Sætning

Lad andengradspolynomiet være givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hvor $a \neq 0$ og $a, b\ og\ c \in \mathbb{R}$.

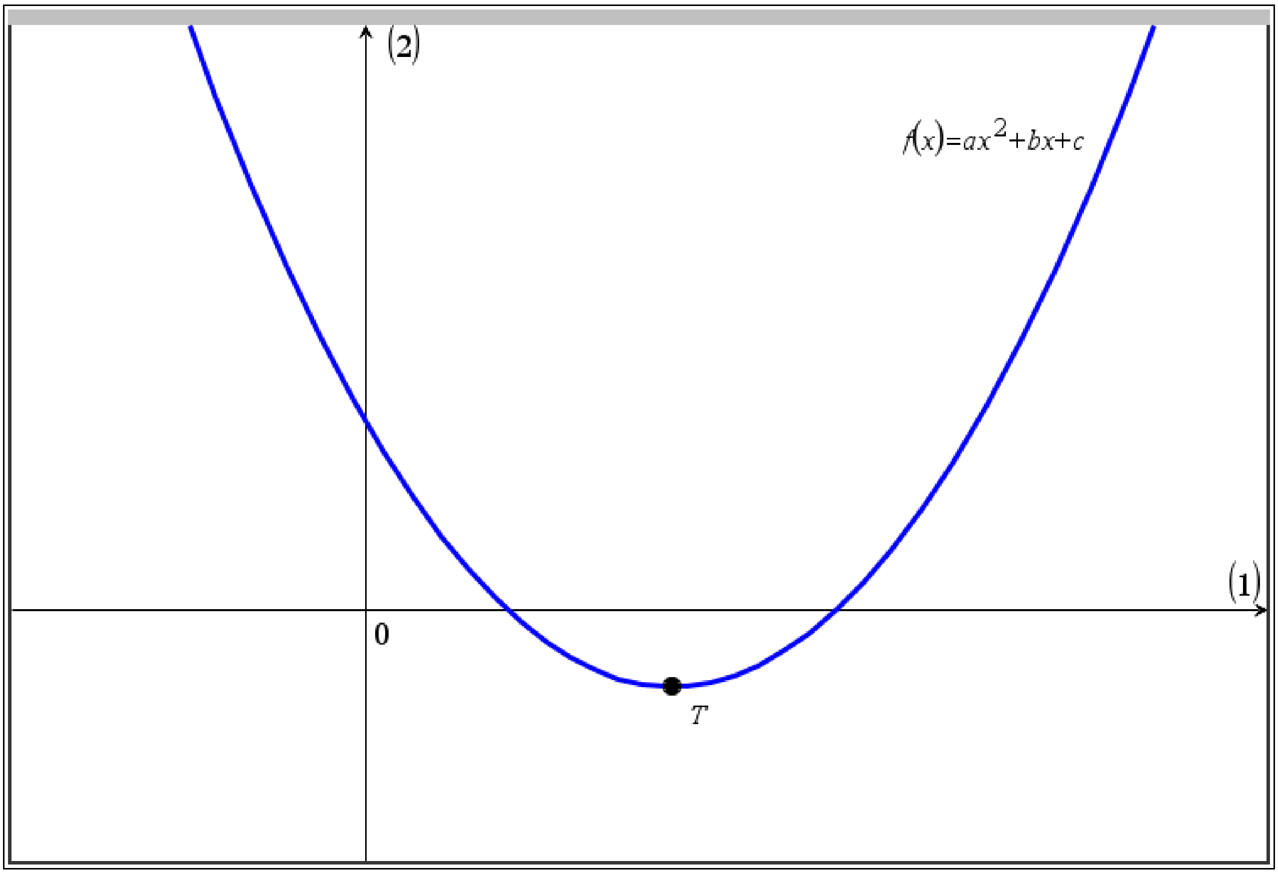
Det gælder da at toppunktet for andengradspolynomiets graf er givet ved

$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$$

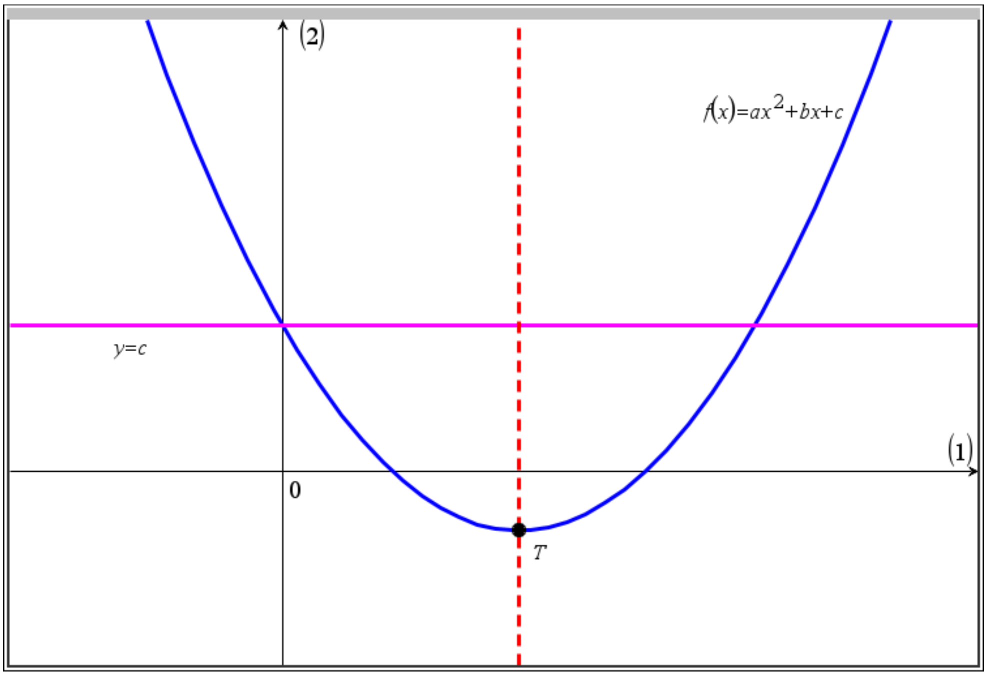
hvor d er diskriminanten som er givet ved $d = b^2 - 4ac$

Bevis

Betragt grafen for andengradspolynomiet, som vises her. Toppunktet er markeret ved punktet T.



Betragt nu linjen l: $y = c$, som er indtegnet på figuren her. Noter også at symmetriaksen for parablen vises med en rød stiplet linje.



Det gælder, at det er to skæringspunkter mellem grafen for f og linjen l. Man kan bestemme førstekoordinaten for de to punkter ved at løse ligningen $f(x) = c$, hvilket giver os en andengradsligning, der løses som følger.

$$f(x) = c$$

$$ax^2 + bx + c = c$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \ \vee ax + b = 0$$

Det giver de to løsninger:

$$x = 0 \ \vee x = \frac{-b}{a}$$

Det giver at linjen skærer grafen for andengradspolynomiet i punkterne $(0, c)$ og $\left(\frac{-b}{a}, c\right)$. Da grafen for andengradspolynomiet er symmetrisk, konstaterer vi, at førstekoordinaten for toppunktet er givet ved

$$x_T = \frac{1}{2}\left(\frac{-b}{a}\right) = \frac{-b}{2a}$$

Nu bestemmes andenkoordinaten for toppunktet trivielt ved at konstatere at:

$$\begin{aligned}
y_T = f\left(\frac{-b}{2a}\right) &= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
&= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
&= -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} \\
&= \frac{-d}{4a}
\end{aligned}$$

Dermed konstaterer man at toppunktet for andengradspolynomiet er givet ved

$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$$

$$\blacksquare$$