

Andengradspolynomiet

Generelt gælder for følgende for et andengradspolynomium.

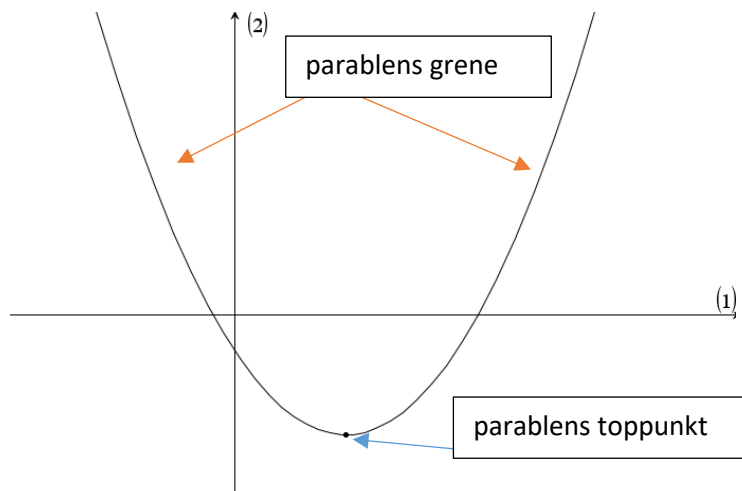
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Ved at gennemføre nedenstående udfordringer, skal man blive mere fortrolig med andengradspolynomiet.

Når man er færdig med arbejdsarket kan man tegne grafen for et andengradspolynomium 'med pen og papir' samt i Nspire. Man forstår også betydningen af værdierne af a , b og c for grafens udseende - herunder også fortegnes betydning. Desuden ved man, hvad der menes med parabelgrene og toppunkt og dette alternativ udtryk for et andengradspolynomium giver mening:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Grafen for et andengradspolynomium kaldes for en parabel. Grafen kan fx se ud som neden for, hvor to begreber, som man skal benytte i det efterfølgende, introduceres.



Nu kommer noget **meget vigtig**, når man arbejder med udtrykket $f(x) = ax^2 + bx + c$.

I mange opgaver og mht. forståelse for andengradspolynomiet, skal man ofte aflæse, hvad tallene for a , b og c er. Her kommer tre eksempler, vær sikker på, at du forstår dem:

Eksempel 1

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

Her er $a = 2$, $b = 3$ og $c = 1$

Eksempel 2

$$f(x) = -2x^2 - 3x + 8$$

Her er $a = -2$, $b = -3$ og $c = 8$

Eksempel 3

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

Her er $a = 1$, $b = -1$ og $c = -1$

Udfordring 1

Man skal kunne tegne grafen for et andengradspolynomium, vi kalder denne graf for en parabel, på et stykke papir.

- a) Tegn grafen for $f(x) = x^2$ på et stykke papir.
Gør det ved at beregne koordinatsæt. (Husk at $f(x) = y$). Eksempelvis kan en tabel som denne udfyldes, dog skal tabellen udvides:

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Spørgsmål: Symmetri - hvad tænker du, når du ser på grafen?

- b) Tegn grafen for $g(x) = x^2 + 3$
Sammenlign grafen for funktionen f med grafen for funktionen g . Hvad tænker du?
- c) Tegn grafen for $h(x) = (x - 2)^2 + 3$
Sammenlign grafen for funktionen h med grafen for funktionen g . Hvad tænker du?
- d) Tegn grafen for $m(x) = (x + 2)^2 + 3$
Hvad tænker du, hvis du sammenligner med de andre grafer, du har tegnet?

Udfordring 2

Vi betragter stadig andengradspolynomiet givet ved $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Tænd din computer og start Nspire.

Nu skal man undersøge betydningen af værdierne, herunder også fortegnene, af a , b og c for grafens udseende.

- a) Tegn grafen for funktionen f , der er givet ved $f(x) = x^2$.
Her er $b = 0$ og $c = 0$. Tænk over, hvorfor der er korrekt, idet

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

betragtes.

- b) Egentlig står der $f(x) = 1 \cdot x^2$, så her er $a = 1$.
Man skal nu ændre værdien af a , for dette andengradspolynomium. Man skal prøve med 'små' og 'store' værdier af a , samt positive og negative tal. Det kan fx være $a = 0,01$ eller $a = -2,3$.

Hvad sker der, når værdien af a ændres? Skriv med dine egne ord, hvad man kan konkludere om betydningen af a for gradens udseende.

- c) Lad stadig $b = 0$, men tilføj nu en værdi for c .

Fx kan man tegne grafen for $f_1(x) = 2x^2 - 3$ og $f_2(x) = 2x^2 + 5$.

Hvilken betydningen har c for grafens udseende?

Hvad har dette at gøre med $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, altså $f(0) = c$?

- d) Vi skal se på, hvilken betydning b har for grafens udseende. Her er $c = 0$.

1. Tegn grafen for $f_3(x) = 1 \cdot x^2 + 2x$
2. Tegn grafen for $f_4(x) = 1 \cdot x^2 - 2x$
3. Tegn grafen for $f_5(x) = -1 \cdot x^2 + 2x$
4. Tegn grafen for $f_6(x) = -1 \cdot x^2 - 2x$

Kan du konkludere 'et eller andet'? Forsøg at skabe et system i det, du ser.

Det er en god ide at betragte toppunktets placering, og at tænke på fortegnene for a og b .

Se evt. på fortegnet for forholdet mellem a og b , mere specifikt fortegnet for $\frac{b}{a}$.

Skriv dine tanker om betydningen af b for grafens udseende ned på et stykke papir.

Udfordring 3

Denne udfordring er en 'fortsættelse' af udfordring 2. Vi vil stadig gerne forstå betydningen af b for grafens udseende.

Start med at undersøge, hvad der menes med en tangent (i en matematisk sammenhæng). Brug en søgemaskine eller AI. Det er vigtigt, at man her finder dem til en figur/illustration af, hvad en tangent er.

Nu bliver det lidt teknisk - spørg hvis noget mht. Nspire driller!

Gør nu følgende i Nspire.

1. Man er i vinduet med en af graferne fra udfordring 2. (Det er ikke så godt, hvis alle greferne er i samme vindue, da anbefales det at udføre de nedenstående i nye vinduer.)
2. Vælg Geometri → Punkter og linjer → Tangentlinje
3. Placer 'Tangentlinjen' i origo, altså i punktet med koordinatsættet (0,0).

Hvad bemærker man? Man skal gerne se et udtryk for en ret linje, altså fx $y = 5x$.

Kan du drage en konklusion?

Undersøg andre udtryk for at andengradspolynomium. Det kan fx være

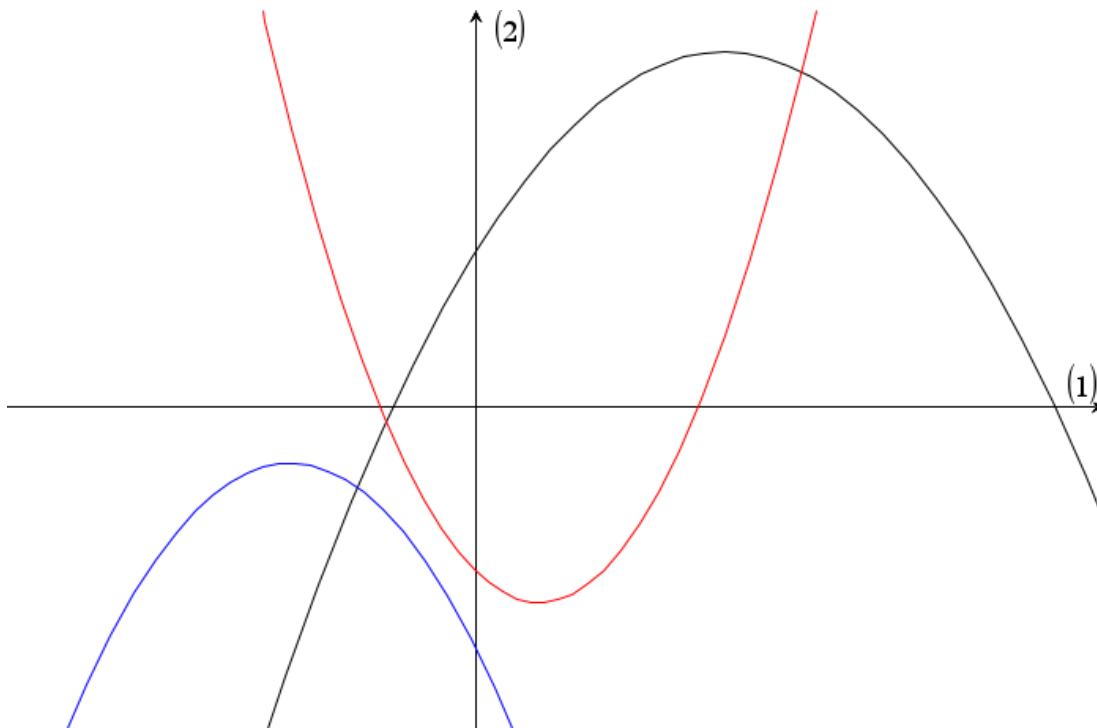
$$f(x) = 3x^2 - 5x + 9$$

Her skal tangenten placeres der, hvor grafen for funktionen f skærer andenaksen.

Gælder dine tanker stadig?

Prøv med andre andengradspolynomier. Hvad med din regel fra 'udfordring 2' - gælder den stadig for funktionen f ?

Udfordring 4



Figuren viser graferne for tre andengradspolynomier.

Med de tanker, du har gjort dig, skal du nu komme med bud på, hvor fortegnet for a , b og c er for de tre andengradspolynomier.

Begrund dine svar.

Udfordring 5

Da du tegnede grafer i hånden, tegnede du grafer for følgende udtryk:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Nu betragter vi et helt konkret eksempel:

$$f(x) = 2(x - 5)^2 + 1$$

1. Tegn grafen i Nspire.
2. Bestem koordinatsættet til toppunktet ved at bruge:
Undersøg grafer → Minimum
(... placer to streger på hver side af toppunktet og aflæs.)

Godt. Vi ved nu 'helt sikkert', hvordan h og k er relateret til toppunktet. Dog - hvilket koordinatsæt har toppunktet for:

$$g(x) = 2x(x + 5)^2 + 1$$

Nu regner vi lige lidt - vi bruger kvadratsætningerne:

$$f(x) = 2(x - 5)^2 + 1 = 2(x^2 - 10x + 25) + 1 = 2x^2 - 20x + 51$$

Fint. Bum.

Nu skal du prøve at beregne koordinaterne for toppunktet T ved at benytte denne formel:

$$T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right),$$

hvor $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Fremgangsmåde

1. Bestem a , b og c .
2. Beregn d .
3. Beregn $-\frac{b}{2a}$ og $-\frac{d}{4a}$.

Beregn toppunkterne for følgende andengradspolynomier:

$$f_1(x) = x^2 + 6x + 10$$

$$f_2(x) = 2x^2 - 4x + 11$$