

## Permutationer, kombinationer og sandsynlighed ved binomialfordelingen

Beviserne her gennemføres alle vha. taleksempler, som efterfølgende udvides til det generelle tilfælde<sup>1</sup>. Derfor skal vi være opmærksomme på, at vores argumenter også vil gælde for andre værdier af  $n$  og  $r$ .

### Sætning 1. Permutationer.

Ved valg af  $r$  elementer ud af  $n$  kan dette gøres på  $P(n, r)$  måder, når rækkefølgen har betydning. Det gælder at

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

#### Bevis 1

Antag at man har en mængde med 5 elementer. Man vil vælge 3 elementer.

Det første element kan vælges på 5 måder, det andet element på 4 måder og det tredje element på 3 måder.

Det betyder, at man kan vælge elementerne på  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  måder.

Nu gennemføres følgende omskrivning:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Fra dette eksempel kan generaliseres der til

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

QED

---

<sup>1</sup> Dette er ikke normal praksis, når vi gennemfører beviser. Det accepteres i dette tilfælde på matematik B niveau, da det mere stringente bevis kræver et lidt større overblik over måden, vi skriver matematik på.

**Sætning 2. Kombinationer.**

Ved valg af  $r$  elementer ud af  $n$  kan dette gøres på  $K(n, r)$  måder, når rækkefølgen er uden betydning. Det gælder at

$$K(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$K(n, r)$  kaldes en binomialkoefficient og ses også skrevet som  $\binom{n}{r}$ .

**Bevis 2**

Igen benyttes taleksemplet fra Sætning 1, hvor der vælges 3 elementer ud af 5. Antag at mængden består af elementerne A, B, C, D og E. Fra tidligere ved vi, at vi kan vælge elementerne på  $P(n, r)$  måder, og i dette eksempel er det 60 måder.

Vær nu opmærksom på, at når rækkefølgen ikke har betydning, så er følgende valg ikke forskellige, når vi skal opstille et udtryk for  $K(n, r)$ :

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Det er ikke tilfældigt, at der er seks forskellige måder at vælge tre bogstaver på, for det svarer til at vælge 3 elementer ud af 3 på, hvilket er  $P(3,3) = \frac{3!}{0!} = 3! = 6$

Dette vil naturligvis også gælde, i tilfældet hvor fx BCE blev valgt.

Dvs. at vi ikke længere har 60 måder at vælge elementerne på, når rækkefølgen har betydning. Vi har kun  $\frac{60}{6} = 10$  måder at gøre det på.

Omformes argumenterne til et mere formelt matematisk sprog kan vi skrive:

$$K(5,3) = \frac{P(5,3)}{P(3,3)} = \frac{P(5,3)}{3!} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

Fra eksemplet generaliseres der og således gælder det at

$$K(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

QED

**Sætning 3. Sandsynlighed ved binomialfordelingen.**

For en binomialfordeling med den stokastiske variabel  $X$ , antalsparameteren  $n$  og sandsynlighedsparameteren  $p$ ,  $X \sim b(n, p)$ , da er sandsynligheden for antallet af succeser  $r$  givet ved:

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

**Bevis 3**

Vi betragter et tilfælde med  $n = 5$  og  $r = 3$ . Binomialmodellen er i dette tilfælde derfor  $X \sim b(5, p)$ .<sup>2</sup> Det betyder, at vi har 3 succeser i 5 basiseksperimenter. Idet vi benævner succes med  $s$  og fiasko med  $f$  er der forskellige muligheder. De er vist nedenfor.

I alle tilfælde er der tre succeser og to fiaskoer. Det vi noterer er, at succeserne og fiaskoerne optræder i de fem basiseksperimenter.

Basiseksp. 1	Basiseksp. 2	Basiseksp. 3	Basiseksp. 4	Basiseksp. 5
$s$	$s$	$s$	$f$	$f$
$s$	$s$	$f$	$s$	$f$
$s$	$s$	$f$	$f$	$s$
$s$	$f$	$s$	$s$	$f$
$s$	$f$	$s$	$f$	$s$
$s$	$f$	$f$	$s$	$s$
$f$	$s$	$s$	$s$	$f$
$f$	$s$	$s$	$f$	$s$
$f$	$s$	$f$	$s$	$s$
$f$	$f$	$s$	$s$	$s$

Noter nu følgende:

Fra Sætning 2 ved vi, at vi har  $K(5,3)$  forskellige kombinationer af udfald med 3 succeser og 2 fiaskoer.

(Tæller man efter ser man også, at tabellen består af netop 10 forskellige kombinationer (antallet af rækker).

Sandsynligheden for succes er  $p$  og sandsynligheden for fiasko er  $(1 - p)$ . Idet der er tre succeser og to fiaskoer, og da forsøgene er uafhængige, er sandsynligheden for  $sssff$ :

$$P(sssff) = p^3 \cdot (1 - p)^2 = p^3 \cdot (1 - p)^{5-3}$$

Det gælder også at alle rækkerne i tabellen har den samme sandsynlighed, og der er netop  $K(5,3)$  rækker. Da vi skal bestemme summen sandsynlighederne for alle tilfælde med 3 succeser og 2 fiaskoer gælder det således at:

$$P(X = 3) = K(5,3) \cdot p^3 \cdot (1 - p)^{5-3}$$

Fra eksemplet generaliseres der og således gælder det at

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

QED

<sup>2</sup> Man kan gennemføre eksemplet og gøre det generelt ved også at vælge en værdi for sandsynlighedsparameteren  $p$ , hvis man foretrækker det.