

Udfoldningsvinklen for en kegle med grundflade-radius r og frembringer længde s

$$v = 360° \cdot \frac{r}{s}$$

Den udfoldede kegles overflade svarer til et cirkeludsnit. Arealet T af et cirkeludsnit er givet ved:

$$T = \pi \cdot s^2 \cdot \frac{v}{360°}$$

Vi omskriver det fundne udtryk for v:

$$v = 360° \cdot \frac{r}{s} \Leftrightarrow$$

$$\frac{v}{360°} = \frac{r}{s}$$

Dette indsættes i arealformlen:

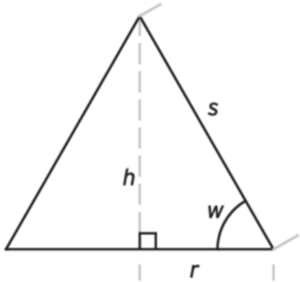
$$T = \pi \cdot s^2 \cdot \frac{v}{360°} \quad \Leftrightarrow$$

$$T = \pi \cdot s^2 \cdot \frac{r}{s} \quad \Leftrightarrow$$

$$T = \pi \cdot r \cdot s$$

En frembringer i en kegle danner en keglevinkel w med grundfladen. Se figur 6.8.2.2. Sammenhængen mellem keglevinklen w, keglens radius r og længden af en skrå side s kan udtrykkes som:

$$\cos w = \frac{r}{s}$$



Figur 6.8.2.2 Tværsnit af kegle

Vi kan nu opstille en sammenhæng mellem udfoldningsvinklen v og keglevinklen w:

$$v = 360° \cdot \frac{r}{s} \Leftrightarrow$$

$$\frac{v}{360°} = \frac{r}{s}$$

Sammenhængen bliver nu:

$$\cos w = \frac{v}{360°}$$

Sætning 6.8.2.2 Udfoldningsvinkel og keglevinkel

Ved en kegle med keglevinkel w og udfoldningsvinkel v gælder:

$$\cos w = \frac{v}{360^\circ}$$

Eksempel 6.8.2.1

Om en kegle gælder at keglevinklen $w = 65^\circ$. Den udfoldede vinkel v findes:

$$\cos 65^\circ = \frac{v}{360^\circ} \Leftrightarrow$$

$$v = 360^\circ \cdot \cos 65^\circ$$

$$= 152{,}1^\circ$$

Øvelser:

Opgave 6.8.1

I en kegle k_1 er grundfladens radius $r_1 = 1$ m. Keglens højde $h = 2$ m.

1. Beregn keglens rumfang.

Man ønsker en markering af stedet på keglen, hvor rumfanget netop er 1 m^3 regnet fra keglens spids.

2. Hvor skal mærket placeres?
3. En anden kegle med samme højde h har det halve rumfang. Beregn radius r_2 i denne kegle.

Opgave 6.8.2

Lille Gilbert vil lave kræmmerhuse til jul. Et kræmmerhus har følgende mål:

- Højde: $h = 12$ cm.
- Diameter i grundfladen: $D = 8$ cm.

Kræmmerhusene skal laves i glanspapir. Gilberts mor har gået på htx og hjælper derfor med at tegne udfoldningen, som Gilbert kan klippe efter.

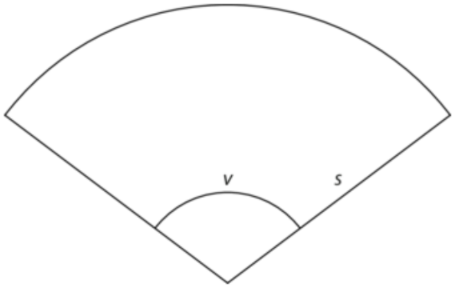
1. Udregn areal og udfoldningsvinkel for ét kræmmerhus.

Et stykke glanspapir har målene 35 x 50 cm.

2. Hvor mange kræmmerhuse kan der laves på et stykke glanspapir? Der ses bort fra hanke.

TIP: Det kan være en idé at tegne udfoldning og papir i fx Smartsketch for at se, hvordan man får mest muligt ud af papiret.

Opgave 6.8.3



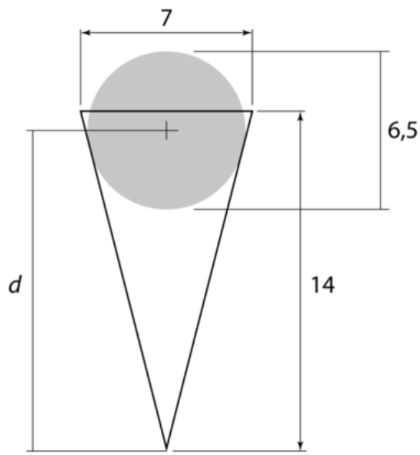
På tegningen ses en udfoldet kegle.

Udfoldningsvinklen $v = 106°$.

Længden af en frembringer $s = 5$.

1. Beregn radius i keglens cirkulære grundflade.
2. Beregn keglens højde h.

Opgave 6.8.5



På figuren ses en isvaffel og noget jordbæris.

Vaflen er udformet som en regulær kegle.

- Vaflens diameter D = 7 cm.
- Højden h = 14 cm.

1. Beregn vaflens rumindhold. Der ses bort fra vaflens tykkelse.

Hvis færdig brug tid på projekt