

PLANEN I RUMMET

Def. PLAN: En plan gennem pkt. P_0 med normalvektor $\vec{n}$ består af alle punkter P , som opfylder, at $\vec{P_0P}$ er vinkelret på $\vec{n}$ dvs. $\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

Planens ligning: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ og $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

ET pkt $P(x, y, z)$ ligger på planen når $\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$.

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Eksempel: plan α går gennem $P_0(2, 3, -1)$ og $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$4(x-2) - 3(y-3) + (z+1) = 0$$

$$4x - 8 - 3y + 9 + z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4x - 3y + z - 2 = 0$$

Øvelse: 9.5.1. - 9.5.4

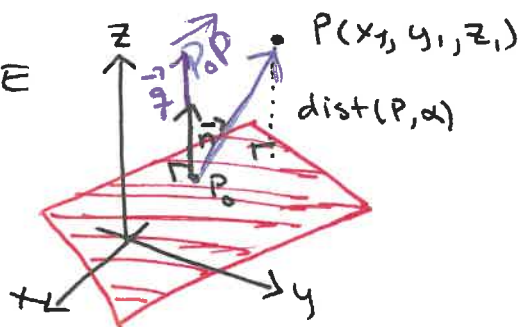
AFSTAND ML. PUNKT OG PLAN

Afstanden fra pkt. $P(x_1, y_1, z_1)$ til planen α med ligningen $ax + by + cz + d = 0$ er givet ved

$$\text{dist}(P, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

BEVIS:

① SKITSE



② Normal vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. og tilhørdigt pkt. $P_0(x_0, y_0, z_0)$

③ Koordinatformel i rummet giver: $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$

③ Betragt $\overrightarrow{P_0P}$'s projektion på $\vec{n}$ (kald $\vec{q}$)

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = \vec{q} \quad \text{Så} \quad \text{dist}(P, \alpha) = |\vec{q}|.$$

$$+ |\vec{q}| = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad \left(\text{Regnereg!} \right) \quad \left(|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} \right)$$

④ SKRIV UD.

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, \alpha) = |\vec{q}| &= \frac{|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0 + cz_1 - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \square \end{aligned}$$

længden

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$