DEFINITION[1]

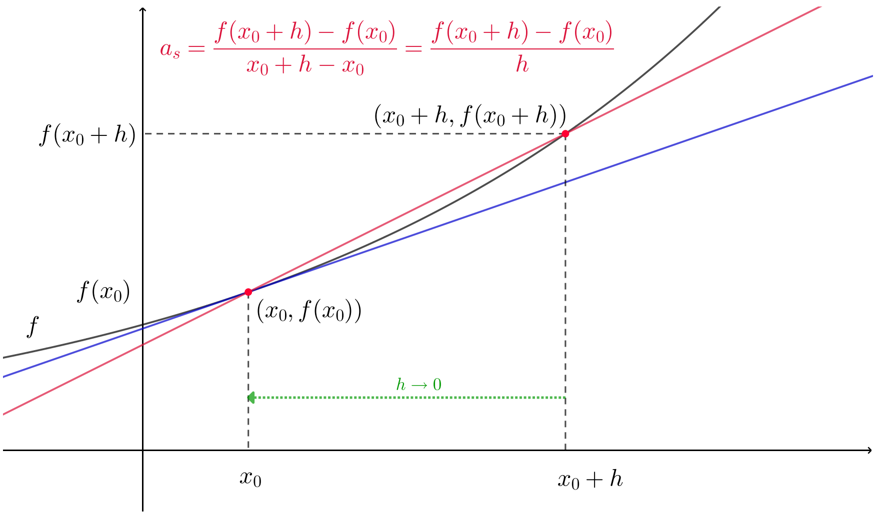
En funktion f er differentiabel i x_0 såfremt der eksisterer en grænseværdi for differenskvotienten, og i det tilfælde er grænseværdien differentialkvotienten $f'(x_0)$. Således gælder det at

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Med en anden notation skriver vi

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \text{ for } h \to 0$$

I det tilfælde, at grænseværdien eksisterer for alle x_0 i det åbne interval $]a; b[$, siges funktionen f at være differentiabel i $]a; b[$ med den afledte funktion $f'(x)$.



BEVISER - DEN OVERORDNEDE METODE[2]

For at bevise hvad differentialkvotienten er for en given funktion f, benyttes tre-trinsreglen.

Første trin

Opskriv differenskvotienten, som er det samme som sekanthældningen.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a_s$$

Anden trin

Omskriv differenskvotienten på passende vis.

Tredje trin

Lad h gå mod 0. Da går sekanthældningen mod tangenthældningen - differentialkvotienten i x_0.

---

[1] Se Definition 1.3 i Mathematicus-bogen Differentialregning for en ”stram” definition.

[2] Note: Som et alternativ til dette kan man i det første trin blot se på $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Da ser man i andet trin på $\frac{\Delta y}{h}$ og det matematiske udtryk omskrives på passende vis.

SÆTNING 1

Funktionen givet ved $f(x) = k$ har differentialkvotienten $f'(x_0) = 0$.

BEVIS VED BRUG AF TRE-TRINSREGLEN

Trin 1 - differenskvotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{k-k}{h}$$

Trin 2 - omskrivning

$$\frac{k-k}{h} = 0$$

Trin 3 - lad h gå mod 0

$$0 \to 0 \text{ for } h \to 0$$

SÆTNING 2

Funktionen givet ved $f(x) = x$ har differentialkvotienten $f'(x_0) = 1$.

BEVIS VED BRUG AF TRE-TRINSREGLEN

Trin 1 - differenskvotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)-(x_0)}{h}$$

Trin 2 - omskrivning

$$\frac{(x_0+h)-(x_0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Trin 3 - lad h gå mod 0

$$1 \to 1 \text{ for } h \to 0$$

Sætning 3

Funktionen givet ved $f(x) = ax + b$ har differentialkvotienten $f'(x_0) = a$.

Bevis ved brug af tre-trinsreglen

Trin 1 - differenskvotienten

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0+h) + b - (ax_0 + b)}{h}$$

Trin 2 - omskrivning

$$\frac{a(x_0+h) + b - (ax_0 + b)}{h} = \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Trin 3 - lad h gå mod 0

$$a \to a \text{ for } h \to 0$$

Sætning 4

Funktionen givet ved $f(x) = x^2$ har differentialkvotienten $f'(x_0) = 2x_0$.

Bevis ved brug af tre-trinsreglen

Trin 1 - differenskvotienten

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

Trin 2 - omskrivning

$$\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{(x_0^2 + h^2 + 2x_0h) - x_0^2}{h} = \frac{h^2 + 2x_0h}{h} = h + 2x_0$$

Trin 3 - lad h gå mod 0

$$h + 2x_0 \to 2x_0 \text{ for } h \to 0$$

Sætning 5

Funktionen givet ved $f(x) = x^3$ har differentialkvotienten $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Bevis ved brug af tre-trinsreglen

Trin 1 - differenskvotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h}$$

Trin 2 - omskrivning

$$\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{(x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) - x_0^3}{h} = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = 3x_0h + 3x_0^2 + h^2$$

Trin 3 - lad h gå mod 0

$$3x_0h + 3x_0^2 + h^2 \to 3x_0^2 \text{ for } h \to 0$$

Sætning 6

Funktionen givet ved $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$, har differentialkvotienten $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}, x \neq 0$.

Bevis ved brug af tre-trinsreglen

Trin 1 - differenskvotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}$$

Trin 2 - omskrivning

$$\frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+h)} - \frac{x_0+h}{x_0(x_0+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{x_0(x_0+h)}}{h} = -\frac{1}{x_0(x_0+h)}$$

Trin 3 - lad h gå mod 0

$$-\frac{1}{x_0(x_0+h)} \to -\frac{1}{x_0^2} \text{ for } h \to 0$$

SÆTNING 7

Funktionen givet ved $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, har differentialkvotienten $f'(x_0) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x_0}}$, $x > 0$.

BEVIS VED BRUG AF TRE-TRINSREGLEN

Trin 1 - differenskvotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$$

Trin 2 - omskrivning

$$\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}$$
$$= \frac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$$

Trin 3 - lad h gå mod 0

$$\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \text{ for } h \to 0$$