Bevis for fordoblingskonstanten

Beviset for halveringskonstanten følge den samme skabelon

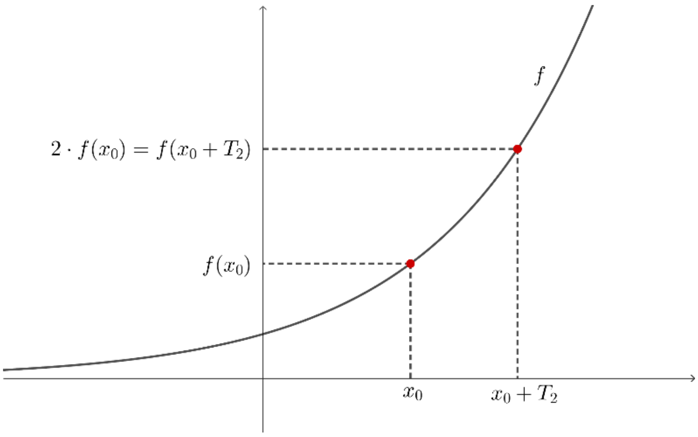
Sætning

For en eksponentiel udvikling givet ved $f(x) = b \cdot a^x$ med $a > 0$ og $b > 0$ gælder det at

1. For $a > 1$ er f en voksende funktion med fordoblingskonstanten $T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$.
2. For $0 < a < 1$ er f en aftagende funktion med halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$.

Bevis

Lad funktionen f være givet ved forskriften $f(x) = b \cdot a^x$ og lad $a > 1$ og $b > 0$.



Figuren illustrerer definitionen af fordoblingskonstanten. Således gælder det at:

$$2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + T_2)$$

Heraf følger det fra brug af viden om $f(x)$ at:

$$2 \cdot b \cdot a^{x_0} = b \cdot a^{x_0 + T_2}$$

Efter division med b på begge sider[1] har man:

$$2a^{x_0} = a^{x_0 + T_2}$$

Nu benyttes potensregnereglen $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ til omskrivning af højre side:

$$2a^{x_0} = a^{x_0} \cdot a^{T_2}$$

Efter division med a^{x_0} på begge sider[2] har vi:

$$2 = a^{T_2}$$

Ved at tage logaritmen på begge sider:

$$\log(2) = \log(a^{T_2})$$

og ved brug af logaritmeregnereglen $\log(a^r) = r \cdot \log(a)$ har vi:

$$\log(2) = T_2 \cdot \log(a)$$

Ved division med $\log(a)$ på begge sider[3] finder vi at:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

QED

---

[1] Husk at $b \neq 0$

[2] Husk at $a \neq 0$

[3] Husk at $a > 1$ og dermed er $\log(a) \neq 0$. Her er det vigtigt, at erindre at netop $\log(1) = 0$, også når man gennemfører beviset for halveringskonstanten.