Potenser og rødder

Man skal gerne vide at:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$$

6 er grundtallet og 5 er eksponenten.

I første omgang betragter vi kun tilfælde, hvor eksponenten er positiv og heltallig.

Opgaver - skriv med grundtal og eksponent

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 =$
b) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x =$

Rodudragning er den modsatte regneoperation, så det gælder fx at:

$\sqrt{16} = \sqrt[2]{16} = 4$ da $4^2 = 16$ (tænk også på at $\sqrt{4^2} = 4$)

$\sqrt[3]{8} = 2$ da $2^3 = 8$ (tænk også på at $\sqrt[3]{2^3} = 2$)

$\sqrt[4]{81} = 3$ da $3^4 = 81$ (tænk også på at $\sqrt[4]{3^4} = 3$)

Lad os se på og forklare potensregnereglerne fra formelsamlingen.

(18): To potenser med samme grundtal kan forklares således - kan du følge tankegangen?

$$a^3 \cdot a^8 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{11} = a^{3+8}$$

(19) kan forklares på en tilsvarende vis - kan du følge tankegangen?

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2 = a^{5-3}$$

(20) kan vi også forklare - kan du følge tankegangen? Noter specielt $=$.

$$(b^4)^3 = (b \cdot b \cdot b \cdot b)^3 = (b \cdot b \cdot b \cdot b) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = b^{12} = b^{4 \cdot 3}$$

(21) - kan du følge tankegangen? Noter specielt $=$.

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$$

(22) -kan du følge tankegangen? Noter specielt $=$.

$$\left(\frac{c}{d}\right)^5 = \left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c}{d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d} = \frac{c^5}{d^5}$$

Opgaver - brug den korrekte regel

$\frac{x^5}{x^2} =$	$(2^3)^5 =$	$a^3 \cdot a^5 =$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$
$(x \cdot y)^8 =$	$\left(\frac{p}{q}\right)^3 =$	$\frac{5^9}{5^7} =$	$2^3 \cdot 2^9 =$

Det udvidede potensbegreb

Nu betragtes tilfælde, hvor eksponenten også kan være nul, et negativt tal, og ikke behøver at være heltallig. Eksempler:

$$2^{-4}, 5^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{2}}, 9^0$$

Det var enkelt at forstå, hvad der menes med 2^4, men hvordan skal man forstå 2^{-4} eller $5^{\frac{1}{4}}$?

- Vi stiller nu som et krav, at de regneregler, som vi allerede har set på, skal gælde.

Se nu på følgende, som logisk følger fra tidligere betragtninger. Vi bruger (18) fra formelsamlingen.

$$a^n = a^{0+n} = a^0 \cdot a^n$$

Dette kan kun kan være sandt for $a^0 = 1$. Det giver os formlen (23) i formelsamlingen. Slå den op - den er vigtig!

(24): Her benytter man (19) fra formelsamlingen, og viden om at $a^0 = 1$.

$$\frac{1}{a^r} = \frac{a^0}{a^r} = a^{0-r} = a^{-r}$$

(25): Det er blot et specieltilfælde af (24), hvor $r = 1$

(26): Dette er lidt vanskeligere, så det må man gerne hoppe over, men hvis man vil forsøge at forstå formlen, så er der et ræsonnement her.

For at gennemføre argumentet skal vi kende til, at roduddragning *er* den modsatte regneoperation af potensopløftning. Her vises det med to eksempler:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ da } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \text{ da } 3^4 = 81$$

Betragt nu det andet tilfælde. Overbevis dig selv om, at nedenstående nu må gælde:

$$3^4 = \left(\sqrt[4]{81}\right)^4 = 81$$

I ræsonnementet benyttes et eksempel med tal.

Vi kan ved at bruge formel (20) fra formelsamlingen konkludere følgende:

$$\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a^{\frac{1}{4}\cdot 4} = a^1 = a$$

Vi ved imidlertid også at

$$\left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a$$

Så gælder det, da man ser at $a = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4$.

$$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

Lad os se på et taleksempel og et eksempel med a denne gang.

$$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[2]{9} = 9^{\frac{1}{2}}$$

Det tredje eksempel svarer til formel (30) i formelsamlingen.

Formlen (27) er nu enkel at vise, da vi kan bruge (20) fra formelsamlingen.

$$a^{\frac{r}{s}} = (a^r)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$$

(28) og (29) kan man blot regne sig frem til. Det vises her. Først for (28).

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt[2]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Derefter (29).

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt[2]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$