

## Logaritmer

### Definition

Lad  $a$  og  $k$  være to positive tal.

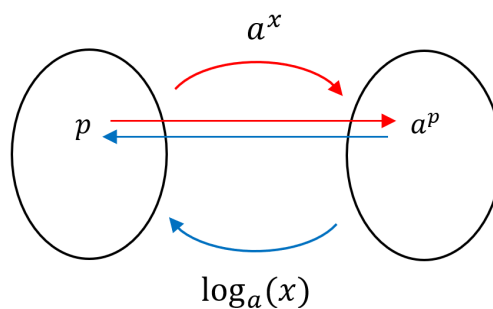
Tallet  $\log_a(k)$  defineres til at være det tal, der løser ligningen  $a^x = k$ .

Funktionen  $\log_a$  kaldes for logaritmen med grundtal  $a$ .

Definitionen har følgende konsekvenser, som kan være lidt vanskelige at følge. Opgaverne senere skal gerne fæstne følgende, nemlig at:

- $x = \log_a(k)$ . Dette følger af at  $\log_a(k)$  løser ligningen  $a^x = k$ .
- $a^{\log_a(x)} = x$ . Dette følger af at  $k = a^x = a^{\log_a(k)}$ . Så  $a^{\log_a(k)} = k$ .
- $\log_a(a^x) = x$ . Dette følger af  $x = \log_a(k) = \log_a(a^x)$ . Så  $\log_a(a^x) = x$ .
- $\log_a(x)$  er den omvendte funktion til funktionen  $a^x$ .

Grafisk kan vi betragte den omvendte funktion således



### Grundtallet $a$

Vi kommer primært til at arbejde med to grundtal nemlig 10 og  $e$ .

Hov - er  $e$  et tal? Ja - tallet kaldes nogle gange for Eulers tal. Euler er en af verdenshistoriens dygtigste matematikere. Tallet er ca. 2,71828, og vi kender et andet tal, nemlig  $\pi$ , som vi heller ikke kan skrive helt præcist op med tal, og som også repræsenteres med et bogstav.

Grundtallet kan imidlertid også være 2, 3, 5 eller .... alt muligt andet.

## Fæstning ved brug af Nspire

For at få nedenstående ind under huden, skal man nu afprøve nogle kommandoer i Nspire.

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{og} \quad \log_a(a^x) = x$$

### Udfordring

Skriv følgende i Nspire og se, hvad der sker.

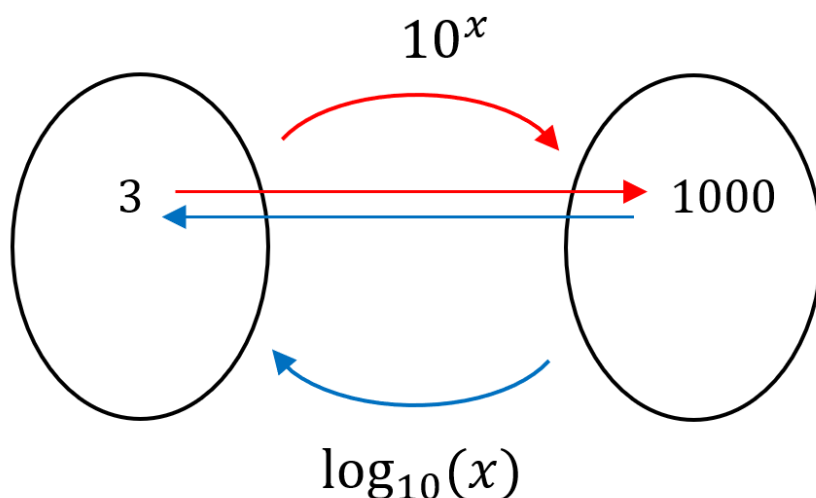
- $2^{\log(5,2)}$
- $5^{\log(24,5)}$
- $10^{\log(100,10)}$
- $10^{\log(100)}$
- $e^{\log(5,e)}$
- $e^{\ln(5)}$

, men finder Eulers tal under 'tegn' i Nspire

- $\log(5^{12}, 5)$
- $\log(7^3, 7)$
- $\log(10^9, 10)$
- $\log(10^9)$
- $\log(e^6, e)$
- $\ln(e^6)$
- $\log(10)$
- $\ln(e)$

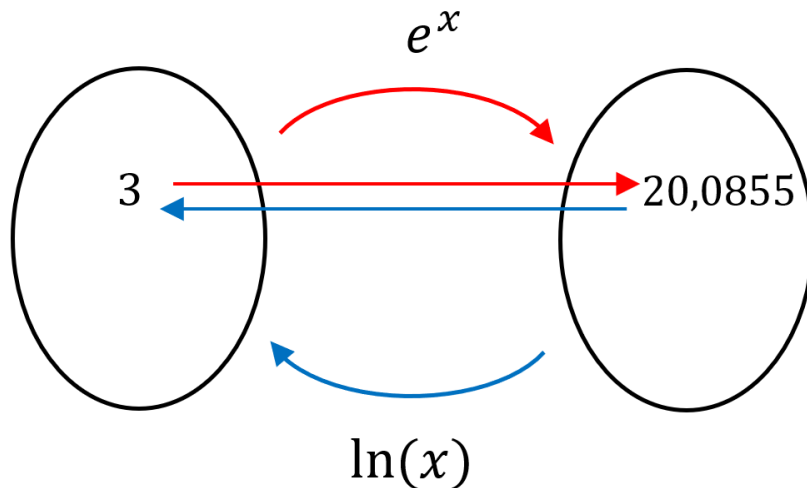
### Udfordring

Indsæt mindst fem tal i mængden til venstre, der hvor der står 3. Beregn så først - som i eksemplet -  $10^3$  - og skriv resultatet i mængden til højre. Benyt nu dette til som input til funktionen  $\log_{10}(x)$ . I eksemplet er  $\log(1000)$  blevet beregnet.



Udfordring

Indsæt mindst fem tal i mængden til venstre, der hvor der står 3. Beregn så først - som i eksemplet -  $e^3$  - og skriv resultatet i mængden til højre. Benyt nu dette til som input til funktionen  $\ln(x)$ . I eksemplet er  $\ln(20,0855)$  blevet beregnet. (Dog med alle decimaler i Nspire, da tallet blev kopieret.)



Graferne for funktionerne

Vi har tidligere set på graferne for en funktion og dens omvendte funktion.

- Tegn graferne for  $10^x$  og for  $\log_{10}(x)$ .
  - ... det må gerne være i det samme koordinatsystem.
  - Hvad er definitionsmængden og værdimængden for de to funktioner?
- Tegn graferne for  $e^x$  og for  $\ln(x)$ .
  - ... det må gerne være i det samme koordinatsystem.
  - Hvad er definitionsmængden og værdimængden for de to funktioner?

Opgave

Udfyld denne tabel uden at bruge din computer (Nspire eller lignende må ikke bruges).

$x$	0,00001	0,001	0,01	0,1	1	10	10000		
$\log_{10}(x)$				-1	0	1		-8	8

Opgave

Brug Nspire til at udfylde denne tabel.

$x$	1	2	$e$	10				
$\ln(x)$					1	2	3	5