3.1 Grænseværdier og kontinuerte funktioner

2x MA

Issa Hassan Mohamud

04/09/2025

Dagens program

Grænseværdi

Eksempel 1: Hvad er en grænseværdi?

Eksempel 2: Grænseværdier eksisterer ikke altid

Definition 1: Grænseværdi

Kontinuitet

Definition: Kontinuitet i x_0

Interaktivitet - Grænseværdi og kontinuitet

Kontinuerte funktioner

Grænseværdi — intuition

Vi undersøger, hvad der sker med $f(x)$, når x nærmer sig en værdi x_0.

Grænseværdi — intuition

Vi undersøger, hvad der sker med $f(x)$, når x nærmer sig en værdi x_0.

Idé

En grænseværdi beskriver, hvad $f(x)$ nærmer sig, når $x \to x_0$, uanset om x kommer fra venstre eller højre.

Eksempel 1: Funktion og observation

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x - 2}, \qquad x \neq 2$$

Eksempel 1: Funktion og observation

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x - 2}, \qquad x \neq 2$$

Både tæller og nævner går mod 0 for $x \to 2$, så vi kan ikke konkludere direkte.

Eksempel 1: Funktion og observation

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x - 2}, \qquad x \neq 2$$

Både tæller og nævner går mod 0 for $x \to 2$, så vi kan ikke konkludere direkte.

Observation

Vi kigger på funktionsværdier for x tæt på 2.

Eksempel 1: Nærmer $f(x)$ sig 12?

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	11,7	11,97	11,997	12,003	12,03	12,3

Eksempel 1: Nærmer $f(x)$ sig 12?

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	11,7	11,97	11,997	12,003	12,03	12,3

Konklusion ud fra tal

$f(x)$ ser ud til at nærme sig 12 fra både venstre og højre.

Eksempel 1: Algebraisk omskrivning (trinvis)

$$\frac{3x^2 - 12}{x - 2}$$

Bemærk: Efter omskrivning fremkommer en differens af to kvadrater, så vi anvender den tredje kvadratsætning $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Eksempel 1: Algebraisk omskrivning (trinvis)

$$\frac{3x^2 - 12}{x - 2} = \frac{3(x^2 - 4)}{x - 2}$$

Bemærk: Efter omskrivning fremkommer en differens af to kvadrater, så vi anvender den tredje kvadratsætning $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Eksempel 1: Algebraisk omskrivning (trinvis)

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-12}{x-2} &= \frac{3(x^2-4)}{x-2} \\ &= \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2}\end{aligned}$$

Bemærk: Efter omskrivning fremkommer en differens af to kvadrater, så vi anvender den tredje kvadratsætning $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Eksempel 1: Algebraisk omskrivning (trinvis)

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-12}{x-2} &= \frac{3(x^2-4)}{x-2} \\ &= \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= 3(x+2) = 3x+6\end{aligned}$$

Bemærk: Efter omskrivning fremkommer en differens af to kvadrater, så vi anvender den tredje kvadratsætning $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Eksempel 1: Algebraisk omskrivning (trinvis)

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-12}{x-2} &= \frac{3(x^2-4)}{x-2}\\ &= \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2}\\ &= 3(x+2) = 3x+6\end{aligned}$$

Bemærk: Efter omskrivning fremkommer en differens af to kvadrater, så vi anvender den tredje kvadratsætning $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Når x er tæt på 2, er $3x+6$ tæt på 12.

Eksempel 1: Algebraisk omskrivning (trinvis)

$$
\begin{aligned}
\frac{3x^2-12}{x-2} &= \frac{3(x^2-4)}{x-2} \\
&= \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} \\
&= 3(x+2) = 3x+6
\end{aligned}
$$

Bemærk: Efter omskrivning fremkommer en differens af to kvadrater, så vi anvender den tredje kvadratsætning $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Når x er tæt på 2, er $3x+6$ tæt på 12.

$$\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = 12}$$

Forskellige grænser fra siderne

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ -x + 4, & x > 1 \end{cases}$$

Bemærk: Vi har en stykvist defineret funktion, som ikke er defineret i $x = 1$. Funktionen er derfor sammenhængende på $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hvilken forskrift der gælder, afhænger af, om vi betragter $x < 1$ (venstre side) eller $x > 1$ (højre side).

Forskellige grænser fra siderne

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ -x + 4, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2$$

Bemærk: Vi har en stykvist defineret funktion, som ikke er defineret i $x = 1$. Funktionen er derfor sammenhængende på $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hvilken forskrift der gælder, afhænger af, om vi betragter $x < 1$ (venstre side) eller $x > 1$ (højre side).

Forskellige grænser fra siderne

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ -x + 4, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -1 + 4 = 3$$

Bemærk: Vi har en stykvist defineret funktion, som ikke er defineret i $x = 1$. Funktionen er derfor sammenhængende på $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hvilken forskrift der gælder, afhænger af, om vi betragter $x < 1$ (venstre side) eller $x > 1$ (højre side).

Forskellige grænser fra siderne

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ -x + 4, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -1 + 4 = 3$$

Da $2 \neq 3$, eksisterer $\lim_{x \to 1} f(x)$ ikke.

Bemærk: Vi har en stykvist defineret funktion, som ikke er defineret i $x = 1$. Funktionen er derfor sammenhængende på $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hvilken forskrift der gælder, afhænger af, om vi betragter $x < 1$ (venstre side) eller $x > 1$ (højre side).

Mod uendelig (ikke en talværdi)

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x \neq 0$$

Jo tættere x kommer på 0 (fra begge sider), desto større bliver $g(x)$, den vokser uden (øvre) grænse. Derfor findes der ingen endelig grænseværdi i $x = 0$.

Mod uendelig (ikke en talværdi)

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$$

Jo tættere x kommer på 0 (fra begge sider), desto større bliver $g(x)$, den vokser uden (øvre) grænse. Derfor findes der ingen endelig grænseværdi i $x = 0$.

Mod uendelig (ikke en talværdi)

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$$

Jo tættere x kommer på 0 (fra begge sider), desto større bliver $g(x)$, den vokser uden (øvre) grænse. Derfor findes der ingen endelig grænseværdi i $x = 0$.

Bemærk

∞ er ikke et tal og kan derfor ikke være en (endelig) grænseværdi.

Definition 1: Grænseværdi

Definition

f siges at have grænseværdi a for $x \to x_0$, hvis $f(x)$ kan komme så tæt på a som ønsket, blot x vælges tilstrækkeligt tæt på x_0.

$$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_0 \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$$

Kontinuitet intuitivt

En funktion er **kontinuert** i x_0, hvis dens graf er sammenhængende i punktet og funktionsværdien passer med grænseværdien.

Krav for kontinuitet i x_0

1. f har en grænseværdi for $x \to x_0$.

Kontinuitet intuitivt

En funktion er **kontinuert** i x_0, hvis dens graf er sammenhængende i punktet og funktionsværdien passer med grænseværdien.

Krav for kontinuitet i x_0

1. f har en grænseværdi for $x \to x_0$.
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Formel definition af kontinuitet i x_0

$$\boxed{f \text{ er kontinuert i } x_0 \text{ hvis og kun hvis } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

Formel definition af kontinuitet i x_0

$$\boxed{f \text{ er kontinuert i } x_0 \text{ hvis og kun hvis } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

Konsekvenser / eksempler

- Polynomier er kontinuerte overalt.

Formel definition af kontinuitet i x_0

$$\boxed{f \text{ er kontinuert i } x_0 \text{ hvis og kun hvis } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

Konsekvenser / eksempler

- Polynomier er kontinuerte overalt.
- Brøkfunktioner (rationaler) er kontinuerte, hvor nævneren $\neq 0$.

Formel definition af kontinuitet i x_0

$$\boxed{f \text{ er kontinuert i } x_0 \text{ hvis og kun hvis } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

Konsekvenser / eksempler

- Polynomier er kontinuerte overalt.
- Brøkfunktioner (rationaler) er kontinuerte, hvor nævneren $\neq 0$.
- Stykvist definerede funktioner kan gøres kontinuerte ved at matche grænserne fra siderne og funktionsværdi.

Hurtig check

Spørgsmål A: Har $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ en grænseværdi for $x \to 3$?

A) Ja

B) Nej

Spørgsmål B: Er f kontinuert i $x = 3$?

Hurtig check

Spørgsmål A: Har $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ en grænseværdi for $x \to 3$?

Svar A

Ja. $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ for $x \neq 3 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 3} f(x) = 6.$

Spørgsmål B: Er f kontinuert i $x = 3$?

Hurtig check

Spørgsmål A: Har $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ en grænseværdi for $x \to 3$?

Svar A

Ja. $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ for $x \neq 3 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 3} f(x) = 6$.

Spørgsmål B: Er f kontinuert i $x = 3$?

A) Ja

B) Nej

Hurtig check

Spørgsmål A: Har $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ en grænseværdi for $x \to 3$?

Svar A

Ja. $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ for $x \neq 3 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 3} f(x) = 6$.

Spørgsmål B: Er f kontinuert i $x = 3$?

Svar B

Nej, ikke som defineret ovenfor (da $f(3)$ er ikke-eksisterende). Sætter man $f(3) = 6$, bliver den kontinuert.

Flere eksempler på kontinuitet

- $\sin x, \cos x, e^x, \ln x$ er kontinuerte på deres naturlige definitionsmængder.

Flere eksempler på kontinuitet

- $\sin x, \cos x, e^x, \ln x$ er kontinuerte på deres naturlige definitionsmængder.
- Sum, produkt og sammensætning af kontinuerte funktioner er kontinuert (hvor defineret).

Flere eksempler på kontinuitet

- $\sin x, \cos x, e^x, \ln x$ er kontinuerte på deres naturlige definitionsmængder.
- Sum, produkt og sammensætning af kontinuerte funktioner er kontinuert (hvor defineret).
- $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ med polynomier p, q er kontinuert dér, hvor $q(x) \neq 0$.

Flere eksempler på kontinuitet

- $\sin x, \cos x, e^x, \ln x$ er kontinuerte på deres naturlige definitionsmængder.
- Sum, produkt og sammensætning af kontinuerte funktioner er kontinuert (hvor defineret).
- $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ med polynomier p, q er kontinuert dér, hvor $q(x) \neq 0$.
- **Springdiskontinuitet** En stykvis defineret funktion er diskontinuert i x_0, hvis de ensidige grænseværdier er forskellige:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Kilder

- For yderligere læsning henvises til (kap. 3.1) *Grænseværdier og kontinuerte funktioner*. (plus A2 stx 2017).