 Aflevering II – Integralregning uden hjælpemidler KM

vejledende besvarelse

Opg 1 $f(x) = e^x + 6x - 9$

a) Bestem en stamfunktion til f.

$$F(x) = \int e^x + 6x - 9\,dx = \int e^x\,dx + \int 6x\,dx - \int 9\,dx$$

$$= e^x + 6\cdot\tfrac{1}{2}\cdot x^2 - 9x + k = e^x + 3x^2 - 9x + k$$

Så $F(x) = e^x + 3x^2 - 9x + k$.

Opg 2 Beregn integralet $\int_0^2 (3x^2 - 10x)\,dx$.

$$\int_0^2 (3x^2 - 10x)\,dx = \left[x^3 - 5x^2\right]_0^2 = (2^3 - 5\cdot 2^2) - (0^3 - 5\cdot 0^2) = \underline{\underline{-12}}$$

Opg 3 $f(x) = x^3 + 10x$

Bestem stamfunktion til f, hvis graf går gennem P(2,20)

Først bestemmes en stamfunktion F_1.

$$F_1(x) = \int x^3 + 10x\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 + 5x^2 + k.$$

Nu bestemmes k:

$$F_1(2) = \tfrac{1}{4}2^4 + 5\cdot 2^2 + k = 20 \iff$$

$$4 + 20 + k = 20 \iff k = 4$$

Så stamfunktion gennem P(2,20) er givet:

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + 5x^2 + 4.$$

2/4 $\boxed{\text{Opgave 4}}$ Bestem $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

Jeg benytter integration ved substitution metoden.

Sæt $t = x^2+1$. Så $\frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2x}\,dt = dx$.

Substitution af t og dt:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 2x \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2x}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt.$$

Integrer og substituere tilbage:

$$= \left[\ln|t|\right]_0^1 = \left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \ln|1^2+1| - \ln|0^2+1|$$

$$= \underline{\underline{\ln(2)}}$$

OBS $\ln(1)=0$.

$\boxed{\text{Opg 5}}$ f er stamfunktion til g hvis $f'(x)=g(x)$.

Jeg benytter produktregneregleen til at bestemme $f'(x)$.

$$f'(x) = 2\cdot\ln(x) + \frac{1}{x}\cdot(2x+1) = 2\cdot\ln(x) + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{1}{x} = 2\cdot\ln(x) + 2 + \frac{1}{x}$$

Da $f'(x) \neq g(x)$ er f ikke stamfunktion til $g(x)$.

3/4

OPG 6

$f(x) = -3x^2 + 12x - 9$

a) Løs ligning $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ $-3x^2 + 12x - 9 = 0$.

Dette er en 2.gradsligning, så vi kan benytte Løsningsformelen.

$a = -3$, $b = 12$ og $c = -9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 108}}{-6}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{36}}{-6}$$

$$= \frac{-12 \pm 6}{-6} \Leftrightarrow \quad x = 3 \lor x = 1$$

b) Bestem arealet af M. Det betyder at vi skal bestemme: (pga. Integralregnings Hovedsætning).

$$\int_1^3 -3x^2 + 12x - 9 \, dx = \left[-3 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - 9x \right]_1^3$$

$$= \left[-x^3 + 6x^2 - 9x \right]_1^3$$

$$= (-3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3) - (-1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1)$$

$$= -27 + 54 - 27 - (-1 + 6 - 9)$$

$$= \quad 0 - (-4) = \underline{\underline{4}}$$

SÅ AREALET ER $\underline{\underline{M = 4}}$

Opg 9

Fra definitionen af en Stamfunktion ved vi at

$F'(x) = f(x)$ når F er stamfunktion til $f(x)$.

Det vil sige, at vi skal bestemme hvilken funktion som er $F(x)$ og dens afledte funktion $f(x)=F'(x)$

Det ses at når B er negativ så er A aftagende, når B er positiv så er A voksende og når B skærer x-aksen har A lokalt max. eller min. Da følger af Monotonisætningen at B er A's afledte funktion.

Det vil sige at $B = F'(x) = f(x)$ og $A = F(x)$.