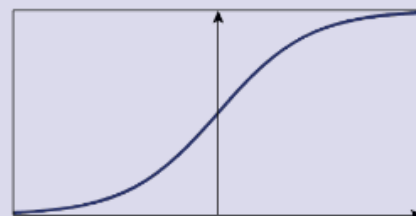


1. Den logistiske vækstmodel – 2 gange glemt – 2 gange genopdaget

Det lange 19. århundrede fra den franske revolution 1789 til 1. Verdenskrig 1914-18 var de europæiske nationalstaters århundrede. I land efter land erstattes enevælde og adelsvælde af nye styreformer, hvor først borgerskabet og siden almindelige bønder og arbejdere rykker ind på den politiske scene og tager ansvar for nationens udvikling. De skriver liberale forfatninger, men hvordan skal man regere et land, udskrive skatter og udarbejde finanslove, træffe beslutninger om værnepligt, om undervisning og sociale spørgsmål, hvis man ikke har sikker viden om det samfund, man nu er sat til at regere?

Derfor ser vi nation efter nation oprette statistiske bureauer og selskaber med det formål at indsamle og bearbejde alskens talmateriale, der kan belyse nationens tilstand.

I C-bogens kapitel 2 fortalte vi om Florence Nightingale og oprettelsen af *General Register Office* i 1836 i England. I Belgien inddrages den unge matematiker og statistiker Pierre-Francois Verhulst (1804-1849) i et tilsvarende arbejde med at opbygge en statistisk videnskab i den nye nation, og han udvikler her en helt ny matematisk vækstmodel til beskrivelse af et befolkningstals fremtidige udvikling. Denne *logistiske vækstmodel* er i vor tid blevet en af de mest anvendte matematiske modeller overhovedet. Men det stod nu ikke skrevet over dens vugge.



Verhulsts logistiske kurve.

1.1 Verhulsts opdagelse



Pierre-Francois Verhulst
(1804-1849)

På Verhulsts tid var den altdominerende teori for befolkningstallets udvikling Malthus' eksponentielle model. I C-bogens kapitel 4 fortalte vi historien om, hvorledes Darwin i 1838 havde fundet den mekanisme, han mente kunne forklare evolutionsteoriens "survival of the fittest", netop gennem læsning af Thomas Malthus' værk *On Population*.

Ligesom Darwin, sad også Verhulst og studerede Malthus' værk i 1830'erne. Men for Verhulst var befolkningsmodellen ikke blot en *teori*, der skulle forklare en bestemt mekanisme i udviklingen. Verhulst havde til sit arbejde brug for en *praktisk* model, der kunne beskrive empiriske data, og som kunne anvendes til at give et bud på en fremtidig udvikling. Og han kunne ikke få de empiriske data til at passe med Malthus' eksponentielle model. Denne models forudsigelser stred også mod al sund fornuft, hvis man så langt ud i fremtiden.



Thomas Malthus (1766-1834),
forfatter til værket: *An Essay
on the Principle of Population*.
Værket kan hentes via [hjemmesiden](#).

Selv om det næsten var kætteri, så satte Verhulst sig for at finde en anden matematisk model, og lederen af det statistiske bureau i Belgien opfordrede ham til at offentliggøre den nye teori i et tidsskrift, han havde etableret. I 1838 skrev han så den artikel, hvor verden for første gang præsenteres for den logistiske model. Titlen er: *Note*

Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement,
par P.-F. VERHULST.

On sait que le célèbre *Malthus* a établi comme principe que la population humaine *tend* à croître en progression géométrique, de manière à se doubler après une certaine période, par exemple, tous les vingt-cinq ans. Cette proposition est incontestable,

Titel og første sætning i Verhulsts artikel fra 1838. Du kan hente en oversættelse på [hjemmesiden](#).

om den lov som befolkningstallet følger i sin vækst, og han indleder med at konstatere, at det er almen viden, at den berømte Malthus har etableret som princip, at befolkningstallet tenderer mod at følge en geometrisk, dvs. eksponentiel udvikling. Artiklen uddybes i en mere omfattende fremstilling i 1844, hvor også selve betegnelsen *logistisk* optræder første gang.

Øvelse 6.1

Svar på, hvad de karakteristiske træk er for henholdsvis en lineær og en eksponentiel vækstmodel ud fra følgende:

- Hvor lang tid tager det at fordoble startværdien b for en lineær vækst $y = a \cdot x + b$? Hvor lang tid tager det derefter at fordoble funktionsværdien på $2b$? Hvad bliver den næste fordoblingstid? Konklusion?
- I en eksponentiel vækstmodel $y = b \cdot a^x$ er fordoblingstiden som bekendt konstant. Hvor mange gange større bliver startværdien b i løbet af 10 fordoblingstider? I løbet af 20 fordoblingstider? I løbet af 30 fordoblingstider? Konklusion?
- På Malthus og Verhulst tid blev disse modeller ofte kaldt for henholdsvis den aritmetiske og den geometriske model. Kan du forklare, hvorfor de to begreber kan være velegnede til at beskrive de to typer af vækst og vise forskellen på dem?

Øvelse 6.2

I 1830 var der ca. 4 millioner indbyggere i Belgien. Hvis befolkningstallets udvikling følger Malthus model, og tilvæksten er 2,5% om året, hvor mange skulle der så bo i Belgien i dag? Find det korrekte tal på nettet og sammenlign.

Malthus' model var heller ikke tænkt som en model, der var egnet til konkrete forudsigelser. Den var tværtimod opstillet for at forklare, hvorfor sult og elendighed som en naturlov ramte samfundene igen og igen med stagnation og direkte nedgang i befolkningstallet til følge. Noget sådant så Verhulst også ske lige uden for sin dør. Det nuværende Belgien med provinserne Wallonien og Flandern brød i 1830 ud af det nederlandske kongerige og erklærede sig selvstændigt under navnet Kongeriget Belgien. Men den unge nation tog både sproglige og religiøse stridigheder med sig.

Den nordlige, protestantiske og flamsk (hollandsk) talende provins Flandern ville ikke tage imod ordrer fra den nye regering, mens omvendt de nye ledere, der havde rod i den sydlige fransk-talende provins Wallonien, havde den opfattelse, at en velfungerende nationalstat ikke kunne have flere sideordnede sprog. Fransk blev derfor det eneste tilladte sprog i administrationen og i hæren, og al undervisning på flamsk blev forbudt. I 1834 kulminerer undertrykkelsen med, at Flandern hærages, huse og gårde nedbrændes, og virksomheder i området lukkes. Følgerne bliver en nedgang i befolkningstallet, bl.a. gennem udvandring til Wallonien, og at det Flandern, der i 1700-tallet var et af Europas mest velstående, i løbet af kort tid synker ned til at blive et af fattigste.



Belgiens sprog i dag:
flamsk (gul), fransk (rød) og tysk (blå).

Hele denne udvikling har givetvis gjort det ekstra vanskeligt at få fat i helt pålidelige tal for befolkningstallet i Belgien og kan måske forklare nogle af de beregningsmæssige problemer, vi omtaler nedenfor.

Verhulst undersøger fire datasæt: Befolkningstallet i Belgien, i Frankrig, i det engelske grevskab Essex og i Rusland. Datamaterialet gengives i artiklen i form af tabeller, hvor han sammenligner det empiriske materiale med beregninger ud fra den model, han selv udvikler.

Verhulsts artikler kan hentes via [hjemmesiden](#).



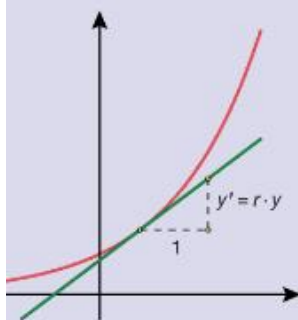
Øvelse 6.3

Hent via [hjemmesiden](#) Verhulst tabel over Belgiens befolkningstal.

- Forklar opbygningen af tabellen fra 1838, og hvad de forskellige tal i tabellen betyder.
- Forklar opbygningen af tabellen fra 1844.
- Er der tal i tabellerne, som forekommer usædvanlige? Hvad kan forklaringen være på disse tal?
- Læg tallene fra 1838 ind i et værktøjsprogram, og fremstil et plot af datamaterialet i et passende koordinatsystem.
- Kommenter grafens udseende ved at sammenligne med lineære og eksponentielle kurver.

20 år er kort tid, når man skal lave en model over befolkningstallets udvikling, og man kan risikere, at enkelte år, der skiller sig ud, får for stor betydning. Men det ligner hverken en lineær eller en eksponentiel kurve. Hvad er det så? I sin undersøgelse tager Verhulst udgangspunkt i Malthus, hvis model i *almindeligt sprog* kan formuleres således:

Befolkningstallet vokser med en bestemt procentdel pr. tidsenhed



Lad os oversætte dette til *formelsprog*. Lader vi y betegne befolkningstallet, så er *væksten pr. tidsenhed* med god tilnærmelse lig med y' . Kaldes procentdelen (i decimaltal) for r , bliver Malthus' model på formelsprog:

$$y' = r \cdot y$$

Dette er et eksempel på en *differentialligning*. I en differentialligning er den ukendte størrelse ikke bare et tal, men en hel funktion, der ofte betegnes y . Det kaldes en *differentialligning*, fordi den afledede funktion indgår i ligningen.

Øvelse 6.4

Vis, at alle funktioner med forskriften $y = c \cdot e^{r \cdot t}$, hvor c er en konstant, er en løsning til denne differentialligning.

På A-niveau viser vi, at disse funktioner er de eneste løsninger til denne differentialligning.

Men ifølge Verhulst er der andet og mere på spil, nemlig et led der *hæmmer* befolkningstallets udvikling, så dette ikke vokser eksplosivt. Han starter med at opskrive ligningen således:

$$y' = r \cdot y - \varphi(y)$$

hvor det hæmmende led $\varphi(y)$ er angivet som en funktion af y . Efter en række overvejelser når han frem til, at dette led kunne være af formen $s \cdot y^2$, hvor s er en konstant. Dvs. differentialligningen bliver ændret til:

$$y' = r \cdot y - s \cdot y^2$$

Dette er den *logistiske differentialligning*.

Verhulst begrundet valget af dette hæmmende led med, at det er den mest enkle antagelse. Det kan virke lidt vilkårligt, men en af årsagerne til, at den logistiske model har fundet så mange forskellige anvendelser er givetvis, at der findes flere forskellige og hver for sig velbegrundede ræsonnementer, der fører frem til den logistiske differentialligning. Vi giver her et argument, og i afsnit 3 om logistisk vækst følger yderligere et par andre argumenter.

Hvis vi illustrerer Malthus' model med følgende *flow-diagram*:



får vi, at *ændringen* y' i befolkningstallet kan skrives således:

$$y' = F - D$$

I Malthus' model antages, at antal fødsler og antal dødsfald er proportionale med befolkningstallet. Stiger befolkningstallet med 50 %, stiger også antal dødsfald og antal fødsler med 50 %. Dvs. der findes konstanter, k_F og k_D , så:

$$F = k_F \cdot y \text{ og } D = k_D \cdot y$$

og hermed ved indsættelse:

$$y' = F - D = k_F \cdot y - k_D \cdot y = (k_F - k_D) \cdot y \quad (1)$$

Kalder vi konstanten $(k_F - k_D)$ for r , kan vi se, at dette præcis er differentialligningen, vi opstillede ovenfor.

Men nu er argumentet, at i den virkelige verden er k_F og k_D ikke konstante tal. Studier af populationer af dyr fortæller, at de ændrer sig med antallet af individer på en sådan måde, at fødselsraten falder, og dødsraten stiger med øget populationstæthed. Det gælder også for menneskenes samfund, hvis der ikke tages en række forholdsregler.

Fx ved man fra detaljerede registreringer fra tiden før de store vaccinationsprogrammer, at der var en markant større dødelighed i byerne end på landet, fordi risikoen for smitte var så meget større.

Vi antager nu, at fødsels- og dødsraterne ikke er konstante, men følger den næstmest simple model, nemlig, at de er lineære funktioner af y :

$$k_F = -a_F \cdot y + b_F \text{ og } k_D = a_D \cdot y + b_D$$

hvor alle konstanter er positive tal.

Vi vil nu indsætte disse to udtryk i (1), og udregner derfor først parentesen:

$$k_F - k_D = -a_F \cdot y + b_F - (a_D \cdot y + b_D)$$

$$k_F - k_D = -a_F \cdot y + b_F - a_D \cdot y - b_D \quad \text{Hæv minusparentesen}$$

$$k_F - k_D = b_F - b_D - a_F \cdot y - a_D \cdot y \quad \text{Roker rundt}$$

$$k_F - k_D = (b_F - b_D) - (a_F + a_D) \cdot y \quad \text{Sæt uden for parentes}$$

$$k_F - k_D = b - a \cdot y \quad (2)$$

I den sidste omskrivning har vi indført de nye betegnelser:

$$b = b_F - b_D \text{ og } a = a_F + a_D$$

Indsættes udtrykket (2) nu i (1) får vi:

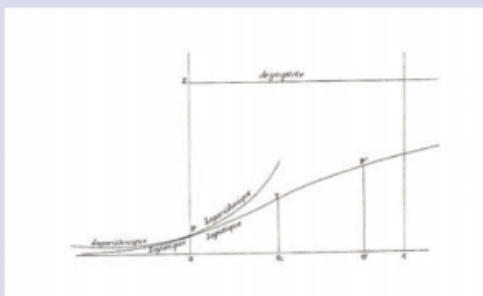
$$y' = (b - a \cdot y) \cdot y \quad (3)$$

$$y' = b \cdot y - a \cdot y^2 \quad \text{Gang parentesen ud}$$

Disse to ligninger er blot to forskellige udgaver af *den logistiske differentialligning*.



Plakat fra amerikansk sundhedskampagne i 1920'erne. Budskabet drejer sig om faren ved at smitte hinanden.



Verhulst egen tegning af den logistiske kurve. Bemærk, at han kalder den eksponentielle kurve for logaritmisk, samt at han også har indtegnet den øvre grænse i form af en vandret asymptote.

Det var den nederste udgave, Verhulst argumenterede sig frem til. Det led, der virker bremsende ind på Malthus' model, er $-a \cdot y^2$, altså en størrelse der er proportional med kvadratet på det aktuelle befolkningstal. Jo større y bliver, jo kraftigere bliver også nedbremsningen. Og det karakteristiske for den logistiske differentialligning er, at løsningerne hertil har en øvre grænse. Verhulst skriver i sin første artikel, at "*loven for befolkningstallet opfylder den betingelse, at der er et maksimum, som man ikke når op på inden for endelig tid.*" I artiklen fra 1844 bruger han første gang ordet logistisk: *Nous donnerons le nom de logistique à la courbe* (Dvs.: Vi tildeler denne kurve navnet logistisk). Og den kurve, han taler om, er faktisk gengivet i artiklen, hvor vi finder illustrationen til venstre.

Verhulst forklarede aldrig, hvorfor han havde valgt ordet *logistisk*. Man kunne tro, det har noget med logistik at gøre, men mere sandsynligt er det, at han har hentet ordet fra sin almene dannelse. Verhulst kunne græsk, og på græsk er ordet tæt beslægtet med ord, der betyder noget i retning af "beregningens kunst". Målet var jo netop at udvikle en metode til at forudsige, hvorledes eksempelvis befolkningstallet vil udvikle sig. Men vi ved faktisk ikke med sikkerhed, hvorfor denne væksttype har fået navnet logistisk vækst!

Øvelse 6.5

Vend tilbage til talmaterialet i øvelse 6.3.

- a) Kald dit plot af datamaterialet frem, og udfør logistisk regression på dette. Du skal måske justere grafvinduet for at få et klarere indtryk af den logistiske kurve

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-b \cdot t}} = \frac{10,12}{1 + 1,91 \cdot e^{-0,0164 \cdot t}}$$

hvor t er tiden målt i antal år efter 1815, og y er befolkningstallet.

- b) Hvad sker der med $c \cdot e^{-b \cdot t} = 1,91 \cdot e^{-0,0164 \cdot t}$, når t bliver meget stort? Argumenter nu for, at y nærmer sig $M = 10,12$, når t bliver meget stort.

M er altså dette maksimum, som Verhulst taler om. Det kaldes af og til for *bæreevnen*, og det angiver her en øvre grænse for befolkningstallet.

Ved at lave regression på hele datamaterialet fandt vi en øvre grænse for Belgiens befolkning på lidt over 10,12 millioner.

Talmaterialet er så spinkelt, at det er følsomt over for få ændringer.

- c) Undersøg, hvad sker der med den øvre grænse, når vi fjerner en del af datamaterialet. Prøv først at udføre logistisk regression på talmaterialet efter at have fjernet de første tre oplysninger – hvad bliver den øvre grænse? Hvad bliver den øvre grænse, hvis du i stedet ser bort fra de sidste to? Vælg evt. selv andre situationer, hvor du sletter andre dele af datamaterialet.

Verhulst kunne ikke lave logistisk regression, som vi kan i dag. Han var i stand til at løse den logistiske differentialligning, og vidste derfor at formeludtrykket for den logistiske funktion er som angivet i øvelsen ovenfor. Dette formeludtryk har tre ubekendte størrelser, og med tre sammenhørende dataværdier kan han opstille tre ligninger med tre ubekendte. Det gjorde han i artiklen fra 1844, idet han valgte oplysninger om befolkningstallet fra 1815, 1830 og 1845 (det sidste fremskrev han ud fra 1844!):

Befolkningstallet 1. januar 1815	3627353
Tilvæksten i perioden 1815-1830	619860
Befolkningstallet 1. januar 1830	4247113
Tilvæksten i perioden 1830-1845	553748
Befolkningstallet 1. januar 1845	4800861

Artiklen konkluderer, at Belgiens befolkningstal har en øvre grænse på 6,6 millioner.

Øvelse 6.6

- Kontroller Verhulst konklusion, enten ved at løse tre ligninger med tre ubekendte, eller ved at lave logistisk regression på de nævnte data fra de tre årstal.
- Sammenlign med Belgiens nuværende befolkningstal. Kan der være ting i Belgiens senere udvikling, der har givet en sådan ekstra indsprøjtning i økonomi og industriel udvikling, at disse kan forklare forskellen?

Verhulst foretog nogle år senere nye beregninger og nye forudsigelser. Hans forudsigelser om, på hvilket niveau befolkningstallet i Frankrig ville stabilisere sig, skulle vise sig at være langt tættere ved den faktiske udvikling. Men han var utilfreds med sine resultater fra 1844, og i 1846 kritiserer han selv den logistiske model. Hans selvkritik er givetvis en del af forklaringen på, at Verhulst-modellen gled ind i glemslen. Verhulst har et svagt helbred og dør allerede i 1849.

1.2 Modellen genopdages

Selv om Verhulst-modellen går i glemmebogen, så stod spørgsmålet tilbage om at finde bedre matematiske modeller af biologiske og samfundsmæssige fænomener, end de lineære og de eksponentielle. Omkring år 1900 kommer der en række gennembrud for den matematiske modellering inden for biologi og samfundsvidenskab, bl.a. gennem studier af insektkolonier og ikke mindst gennem beskrivelsen af malariasygdommen. På [hjemmesiden](#) ligger der projekter om matematisk modellering af epidemier.

I 1920 udgiver to amerikanske statistikere, Raymond Pearl og Lowell Reed en artikel med titlen *On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation*. Artiklen kan hentes på [hjemmesiden](#). Kort før udgivelsen finder man ud af, at en på det tidspunkt helt ukendt belgisk matematiker

TABLE 1 SHOWING THE DATES OF THE CENSUS AND THE RECORDED POPULATION FROM 1790 TO 1910		
DATE OF CENSUS		RECORDED POPULATION (Revised Figures from Statistical Abst., 1918)
Year	Month and Day	
1790	First monday in August	3,929,214
1800	First monday in August	5,308,483
1810	First monday in August	7,239,881
1820	First monday in August	9,638,453
1830	June 1	12,866,020
1840	June 1	17,069,453
1850	June 1	23,191,876
1860	June 1	31,443,321
1870	June 1	38,558,371
1880	June 1	50,155,783
1890	June 1	62,947,714
1900	June 1	75,994,575
1910	April 15	91,972,266

80 år før havde gennemført en tilsvarende modellering. Pearl og Reeds artikel har en anden tilgang, end Verhulst havde, og det kan betragtes som et nyt og originalt bidrag. De er ikke, som Verhulst var det, interesserede i at finde lovmæssigheder, der kan begrunde kurvernes forløb. For dem ligger begrundelsen i, at kurverne matcher det empiriske materiale. De er alene interesserede i at finde kurver, der matcher data, og de sammenligner en række forskellige modelleringer, bl.a. med brug af tredjegradspolynomier, med brug af logaritmer og andet.

Pearl og Reeds datamateriale er tabellen til venstre fra de amerikanske folketællinger.

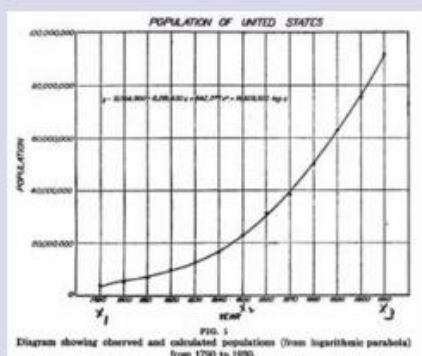
Øvelse 6.7

- Hent på [hjemmesiden](#) tabellen over udviklingen i befolkningstallet i USA, og gennemfør selv en modellering med brug af tredjegradspolynomier på talmaterialet.
- Pearl og Reed inddrager en helt ny funktionstype, de kalder for *den logaritmiske parabel*, som en mulig matematisk model, men heller ikke denne begrundes, ud over at den passer godt med de empiriske data:

$$y = 9\,064\,900 - 6\,281\,430 \cdot x + 842\,377 \cdot x^2 + 19\,829\,500 \cdot \log(x)$$

Tegn i samme koordinatsystem et grafisk plot af datapunkterne og grafen for ovenstående funktion – er der god overensstemmelse?

- Sammenlign de to modeller. Hvad sker der, når x bliver stor?



Pearl og Reeds modellering af USA's befolkningstal med en logaritmisk parabel.

Pearl og Reed tager selv afstand fra denne model, ikke fordi den forekommer umulig at begrunde, men fordi også den udvikler sig eksplosivt på længere sigt. Pearl og Reed leder efter en funktions-type, der ikke udvikler sig eksplosivt:

"What we want obviously is a mathematical picture of the whole course of population in this country. It is not enough to be able to predict twenty or fifty years ahead as our logarithmic parabola is able to do satisfactorily, in one portion of the whole curve. How absurd the equation would be over a really long time range is shown if we attempt to calculate from it the probable population in, say, 3000 A.D. It gives a value of 11,822,000,000. But this is manifestly ridiculous; it would mean a population density of 6.2 persons per acre or 3968 persons per square mile."

Øvelse 6.8

I artiklen skriver de følgende:

"The following conditions should be fulfilled by any equation which is to describe adequately the growth of population in an area of fixed limits.

1. Asymptotic to a line $y = k$ when $x = +\infty$.
2. Asymptotic to a line $y = 0$ when $x = -\infty$.
3. A point of inflection at some point $x = \alpha$ and $y = \beta$.
4. Concave upwards to left of $x = \alpha$ and concave downward to right of $x = \alpha$.
5. No horizontal slope except at $x = \pm\infty$.
6. Values of y varying continuously from 0 to k as x varies from $-\infty$ to $+\infty$.

In these expressions y denotes population, and x denotes time. An equation which fulfills these requirements is

$$y = \frac{b \cdot e^{ax}}{1 + c \cdot e^{ax}}$$

when a , b and c have positive values."

a) Forklar, hvad der menes med hvert af punkterne 1-6.

b) Omskriv funktionsudtrykket til følgende form:

$$y = \frac{b}{c + e^{-a \cdot x}}$$

og argumenter for, at denne opfylder de 6 punkter.

c) Vis, at funktionsudtrykket i b) kan omskrives til: $y = \frac{\frac{b}{c}}{1 + \frac{1}{c} \cdot e^{-a \cdot x}} = \frac{M}{1 + c_1 \cdot e^{-ax}}$

d) Undersøg, om funktioner med forskriften:

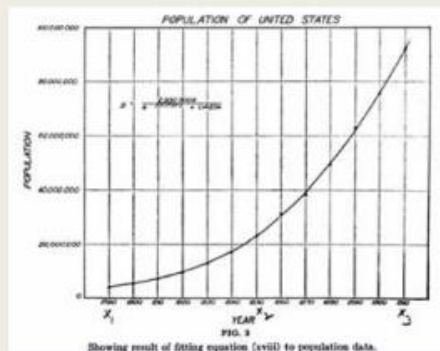
$$y = \frac{a \cdot x}{1 + b \cdot x}$$

opfylder punkterne.

Øvelse 6.9

Gennemfør en logistisk modellering af talmaterialet. Hvad er ifølge den logistiske model den øvre grænse for USA's befolkningstal? Sammenlign med befolkningstallet i USA i dag.

Øvelse 6.10



Pearl og Reed havde ikke mulighed for at lave logistisk regression. De vælger tre af de sammenhørende dataværdier fra tabellen ovenfor og beregner de tre ubekendte størrelser, a , b og c , nemlig årene 1790, 1850 og 1910. Ud fra dette når de frem til en øvre grænse på 197,2 millioner.

Gennemfør en tilsvarende beregning, og kontroller om modellen er en god beskrivelse af alle datapunkterne i tabellen.

Bemærk: Pearl og Reed viderefører ikke grafen ud over datapunkterne, så den øvre grænse fremgår ikke af det grafiske billede.

Øvelse 6.11

Pearl og Reed er godt klar over, at dette tal kan virke beskedent, og at de vil blive mødt med argumenter om, at den europæiske befolkning har udviklet sig mod en betydeligt højere øvre grænse.

Deres modargumenter findes på siderne 285-87. Læs dette og redegør for, hvad deres argumenter går ud på.



1. januar 1892 åbnede det nye immigrationskontor på Ellis Island i New York. Når skibene lagde til i New Yorks havn blev passagererne straks fragtet ud til øen for at blive registreret. Første dag ankom 700! I løbet af kort tid ankom der dagligt ca. 5000 immigranter til den nye verden. Omkring 100 millioner eller ca. en tredjedel af USA's indbyggere har forfædre, der gik ind over denne landgangsbro.

I et større værk, som Pearl udsender i 1925, giver han Verhulst æren for opdagelsen og kalder, som Verhulst, kurverne for logistiske. I Pearls værk fra 1925 er der næsten ingen grænser for, hvad han mener, kan modelleres med den logistiske funktion. Et uddrag af bogen kan hentes via [hjemmesiden](#). Han er nået til den opfattelse, at den logistiske kurve repræsenterer en naturlov på linje med Keplers love for planeternes baner om Solen. Argumentationen er imidlertid udelukkende begrundet i det, ganske vist overvældende, empiriske materiale, men er ikke funderet i en teori. Det gør Pearls teori, som han kaldte *loven om befolkningstilvækst*, sårbar.

På dette tidspunkt i de første årtier af 1900-tallet er der store og principielle diskussioner om, hvorvidt levende fænomener i det hele taget kan modelleres matematisk. En matematisk model opstilles ikke kun for at beskrive, men også med henblik på at *kunne forudsige noget*. Og kan man forudsige noget, må det betyde, at der findes lov-mæssigheder, der til en vis grad styrer både store systemer, som et befolkningstals udvikling, og det enkelte individs vækst og udvikling.

Øvelse 6.12

Hvis det er rigtigt, at der findes sådanne love, hvad så med vores egen frie vilje? Vælger vi ikke selv, hvor mange børn vi vil have, eller hvor meget vi spiser? Hvordan kan man på samme tid hævde, at vi har en fri vilje, og at det er bestemte naturlove, der fx styrer befolkningstallets udvikling?

Selv om matematisk modellering blev anvendt med succes, fx til at opnå en bedre forståelse af malariasygdommen, hvor den logistiske model kunne beskrive forholdet mellem parasitter og værter, så gled modellen efterhånden i baggrunden efter Pearls død i 1940. Den forsvandt dog ikke helt ind i glemslen denne gang. På hjemmesiden findes projekter, med historiske eksempler på matematisk modellering fra den periode, bl.a. modellering af malariasygdommen.

I 1976 hentes den logistiske model frem igen, men denne gang fra en helt uventet kant. Computeren har vundet frem og indgår nu som redskab for matematisk forskning, specielt i studiet af fraktaler og af kaos.