

Opgave 13 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x + \frac{x}{x^2 + 1},$$

og en linje l er bestemt ved ligningen $y = x - 2$.

Det oplyses, at grafen for f har to tangenter, der er parallelle med linjen l .

- Bestem førstekoordinaten til hvert af de to tangenters røringpunkter med grafen for f .
- Gør rede for, at f er en voksende funktion.

a) Jeg definere funktionen og bestemmer dens afledte funktion ($f'(x)$).

$$f(x) := x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow \text{Udført}$$

$$f'(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow \text{Udført}$$

$$f'(x) \rightarrow 1 - \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Så sætter jeg $f'(x) = 1$, for at finde førstekoordinaten til hvert af de to tangenters røringspunkter, hvor $f(x)$ ligeledes har en væksthastighed på 1. (dvs. så de er parallelle med l)

$$\text{solve}(f'(x) = 1, x) \rightarrow x = -1 \text{ or } x = 1.$$

Røringpunkterne er i $x = -1$ og $x = 1$.

b) Vi skal gøre rede for at funktionen er voksende. Først undersøger vi om funktionen er konstant på noget tidspunkt. dvs. om den har nogen vandrette tangenter.

$$\text{solve}(f'(x) = 0, x) \rightarrow \text{false}$$

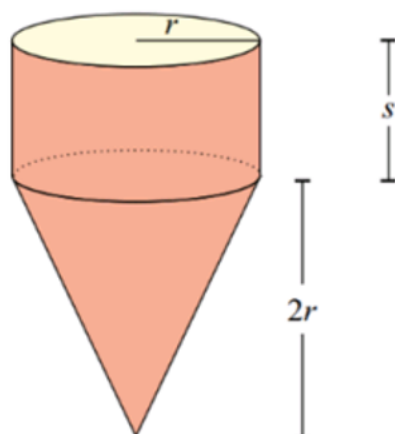
Det kan vi se at funktionen ikke har, da ovenstående ligning ikke har nogen løsninger. Så indsættes en tilfældig x -værdi.

$$f'(2) \approx 0.88$$

Da den afledte funktion i punktet x er positiv og funktionen ikke er konstant på nogen tidspunkter er funktionen voksende.

Opgave 18

En tragt er sammensat af en åben cylinder og en kegle (se figuren). Keglens grundflade og cylinderen har samme radius r , målt i dm. Keglens højde er det dobbelte af dens radius. Hele tragten kan rumme 40 dm^3 .



(5 point)

a) Bestem cylinderens højde s som funktion af r .

(5 point)

b) Gør rede for, at tragtens ydre overflade O som funktion af r kan beskrives ved

$$O(r) = \pi \left(\sqrt{5} - \frac{4}{3} \right) \cdot r^2 + \frac{80}{r}.$$

(5 point)

c) Bestem r , således at tragtens ydre overfladeareal er mindst mulig, når $0 < r < 4$.Rummer 40 dm^3 Rumfang af cylinder: $\pi \cdot r^2 \cdot s$ Rumfang af kegle: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r$ Samlet rumfang er $\pi \cdot r^2 \cdot s + \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$ a) Vi sætter det lig 40 og isolerer s : $\text{solve} \left(40 = \pi \cdot r^2 \cdot s + \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}, s \right) = \frac{40}{\pi \cdot r^2} - \frac{2}{3} \cdot r$ b) Overflade: Cylinder: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{-2 \cdot (\pi \cdot r^3 - 60)}{3 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{80}{r} - \frac{4}{3} \pi \cdot r^2$ Keglen: $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + (2 \cdot r)^2} = \pi \cdot \sqrt{5} \cdot r^2$

Samlet areal: $\frac{80}{r} + \left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right)\pi \cdot r^2$ som er det samme som udtrykket i opgaven.

c) Minimum: $f\left(\frac{80}{r} + \left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right)\pi \cdot r^2, r\right) \mid 0 < r < 4$

Dvs. 2,4 dm

Opgave 13 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 25 \cdot x^4 - \frac{2}{x}, \quad x > 0.$$

(10 point)

a) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1,8)$.

a) Jeg definer funktionen og finder dens stamfunktion $F(x)$:

$$f(x) := 25 \cdot x^4 - \frac{2}{x} \mid x > 0 \quad \blacktriangleright \text{ Udført}$$

Stamfunktion med graf gennem $(1,8)$:

$$\text{storef}(x) := \int f(x) \, dx + k \quad \blacktriangleright \text{ Udført}$$

$$\text{solve}(\text{storef}(1)=8, k) \quad \blacktriangleright k=3.$$

Stamfunktionen er altså $F(x) = \text{storef}(x) \quad \blacktriangleright \quad \left(\left\{ 5 \cdot x^5 - 2 \cdot \ln(x), x > 0. \right\} \right) + k$

$$F(x) = 5x^5 - 2\ln(x) + 3, \quad x > 0$$

Opgave 14 Om en funktion F gælder, at $F(x)$ er stamfunktion til

$$f(x) = -x^3 + 3x.$$

Linjen t med ligningen $y = -2x + 8$ er tangent til grafen for F , og det oplyses, at røringpunktet for t har negativ førstekoordinat.

a) Bestem en forskrift for F .

a) Jeg definere funktionen og finder først den generelle stamfunktion $F_1(x)$ til $f(x)$:

$$f(x) := -x^3 + 3 \cdot x \quad \blacktriangleright \quad \text{Udført}$$

$$\text{storef}(x) := \int f(x) \, dx + k \quad \blacktriangleright \quad \text{Udført}$$

$$\text{storef}(x) \quad \blacktriangleright \quad -0.25 \cdot x^4 + 1.5 \cdot x^2 + k$$

$$F_1(x) = -0.25x^4 + 1.5x^2 + k$$

Jeg beregner x værdiens røringpunkt ved at sætte tangentligningens hældningskoefficient (-2) lig med $f(x)$ og løse ligningen:

$$\text{solve}(f(x) = -2, x) \quad \blacktriangleright \quad x = -1. \text{ or } x = 2.$$

Da det oplyses, at den har negativ fortegn i røringpunktet, skal vi bruge løsningen $x = -1$. Nu findes den tilsvarende y -værdi:

$$y = -2 \cdot -1 + 8 \quad \blacktriangleright \quad y = 10.$$

Så røringpunktet er $(-1, 10)$.

Den bestemte stamfunktion bestemmes ved at indsætte røringpunktet i den genrelle stamfunktion og isolere k .

$$\text{solve}(\text{storef}(-1) = 10, k) \quad \blacktriangleright \quad k = 8.75$$

Så stamfunktion til $f(x)$ er givet ved $F(x) = -0.25x^4 + 1.5x^2 + 8.75$

[]

Opgave 15 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4x^2 - x^3.$$

(10 point)

a) Bestem nulpunkterne for f .

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for f et område M_1 i første kvadrant.

(10 point)

b) Bestem arealet af M_1 .

a) Jeg definere funktion og løser ligningen $f(x)=0$, for at finde nulpunkterne.

$$f(x) := 4 \cdot x^2 - x^3 \quad \blacktriangleright \quad \text{Udført}$$

$$\text{solve}(f(x)=0, x) \quad \blacktriangleright \quad x=0. \text{ or } x=4.$$

Så nulpunkterne for f er $x=0$ eller $x=4$.

b) Jeg bestemmer arealet ved at finde det bestemte integrale af f og indsætte nulpunkterne som grænser.

$$m_1 = \int_0^4 f(x) \, dx \quad \blacktriangleright \quad m_1 = 21.3333333333$$

Så arealet af $M_1 = 21,333$.

[]