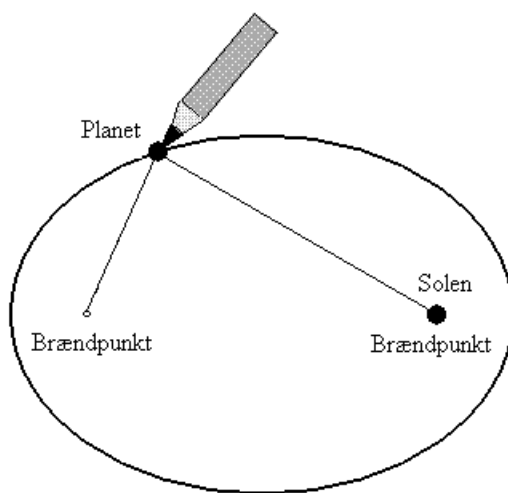


Keplers 1. lov

Planeterne baner er ellipser med solen i det ene brændpunkt.

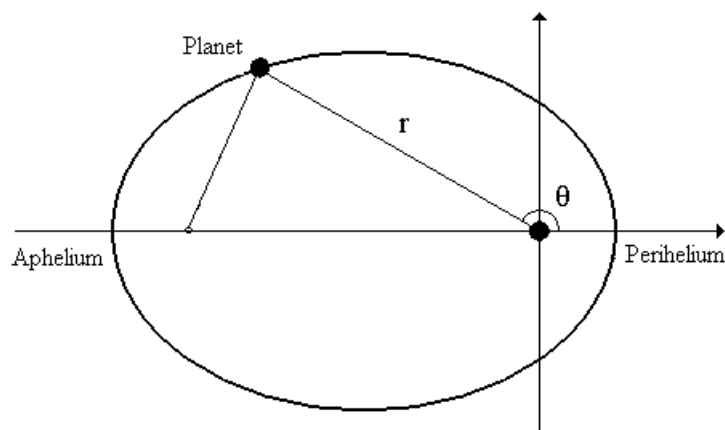
Ellipsen

En ellipse er en plan figur, der kan tegnes ved hjælp af en snor, hvis ender er fastgjort til to punkter. Afstanden mellem de to punkter skal være mindre end snorens længde. Ellipsen kan nu tegnes med en blyant, der hele tiden skal holde snoren strakt. De to punkter, hvor snoren er fastgjort, kaldes brændpunkter.



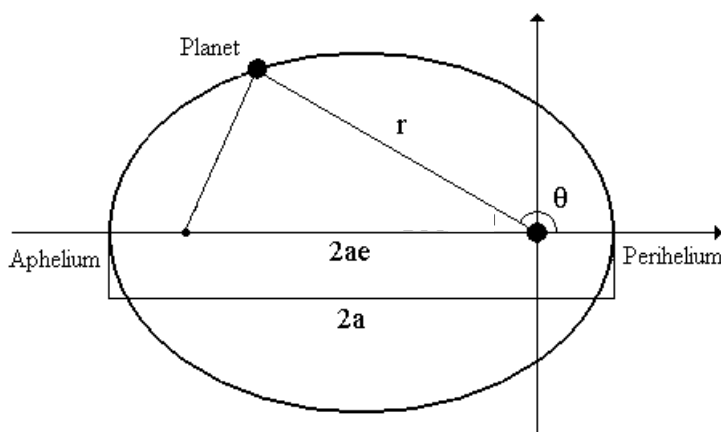
Ifølge Keplers 1. lov er solen placeret i det ene brændpunkt, og planetens bane er den tegnede ellipse. De to linjestykker fra brændpunkterne til planeten kaldes for brændstrålerne. Summen af de to brændstrålers længder er lig med snorens længde uanset hvor på ellipsen, planeten befinder sig.

For at kunne beskrive ellipsen matematisk anbringes den i et koordinatsystem, sådan at brændpunkterne ligger på x-aksen, og solen er i punktet $(0,0)$.



Afstanden fra solen til planeten kaldes r , og vinklen fra x-aksen til brændstrålen mellem sol og planet kaldes θ . Ellipsens skæringspunkter med x-aksen kaldes perihelium og aphelium. I perihelium er planeten tættest ved solen, i aphelium længst fra solen.

Ved ellipsens storeakse forstås stykket fra aphelium til perihelium. Længden af den halve storeakse kaldes a , længden af hele storeaksen er derfor $2a$. Når planeten er i perihelium, vil brændstrålerne ligge på x-aksen. Den enes længde er da afstanden fra sol til perihelium. Den andens længde er afstanden mellem brændpunkterne plus afstanden fra solen til perihelium. Da afstanden fra solen til perihelium af symmetri Grunde er den samme som afstanden fra det tomme brændpunkt til aphelium, ses det, at summen af brændstrålerne er $2a$. Som tidligere nævnt er brændstrålernes samlede længde uafhængig af hvor på ellipsen, planeten befinder sig, så summen af brændstrålerne er åbenbart altid lig med $2a$.



Excentriciteten, e , er et tal i intervallet $[0;1[$ sådan at afstanden mellem brændpunkterne er $2ae$. Med andre ord er excentriciteten det tal, man skal gange storeaksen med for at finde afstanden mellem brændpunkterne. Excentriciteten er et mål for, hvor fladtrykt ellipsen er. Hvis excentriciteten er 0, er de to brændpunkter sammenfaldende, og ellipsen er en cirkel med radius a og solen i centrum.

Ud over at planetens bane er en ellipse, fortæller Keplers 1. lov ikke noget om, hvordan bevægelsen foregår. Den siger ikke noget om, hvordan hastigheden varierer eller hvilken kraft, der styrer bevægelsen.

Øvelse 1

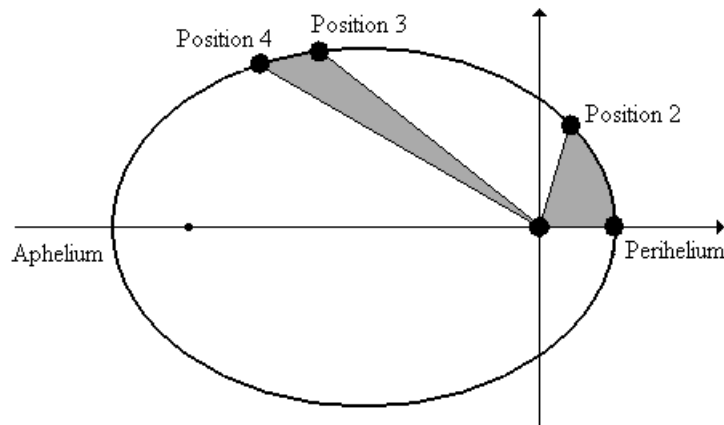
Bevis ved hjælp af figuren at afstanden fra solen til perihelium er $a \cdot (1 - e)$ og at afstanden fra solen til aphelium er $a \cdot (1 + e)$.

For jordens bane omkring solen har vi $a = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ og $e = 0,01671$.

- Hvad er jordens afstand fra solen ved perihelium?
- Hvad er jordens afstand fra solen ved aphelium?
- Beregn forskellen på de to afstande.

Keplers 2. lov

For alle planeter gælder, at sigtelinjen mellem solen og planeten overstryger lige store arealer i lige store tider.



Det betyder, at hvis planeten bruger samme tid på at komme fra perihelium til position 2, som den bruger på at komme fra position 3 til position 4, vil de skraverede arealer være lige store. Mere præcist vil antallet af kvadratmeter, som sigtelinjen mellem sol og planet overstryger pr. sekund, være det samme lige meget hvor, planeten befinder sig i sin bane. Man udtrykker det ved at sige, at arealhastigheden er konstant. Keplers 2. lov kaldes også for "arealloven" eller "loven om arealhastighedens konstans".

Keplers 2. lov indeholder (til forskel fra den første) information om, hvordan planeten bevæger sig. For eksempel er det tydeligt, at planeten må bevæge sig hurtigst i perihelium og langsomst i aphelium. Keplers ambition var at finde planetens afstand, r , og vinklen θ som funktioner af tiden. Det viste sig at være umuligt. Kepler nåede frem til en ligning, som ikke kan løses eksakt. Med nutidens regnekraft er det dog ikke noget beregningsmæssigt problem.

Den konstante arealhastighed for en planet kan beregnes som ellipsens areal divideret med planetens omløbstid. Man kan vise, at ellipsens areal er $\pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}$, så derfor får vi:

$$\text{Arealhastighed} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}}{T}$$

Øvelse 2

Beregn arealhastigheden for jorden.

Keplers 3. lov

For alle planeter gælder der, at forholdet mellem tredje potens af ellipsens halve storeakse og omløbstidens kvadrat er det samme.

Udtrykt som formel ser Keplers tredje lov således ud:

$$\frac{a^3}{T^2} = k$$

hvor k er en konstant, som ikke afhænger af planeten.

Når man regner på solsystemet er det ofte praktisk at angive afstande i den såkaldte astronomiske enhed AU (det står for Astronomical Unit). Længden af en astronomisk enhed er defineret som a for jordens bane om solen. På den måde er 1 AU lig med jordens gennemsnitsafstand fra solen.

Tilsvarende er det praktisk at angive omløbstider målt i år. Definitionen på 1 år er jordens omløbstid om solen.

Hvis vi indsætter $a = 1$ AU og $T = 1$ år i Keplers 3. lov, får vi:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{(1 \text{ AU})^3}{(1 \text{ år})^2} = \frac{1^3 \text{ AU}^3}{1^2 \text{ yr}^2} = 1 \frac{\text{AU}^3}{\text{yr}^2}$$

Det vil sige, at konstanten i Keplers 3. lov er $k = 1 \frac{\text{AU}^3}{\text{yr}^2}$.

Hvis man ganger med T^2 på begge sider i Keplers 3. lov, kommer den til at se sådan ud:

$$a^3 = k \cdot T^2$$

Matematisk kan vi udtrykke det ved at sige, at a^3 er proportional med T^2 .

Øvelse 3

Omløbstiden for planeten Mars er $T = 1,88$ år.

a) Beregn længden af den halve storeakse for Marsbanen.

I Jupiters bane om solen er længden af den halve storeakse $a = 5,21$ AU.

b) Beregn Jupiters omløbstid.