

206 || 9. VEKTORER 3 – AFSTAND, VINKEL OG AREAL

Når vi arbejder med vektorer, er skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ et vigtigt tal, der indeholder information om den måde, $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er orienteret i forhold til hinanden på. Skalarproduktet dukker blandt andet op i formler for *vinklen mellem to vektorer*, *arealet af parallelogrammet udspændt af to vektorer* og *projektion af en vektor på en vektor*.

UAFHÆNGIGHED AF KOORDINATSYSTEMETS PLACERING

Hvis man drejer koordinatsystemet omkring (0,0), vil ethvert punkt (x,y), på nær begyndelsespunktet (0,0), få nye koordinater $(\tilde{x}, \tilde{y})$, og enhver egentlig vektor

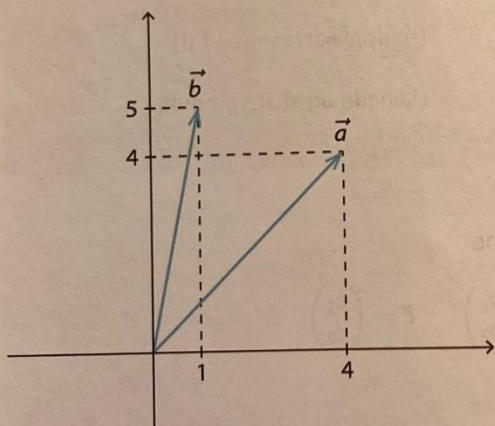
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

vil få nye vektorkoordinater

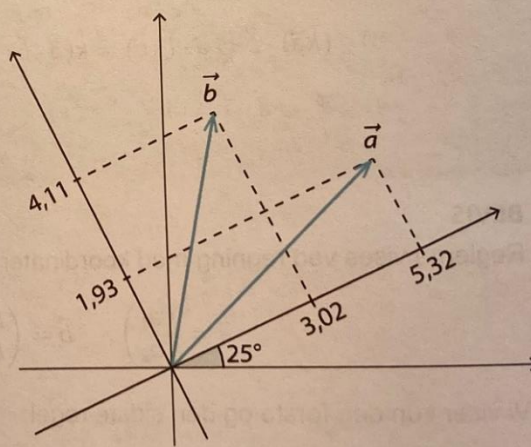
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

På figur 1 og figur 2 er det forhold illustreret med vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$



Figur 1



Figur 2

Koordinatsystemet er her drejet 25° omkring origo, og det har den virkning, at vektorkoordinaterne (med to decimaler) ændres til

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5,32 \\ 1,93 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3,02 \\ 4,11 \end{pmatrix}.$$

Skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ beregnes ud fra vektorkoordinaterne. Man skulle derfor forvente, at skalarproduktet ændrer sig, når koordinatsystemets placering ændres. Vi ser imidlertid, at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 24$$

9. VEKTORER 3 – AFSTAND, VINKEL OG AREAL || 207

i det første koordinatsystem, samt (med to decimaler)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 5,32 \\ 1,93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,02 \\ 4,11 \end{pmatrix} = 24,00$$

i det andet koordinatsystem.

Eksemplet illustrerer en bemærkelsesværdig egenskab ved skalarproduktet:

SÆTNING 2

Skalarproduktet er uafhængigt af koordinatsystemets placering.

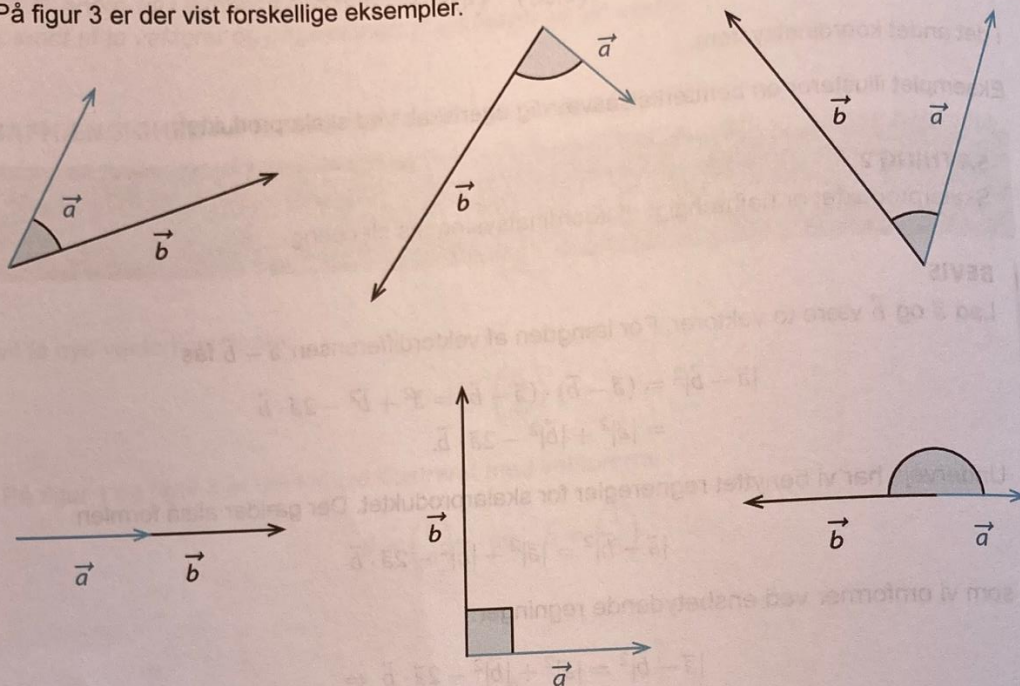
VINKEL MELLEM VEKTORER

To egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ afsat ud fra samme punkt danner (hvis ikke de er modsat rettede) to forskellige vinkler med hinanden – en stor og en lille. Den mindste af vinklerne kalder vi for *vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$* . Hvis vektorene er modsat rettede, er vinklerne lige store og vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 180° .

208 || 9. VEKTORER 3 – AFSTAND, VINKEL OG AREAL

Vi regner her ikke med omløbsretning og fortegn, og vinklen mellem to vektorer er derfor altid i intervallet $[0^\circ, 180^\circ]$.

På figur 3 er der vist forskellige eksempler.



Figur 3

Vi ser, at

- $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ensrettede, netop hvis $v = 0^\circ$.
- $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, netop hvis $v = 90^\circ$.
- $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er modsat rettede, netop hvis $v = 180^\circ$.

Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan bestemmes ved hjælp af følgende sætning:

SÆTNING 4

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er egentlige vektorer, og v er vinkel mellem dem, gælder formelen

$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

BEVIS

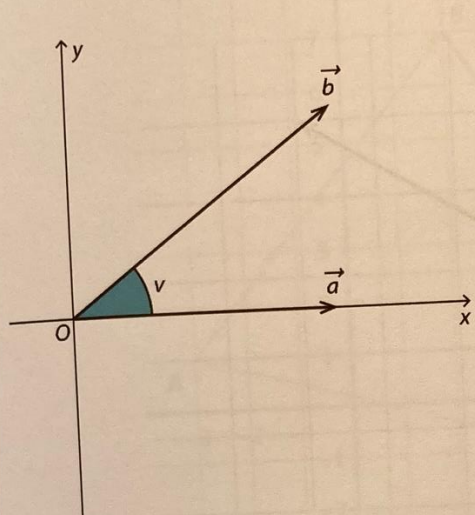
Vi vil vise, at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos v,$$

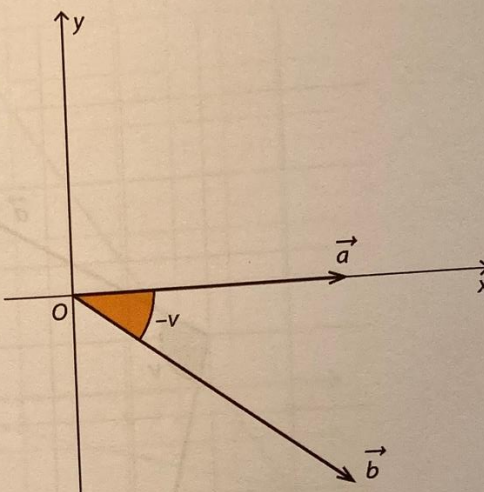
hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

9. VEKTORER 3 - AFSTAND, VINKEL OG AREAL || 209

Det er et skalarprodukt vi skal udregne, og vi kan derfor frit vælge koordinatsystemets placering ifølge sætning 2. Vi vælger et koordinatsystem, hvor $\vec{a}$ er ensrettet med x-aksens positive del. Når repræsentanter for $\vec{a}$ og $\vec{b}$ afsættes ud fra origo, fås enten den situation, der er vist på figur 4, eller den situation, der er vist på figur 5.



Figur 4



Figur 5

Først undersøges situationen på figur 4.

Vinklen v er i det tilfælde også retningsvinkel for $\vec{b}$. I det valgte koordinatsystem har $\vec{a}$ og $\vec{b}$ derfor koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cos v \\ |\vec{b}| \sin v \end{pmatrix}.$$

Her benyttes sætning 4 fra kapitel 8, der fortæller, hvordan en vektors koordinater kan opskrives vha. længde og retningsvinkel.

Skalarproduktet kan nu beregnes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cos v \\ |\vec{b}| \sin v \end{pmatrix} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos v + 0 \cdot |\vec{b}| \sin v = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos v.$$

Dvs.

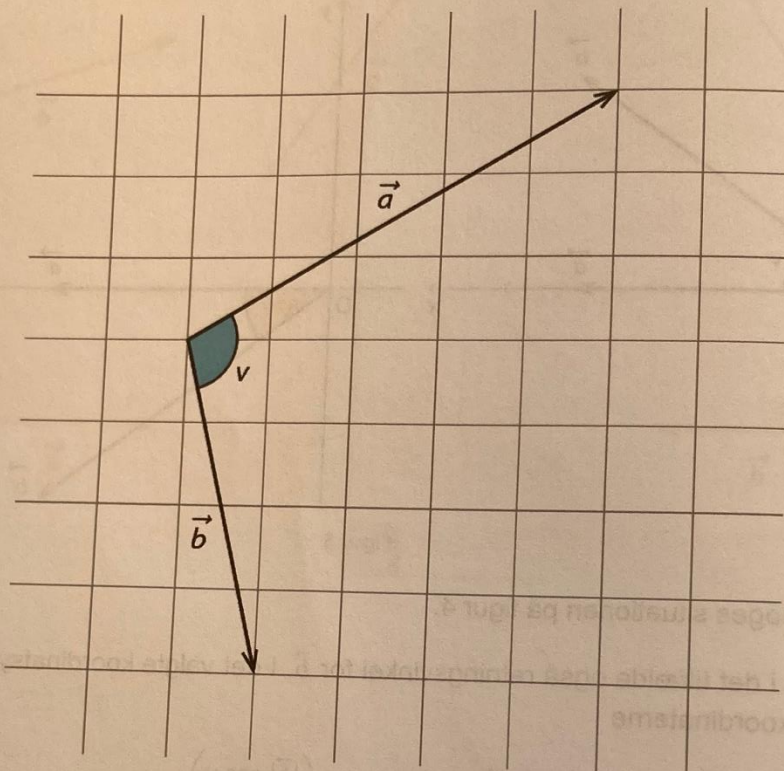
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos v \Leftrightarrow \cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Hvis i stedet $\vec{b}$ er orienteret som på figur 5, er $-v$ retningsvinkel for $\vec{b}$. Fordi $\cos(-v) = \cos v$ fås, med regninger magen til dem der lige er foretaget, at også i det tilfælde gælder formelen.

EKSEMPEL 2

Vi finder vinklen mellem vektorerne (figur 6)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



Figur 6

Skalarproduktet og længderne er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) = -7$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \quad \text{og} \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

Med sætning 4 får vi

$$\cos v = \frac{-7}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{17}} = \frac{-7}{\sqrt{578}}$$

som med 2 decimaler giver $v = 106,93^\circ$.

EKSEMPEL 4

Tallet t ønskes bestemt, så vektorerne

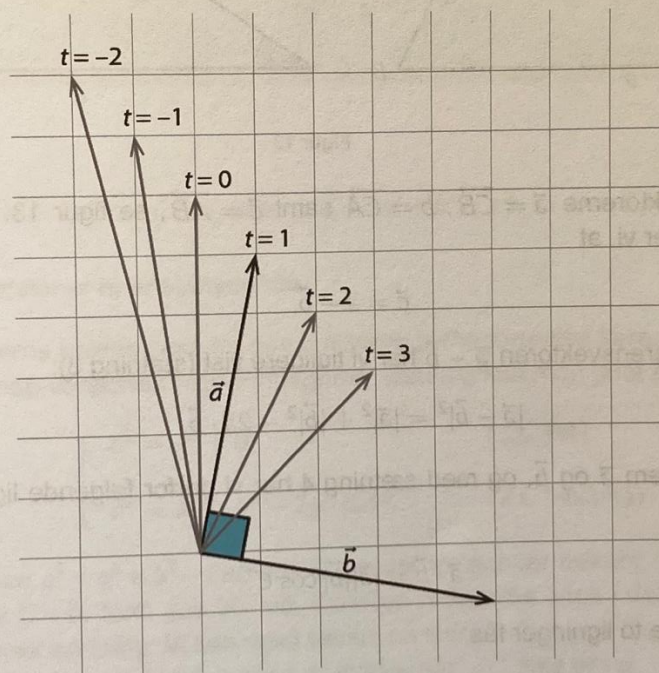
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 6-t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

er ortogonale.

Vi benytter, at $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og løser derfor ligningen

$$\begin{pmatrix} t \\ 6-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5t - 6 + t = 0 \Leftrightarrow 6t = 6 \Leftrightarrow t = 1.$$

For $t = 1$ er vektorerne altså ortogonale. Figur 11 viser situationen geometrisk.



Figur 11