

STX MAT A-NIVEAU

20. MAJ 2022 - VEJLEDENDE BESVARELSE - EH

Del 1: Opgaver uden hjælpemidler

Opgave 1

a) Bestem integralet $\int (x^2 + 8x)dx$

Jeg bestemmer det ubestemte integralet ved hjælp af formel 153, 159 og 160 i formelsamlingen.

$$\int (x^2 + 8x)dx = \frac{1}{3}x^3 + 8 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + c$$

Opgave 2

a) Løs ligningen $(x - 3) \cdot (2x - 5) = 0$

Jeg benytter nulreglen til at løse ligningen $(x - 3) \cdot (2x - 5) = 0$

Hvis $(x - 3) \cdot (2x - 5) = 0$ må

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = 2,5$$

Dvs. løsningen til ligninger er $x = 3$ eller $x = 2,5$

Opgave 3

To funktioner er givet ved $f(x) = x^2 + 5$ og $g(x) = 4 \cdot \sqrt{x}$.

a) Bestem $f(2)$ og $g(f(2))$.

For at bestemme $f(2)$ indsættes $x = 2$ i $f(x)$

$$f(2) = 2^2 + 5 = 4 + 5 = 9$$

$$g(f(2)) = g(9) = 4 \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$

Dermed er $f(2) = 9$ og $g(f(2)) = 12$

Opgave 4

En parabel er givet ved ligningen $y^2 = 6 \cdot x$

a) Vis, at punktet $P(6, -6)$ ligger på parabelen.

For at undersøge om $P(6, -6)$ ligger på parabelen sættes $x = 6$ og $y = -6$ ind i ligningen:

$$y^2 = 6 \cdot x$$

$$(-6)^2 = 6 \cdot 6$$

$$36 = 36$$

Dermed er det vist at P ligger på linjen.

b) Bestem en ligning for tangenten til parabelen i punktet

For at bestemme en ligning for tangenten til parabelen i P bruges formelen: $y \cdot y_0 = \frac{1}{2} \cdot a(x + x_0)$
(Formel F11)

$$y \cdot (-6) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (x + 6)$$

$$-6y = 3 \cdot (x + 6)$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (x + 6)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 3$$

Dermed er tangenten til parabelen i P $y = -\frac{1}{2}x - 3$

Opgave 5

En funktion f er givet ved $f(x) = x^4 \cdot \sin(x)$

a) Bestem $f'(x)$

Jeg bruger produktreglen til at bestemme $f'(x)$ og sætter x^3 uden for parentes

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin(x) + x^4 \cdot (-\cos(x)) = x^3 \cdot (4 \sin(x) - x \cdot \cos(x))$$

Dermed er $f'(x) = x^3 \cdot (4 \sin(x) - x \cdot \cos(x))$

Opgave 6

På figuren ses hældningsfeltet hørende til differentialligningen

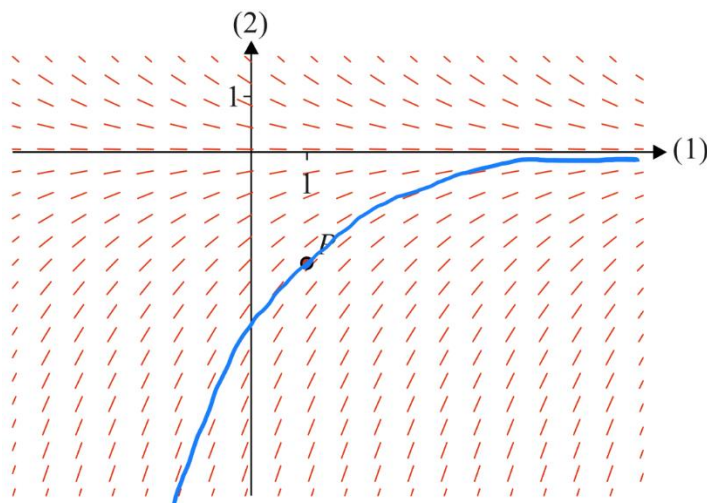
$$y' = -\frac{1}{2} \cdot y.$$

Grafen for løsningen f til differentialligningen går gennem $P(1, -2)$.

a) Skitsér grafen for f på bilaget

Grafen for f tegnes ved at følge linjeelementerne. De viser, at førsteaksen er en vandret asymptote til grafen, og de antyder, at der ikke er nogen lodret asymptote.

Løsningskurven gennem P er skitseret på bilag, som vist nedenfor:



b) Bestem en forskrift for f

Den fuldstændige løsning til en differentialligning på formen $y' = k \cdot y$ er $y = c \cdot e^{k \cdot x}$ (formel 176). Derfor er

$$f(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

Da grafen for f går gennem $P(1, -2)$ fås $f(1) = -2$. Koordinaterne for P indsættes i funktionsforskriften for at bestemme c :

$$f(1) = c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 1} = c \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -2 \Leftrightarrow c = \frac{-2}{e^{-\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow c = -2e^{\frac{1}{2}}$$

Forskriften bliver da: $f(x) = -2e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

Opgave 7

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x,$$

Det oplyses at f har ét stationært punkt.

a) Bestem koordinatsættet til det stationære punkt.

Koordinatsættet til et stationært punkt findes ved at løse ligningen $f'_x(x_0, y_0) = 0$ og $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (formel 197)

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + 2x) = 2x + 0 + 2 = 2x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 2x) = 0 + 2y + 0 = 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{0} \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$$

Grafen for f har altså et stationært punkt i $P(-1, 0)$.

b) Bestem arten af det stationære punkt

For at bestemme arten af det stationære punkt udregnes determinanten for Hesse-matricen: $D = r \cdot t - s^2$ hvor

$$r = f''_{xx}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$

$$t = f''_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2$$

$$s = f''_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

$$\text{Dermed fås: } D = r \cdot t - s^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 - 0 = 4$$

Da $D > 0$ og $r > 0$ er det stationære punkt P af arten minimum (formel 199).

Opgave 8

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 4.$$

a) Bestem $f'(x)$ og løs ligningen $f'(x) = 0$

Den afledede funktion af f bestemmes ved at differentiere ledvist:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 3$$

Nu kan ligningen $f'(x) = 0$ løses:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ eller } x = 1.$$

Dermed er $f'(x) = 3x^2 - 3$ og løsningen til ligningen $f'(x) = 0$ er $x = -1$ eller $x = 1$

b) For hvilken værdi af tallet k har grafen for g ingen vandrette tangenter

Funktionen g er givet ved $g(x) = x^3 + k \cdot x + 4$, $k \in \mathbb{R}$. Da g ikke må have vandrette tangenter skal jeg finde ud af hvornår $g'(x) = 0$. Jeg differentierer g ledvist:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + kx + 4) = 3x^2 + k$$

Nu løses ligningen $g'(x) = 0$:

$$g'(x) = 3x^2 + k = 0$$

$$3x^2 = -k$$

$$x^2 = -\frac{k}{3}$$

Da $x^2 \geq 0$ for alle x , har denne ligning ingen løsninger, hvis:

$$-\frac{k}{3} < 0$$

$$-k < 0$$

$$k > 0$$

Grafen for g har altså ingen vandrette tangenter, hvis $k > 0$.

Del 2: Opgaver med hjælpemidler

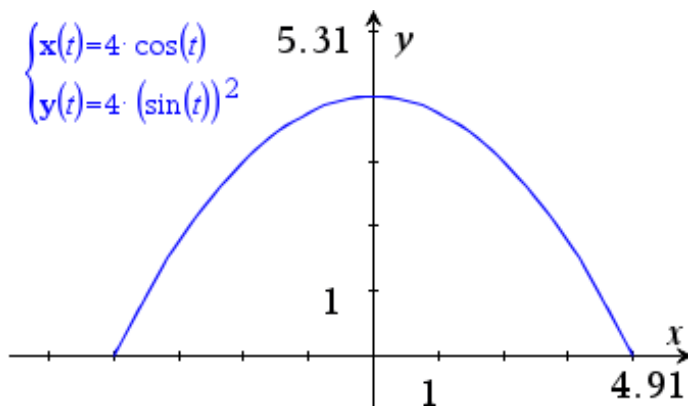
Opgave 9

En parameterkurve er givet ved stedfunktion

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot (\sin(t))^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}(t)$

Parameterkurven for $\vec{s}$ tegnes med TI-Nspire som vist.



b) Bestem hastighedsfunktionen $\vec{s}'(t)$

Hastighedsfunktionen bestemmes ved at differentiere koordinatvis i TI-Nspire (formel 185). Det bemærkes, at $y(t)$ er en sammensat funktion.

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} 4 \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot (\sin(t))^2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Udført}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{s}(t)) \rightarrow \begin{bmatrix} -4 \cdot \sin(t) \\ 8 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \end{bmatrix}$$

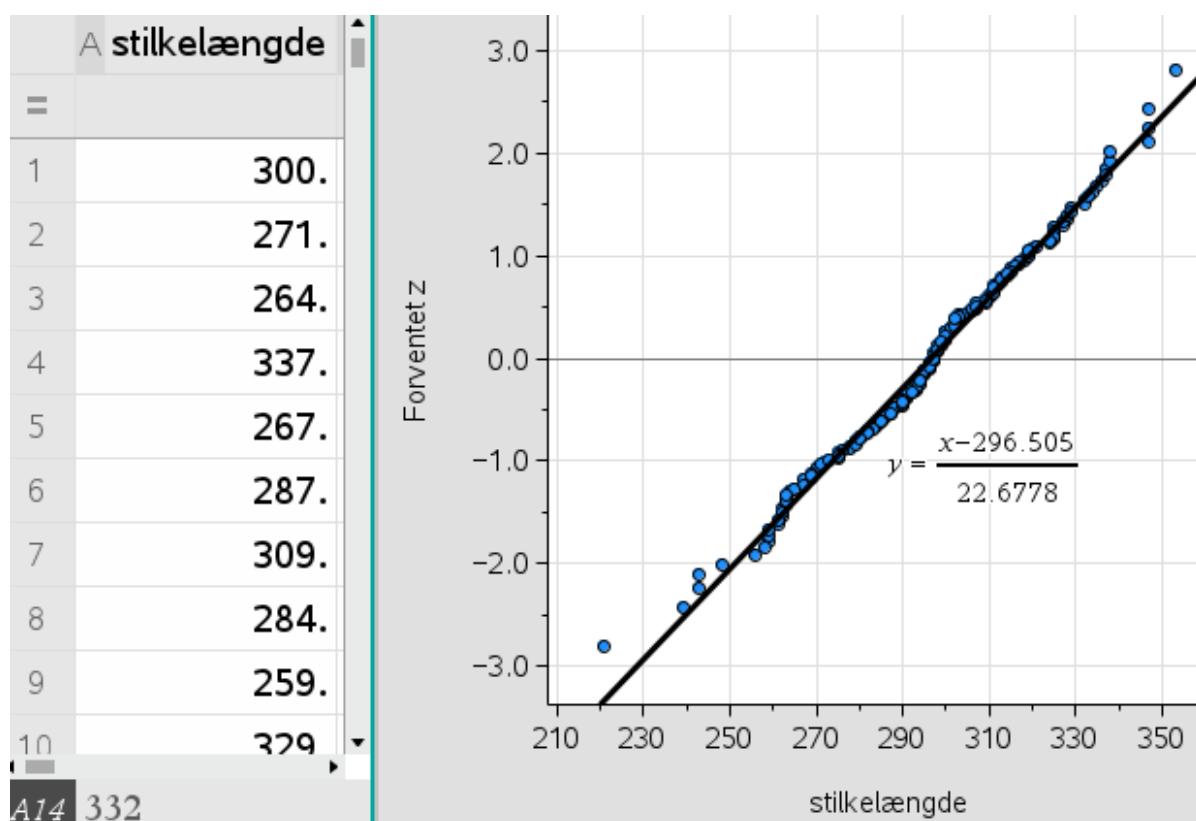
Dermed er hastighedsfunktionen $\vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin(t) \\ 8 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

Opgave 10

Et gartneri har tilfældigt udvalgt 200 fuldt udvoksede tulipaner af en bestemt art og målt deres stiklængde.

a) Gør rede for, at længden af tulipanernes stilke med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X

Data indsættes i Ti-Nspire og der laves et normalfordelingsplot (QQ-plot). (200 data punkter)



Da punkterne med god tilnærmelse følger linjen, kan tulipanernes stilke længde med god tilnærmelse beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X .

B) Bestem middelværdi og spredning for X

Fra normalfordelingsplottet aflæses middelværdien og spredningen, da $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ (formel 270)

Middelværdi: $\mu = 296,5$ mm og spredning $\sigma = 22,7$.

c) Bestem sandsynligheden for, at længden af stilkene er mellem 270 og 330 Mm.

For at bestemme sandsynligheden for at en tilfældig tulipan har længde mellem 270 og 330 mm for $X \sim N(296.5, 22.7)$, benyttes kommandoen *normCdf* i TI-Nspire.

`normCdf(270,330,296.5,22.7)` 0.808473

Således er $P(270 \leq X \leq 330) = 80,8\%$, dvs. sandsynligheden for, at stiklængden er mellem 270 og 330 mm, er ca. 81%

Opgave 11

En funktion f er givet ved $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x-2} - x + 2$

a) Bestem funktionens nulpunkter

For at bestemme funktionens nulpunkter løses ligningen $f(x) = 0$ med TI-Nspire

`f(x):=3*sqrt(x-2)-x+2` Udført
`solve(f(x)=0,x)` $x=2.$ or $x=11.$

Løsningen er: $x = 2$ eller $x = 11$. Dermed er det bestemt at f har nulpunkterne $(2,0)$ og $(11,0)$.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen

For at bestemme rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer ved at dreje området M i førstekvadrant, afgrænset af grafen for f og førsteaksen, bestemmes $V = \pi \cdot \int_2^{11} f(x)^2 dx$ (formel 172)

`f(x):=3*sqrt(x-2)-x+2` Udført
 `$\pi \cdot \int_2^{11} (f(x))^2 dx$` 76.3407

Rumfanget af omdrejningslegemet er $V = 76,3$.

Opgave 12

En ellipse i et koordinatsystem med centrum i $O(0,0)$ er model af en bordplade, som er 180 cm på den lange led og 105 cm på den korte led.

a) Bestem ellipsens ligning på normalform

Ligningen på normalform for en ellipse med centrum i $O(0,0)$ er $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (formel F(4)). Da *storaksen* $= 2a$, bestemmes den a (den halve storakse) ved: $a = \frac{\text{storaksen}}{2}$, og da *lilleaksen* $= 2b$, bestemmes den b (den halve lilleakse) ved: $b = \frac{\text{lilleaksen}}{2}$. Det oplyses at storaksen er 180 og lilleaksen er 150, derfor er $a = \frac{180}{2} = 90$ og $b = \frac{150}{2} = 52,5$

Ellipsens ligning på normalform er da: $\frac{x^2}{90^2} + \frac{y^2}{52,5^2} = 1$

b) Bestem koordinatsættet til hvert af ellipsens brændpunkter

Koordinatsættet for ellipsens brændpunkter er $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ og $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ (formel F(5))

$$F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = F_1(-\sqrt{90^2 - 52,5^2}, 0) = F_1(-73,1, 0)$$

$$F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = F_2(\sqrt{90^2 - 52,5^2}, 0) = F_2(73,1, 0).$$

Så ellipsens brændpunkter er $F_1(-73,1, 0)$ og $F_2(73,1, 0)$.

Opgave 13

I en model beskrives befolkningsudviklingen i Taiwan 1996-2019 ved differentialligningen $\frac{dP}{dt} = 0,003641 \cdot P \cdot (23,95 - P)$, hvor $P(t)$ er indbyggertal (målt i mio.) til tiden t (målt i antal år efter 1996). I 1996 var befolkningstallet 21,53 mio. indbyggere.

a) Bestem forskriften for P

Da differentialligningen $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$ har løsningen $y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aM \cdot x}}$ (formel 179) fås:

$$P(t) = \frac{23,95}{1 + c \cdot e^{-0,003641 \cdot 23,95 \cdot t}} = \frac{23,95}{1 + c \cdot e^{0,08723 \cdot t}}$$

I 1996 var befolkningstallet i Taiwan 21,53 mio. indbyggere, derfor er $P(0) = 21,53$. Punktet indsættes i standardløsningen og c bestemmes i TI-Nspire:

$$\text{solve}\left(\frac{23.95}{1+c \cdot e^{0.08723 \cdot 0}}=21.53, c\right) \rightarrow c=0.112401$$

Dermed fås løsningen:

$$P(t) = \frac{23,95}{1 + 0,1124 \cdot e^{0,08723 \cdot t}}$$

b) Bestem $P'(23)$, og forklar betydningen af dette tal

Differentialligningen løses, $P(t)$ defineres, $P'(t)$ bestemmes som $pm(t)$ og $P'(23)$ bestemmes med TI-Nspire:

$$\text{deSolve}(p'=0.003641 \cdot p \cdot (23.95-p) \text{ and } p(0)=21.53, t, p) \quad p = \frac{23.95 \cdot (1.09112)^t}{(1.09112)^t + 0.112401}$$

$$p(t) := \frac{23.95 \cdot (1.0911170085497)^t}{(1.0911170085497)^t + 0.11240130051092} \quad \text{Udført}$$

$$pm(t) := \frac{d}{dt}(p(t)) \quad \text{Udført}$$

$$pm(23) \quad 0.030656$$

Resultatet er: $P'(23) = 0,030656$. Tallet betyder at til tidspunktet $t = 23$, dvs. i år 2019 er væksthastigheden i Taiwans befolkningstal 30656 mennesker om år.

Opgave 14

I en model beskrives den hastighed $f(t)$ vandstanden i verdenshavene stiger med (målt i mm pr. år) til tidspunktet t målt i antal år efter 1991 ved $f(t) = 0,084 \cdot t + 2$.

a) Hvilken hastighed stiger vandstanden med i 2022 ifølge modellen?

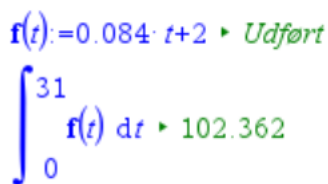
For at bestemme den hastighed verdenshavens vandstand stiger med i 2022 sættes $t = 2022 - 1991 = 31$ og $f(31)$ bestemmes:

$$f(31) = 0,084 \cdot 31 + 2 = 2,604 + 2 = 4,604$$

Ifølge modellen stiger verdenshavens vandstand i 2022 med hastigheden 4,6 mm pr. år.

b) Bestem $\int_0^{31} f(t) dt$, og forklar betydningen af dette tal.

Integralet bestemmes med TI-Nspire



$f(t) = 0.084 \cdot t + 2$ ▶ Udført
 $\int_0^{31} f(t) dt$ ▶ 102.362

Tallet fortæller at vandstanden i verdenshavene ifølge modellen ER ca. 102 mm i 2022.
