2.Differentialligninger

2x MA

Issa Hassan Mohamud

09/09/2025

NØRREBRO GYMNASIUM

Dagens program

Motivation

Differentialligningen $y' = 2x$

Differentialligningen $y' = 2y$

Differentialligninger generelt

Notation

Tangentligninger

Linjeelementer og hældningsfelter

Løsningskurven

Ligning vs. differentialligning

Almindelig ligning: Vi løser en ligning ved at finde de tal, som gør ligningen sand, når de sættes ind på den ubekendtes plads.

Fx: $x + 2 = 5$. Sætter vi $x = 3$, så passer det.

Ligning vs. differentialligning

Almindelig ligning: Vi løser en ligning ved at finde de tal, som gør ligningen sand, når de sættes ind på den ubekendtes plads.

Fx: $x + 2 = 5$. Sætter vi $x = 3$, så passer det.

Differentialligning: Her er den ubekendte en *funktion*, og ligningen bruger én eller flere af dens *afledte*.

Når vi løser den, finder vi alle de funktioner, der får ligningen til at passe for alle relevante x-værdier.

Ligning vs. differentialligning

Almindelig ligning: Vi løser en ligning ved at finde de tal, som gør ligningen sand, når de sættes ind på den ubekendtes plads.

Fx: $x + 2 = 5$. Sætter vi $x = 3$, så passer det.

Differentialligning: Her er den ubekendte en *funktion*, og ligningen bruger én eller flere af dens *afledte*.

Når vi løser den, finder vi alle de funktioner, der får ligningen til at passe for alle relevante x-værdier.

Kort sagt: Almindelige ligninger handler om tal. Differentialligninger handler om funktioner.

Eksempel: $y' = 2x$

Her opfattes y som en funktion af x, og y' er den første afledte af y mht. x.

Spørgsmål: Hvad kan y være, hvis dens afledte skal være $2x$?

Eksempel: $y' = 2x$

Her opfattes y som en funktion af x, og y' er den første afledte af y mht. x.

Spørgsmål: Hvad kan y være, hvis dens afledte skal være $2x$?

Den fuldstændig løsning:

$$y = \int 2x \, dx = x^2 + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Tjek: $\frac{d}{dx}(x^2 + k) = 2x$.

Eksempel: $y' = 2x$

Her opfattes y som en funktion af x, og y' er den første afledte af y mht. x.

Spørgsmål: Hvad kan y være, hvis dens afledte skal være $2x$?

Den fuldstændig løsning:

$$y = \int 2x\,dx = x^2 + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Tjek: $\frac{d}{dx}(x^2 + k) = 2x$. Bemærk: Alle funktioner af formen $y = x^2 + k$, hvor k er en konstant, løser $y' = 2x$. Det kaldes den fuldstændige løsning.

Begyndelsesbetingelse til $y' = 2x$

Vi vil have, at grafen (løsningskurven) går gennem punktet $(2, 3)$. Det betyder, at $f(2) = 3$.

Begyndelsesbetingelse til $y' = 2x$

Vi vil have, at grafen (løsningskurven) går gennem punktet $(2, 3)$. Det betyder, at $f(2) = 3$. Vi ved i forvejen, at løsningerne har formen $y = x^2 + k$.

$$y(2) = 4 + k = 3 \quad \Rightarrow \quad k = -1.$$

$$\boxed{y = x^2 - 1}$$

Dette er en **partikulær løsning** (er en bestemt løsning blandt alle $y = x^2 + k$).

Eksempel: $y' = 2y$

Hvordan går vi videre?
Vi har nu et eksempel, hvor differentialligningen er givet med en ukendt funktion. Vi kan ikke bare integrere som før.

Eksempel: $y' = 2y$

Hvordan går vi videre?
Vi har nu et eksempel, hvor differentialligningen er givet med en ukendt funktion. Vi kan ikke bare integrere som før. I stedet gætter vi på en mulig form for y og tjekker

ved indsættelse, om venstre og højre side passer sammen.

Eksempel: $y' = 2y$

Hvordan går vi videre?
Vi har nu et eksempel, hvor differentialligningen er givet med en ukendt funktion. Vi kan ikke bare integrere som før. I stedet gætter vi på en mulig form for y og tjekker

ved indsættelse, om venstre og højre side passer sammen. Vi leder nu efter funktioner,

hvis afledte er det dobbelte af funktionen selv.

Afprøvning (indsæt og tjek):

Funktion	Venstre: y'	Højre: $2y$	Passer det?
$y = x^3$	$3x^2$	$2x^3$	Nej
$y = e^x$	e^x	$2e^x$	Nej (tæt på)
$y = e^{2x}$	$2e^{2x}$	$2e^{2x}$	Ja

Konklusion: $y = e^{2x}$ er en *partikulær* løsning.

Orden og eksempler

En differentialligning kan indeholde $y', y'', y''', \ldots$.
Orden = højeste forekommende afledte.

$$
\begin{aligned}
y' &= 5x \cdot y & &\text{(1. orden)} \\
3y'' - \sqrt{x}\, y' &= x^2 & &\text{(2. orden)} \\
y''' \cdot y' &= y - \ln x & &\text{(3. orden)}
\end{aligned}
$$

Vi arbejder kun med differentialligninger af 1. orden.

Definition og egenskaber

Definition 1 (differentialligning)

En differentialligning er en ligning, der indeholder én eller flere af de afledte $y', y'', y''', \ldots$, hvor y er en funktion af x.

Definition og egenskaber

Definition 1 (differentialligning)

En differentialligning er en ligning, der indeholder én eller flere af de afledte $y', y'', y''', \ldots,$ hvor y er en funktion af x.

- En **løsning** er en funktion, der opfylder ligningen og dens graf kaldes en **løsningskurve**.

Definition og egenskaber

Definition 1 (differentialligning)

En differentialligning er en ligning, der indeholder én eller flere af de afledte $y', y'', y''', \ldots$, hvor y er en funktion af x.

- En **løsning** er en funktion, der opfylder ligningen og dens graf kaldes en **løsningskurve**.
- **Definitionsmængden** for en løsning skal være et *interval*.

Definition og egenskaber

Definition 1 (differentialligning)

En differentialligning er en ligning, der indeholder én eller flere af de afledte $y', y'', y''', \ldots$, hvor y er en funktion af x.

- En **løsning** er en funktion, der opfylder ligningen og dens graf kaldes en **løsningskurve**.
- **Definitionsmængden** for en løsning skal være et *interval*.
- En **partikulær løsning** er en bestemt løsning, og den **fuldstændige løsning** beskriver alle løsninger.

Definition og egenskaber

Definition 1 (differentialligning)

En differentialligning er en ligning, der indeholder én eller flere af de afledte $y', y'', y''', \ldots$, hvor y er en funktion af x.

- En **løsning** er en funktion, der opfylder ligningen og dens graf kaldes en **løsningskurve**.
- **Definitionsmængden** for en løsning skal være et *interval*.
- En **partikulær løsning** er en bestemt løsning, og den **fuldstændige løsning** beskriver alle løsninger.
- Løsninger er differentiable $\Rightarrow$ kontinuerte $\Rightarrow$ løsningskurver er sammenhængende uden "huller" eller "spring".

Notation

Følgende skrivemåder er ens:

$$y' = 2y, \qquad \frac{dy}{dx} = 2y, \qquad f'(x) = 2f(x).$$

Notation

Følgende skrivemåder er ens:

$$y' = 2y, \qquad \frac{dy}{dx} = 2y, \qquad f'(x) = 2f(x).$$

Vi bruger y' (eller $\frac{dy}{dx}$) efter behov.

Tangentligninger

For en 1. ordens differentialligning kan vi bestemme tangentens ligning til en løsningskurve uden at løse differentialligningen, fordi hældningen kommer fra y'.

Tangentligninger

For en 1. ordens differentialligning kan vi bestemme tangentens ligning til en løsningskurve uden at løse differentialligningen, fordi hældningen kommer fra y'.
Tangentformel: $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$

Eksempel: tangent til $y' = \frac{x}{y}$ gennem $(8, 4)$

Vi kender punktet $(x_0, y_0) = (8, 4)$.

Eksempel: tangent til $y' = \frac{x}{y}$ gennem $(8, 4)$

Vi kender punktet $(x_0, y_0) = (8, 4)$. Hældningen fås ved at indsætte i differentialligningen:

$$y' = \frac{8}{4} = 2.$$

Eksempel: tangent til $y' = \frac{x}{y}$ gennem $(8, 4)$

Vi kender punktet $(x_0, y_0) = (8, 4)$. Hældningen fås ved at indsætte i differentialligningen:

$$y' = \frac{8}{4} = 2.$$

Brug tangentligningen:

$$y = 2(x - 8) + 4 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 12.$$

Eksempel: tangent til $y' = \frac{x}{y}$ gennem $(8, 4)$

Vi kender punktet $(x_0, y_0) = (8, 4)$. Hældningen fås ved at indsætte i differentialligningen:

$$y' = \frac{8}{4} = 2.$$

Brug tangentligningen:

$$y = 2(x - 8) + 4 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 12.$$

Tjek: Tangenten har hældning 2 i $x = 8$ og går gennem $(8, 4)$.

Linjeelementer

Definition: Grafen for en løsning $f(x)$ siges at gå gennem linjeelementet (x_0, y_0, a), hvis

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{og} \quad f'(x_0) = a.$$

Linjeelementet tegnes ved i punktet (x_0, y_0) at tegne et linjestykke med hældning a.

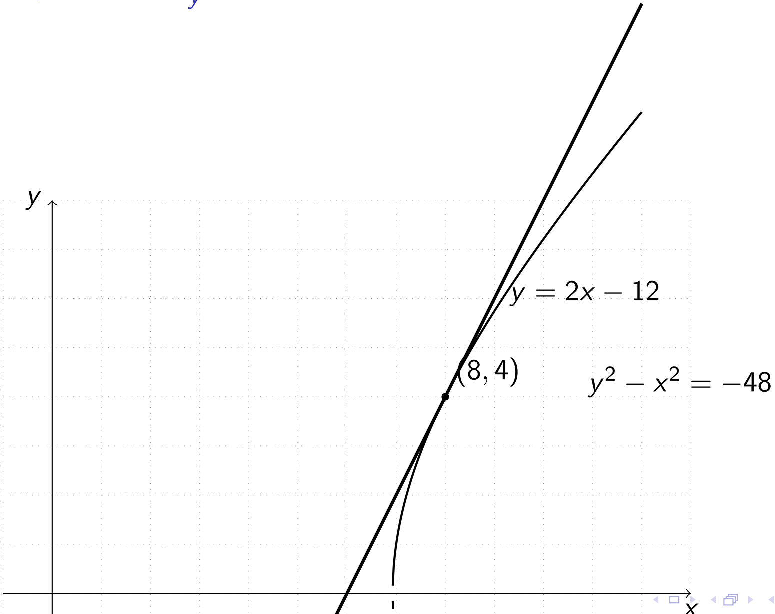
Eksempel: For $y' = \dfrac{x}{y}$ og punktet $(8, 4)$ er hældningen $a = 2$. Løsningskurven går derfor gennem linjeelementet $(8, 4, 2)$.

Hældningsfelt

Et hældningsfelt opstår ved at tegne mange linjeelementer i planen. Det giver et visuelt indtryk af, hvordan løsningskurverne ser ud, også selv om vi ikke har fundet en formel løsning.

Idé: Vælg flere punkter (x_0, y_0), beregn $a = y' = \dfrac{x_0}{y_0}$, og tegn små linjestykker med denne hældning i de valgte punkter.

Tangent i $(8,4)$ til $y' = \frac{x}{y}$



Kilder

- Plus A3 stx (kapitel om differentialligninger).