

2. Differentialligninger

2x MA

Issa Hassan Mohamud

09/09/2025



**NØRREBRO
GYMNASIUM**

Dagens program 2

Differentialligningen af typen $y' = ky$

Differentialligningen af typen $y' = b + ay$

Tjek: Er $f(x)$ en løsning?

Eksempel



Fuldstændig løsning til $y' = ky$

For enhver konstant $k \in \mathbb{R}$ er den **fuldstændige løsning** til differentialligningen

$$y' = ky$$

givet ved

$$y = c e^{kx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$



Eksempel: $y' = 3y$

Den **fuldstændige løsning** til denne differentialligning er givet ved

$$y = c e^{3x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål: Hvad er den **partikulære løsning** i punktet $(x_0, y_0) = (0, 3)$?



Eksempel: $y' = 3y$

Den **fuldstændige løsning** til denne differentialligning er givet ved

$$y = c e^{3x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål: Hvad er den **partikulære løsning** i punktet $(x_0, y_0) = (0, 3)$?

Vi bestemmer først den løsning, $f(x)$, hvis graf går gennem $(0,3)$:

$$f(0) = 3 \iff c e^{3 \cdot 0} = 3 \iff c = 3.$$



Eksempel: $y' = 3y$

Den **fuldstændige løsning** til denne differentialligning er givet ved

$$y = c e^{3x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål: Hvad er den **partikulære løsning** i punktet $(x_0, y_0) = (0, 3)$?

Vi bestemmer først den løsning, $f(x)$, hvis graf går gennem $(0,3)$:

$$f(0) = 3 \iff c e^{3 \cdot 0} = 3 \iff c = 3.$$

Dvs.

$$y = 3 \cdot e^{3x}.$$



Fuldsændig løsning af typen $y' = b - ay$

For ethvert par af konstanter $a \neq 0$ og b er den **fuldstændige løsning**

$$y(x) = \frac{b}{a} + c e^{-ax}, \quad c \in \mathbb{R}.$$



Eksempel: $y' = -9 - \frac{1}{3}y$

Den **fuldstændige løsning** til denne differentialligning er

$$y = \frac{-9}{-\frac{1}{3}} + c e^{\frac{1}{3}x} = 27 + c e^{\frac{x}{3}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål: Hvad er den **partikulære løsning** i punktet $(x_0, y_0) = (0, 4)$?



Eksempel: $y' = -9 - \frac{1}{3}y$

Den **fuldstændige løsning** til denne differentialligning er

$$y = \frac{-9}{-\frac{1}{3}} + c e^{\frac{1}{3}x} = 27 + c e^{\frac{x}{3}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål: Hvad er den **partikulære løsning** i punktet $(x_0, y_0) = (0, 4)$?

Vi bestemmer først den løsning, $f(x)$, hvis graf går gennem $(0, 4)$:

$$4 = 27 + c e^0 \iff c = -23$$



Eksempel: $y' = -9 - \frac{1}{3}y$

Den **fuldstændige løsning** til denne differentialligning er

$$y = \frac{-9}{-\frac{1}{3}} + c e^{\frac{1}{3}x} = 27 + c e^{\frac{x}{3}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål: Hvad er den **partikulære løsning** i punktet $(x_0, y_0) = (0, 4)$?

Vi bestemmer først den løsning, $f(x)$, hvis graf går gennem $(0, 4)$:

$$4 = 27 + c e^0 \iff c = -23$$

Dvs.

$$y = 27 - 23 e^{\frac{x}{3}}.$$



Er $f(x)$ løsning til differentialligningen?

1. Differentier $f(x)$, dvs. find $f'(x)$.
2. Indsæt $y = f(x)$ i differentialligningen.
3. Udregn/omskriv udtrykket og se, om det bliver lig $f'(x)$.



Eksempel

Vi har differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' = y^2$$

Spørgsmål: Er $y = f(x) = \frac{1}{3-x}$ en løsning?

1. Vi differentierer:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{(3-x)^2}.$$

2. Vi beregner y^2 :

$$y^2 = (f(x))^2 = \left(\frac{1}{3-x}\right)^2 = \frac{1}{(3-x)^2}.$$

Dermed gælder $y' = y^2$. Altså er $y = \frac{1}{3-x}$ en løsning.

