Sætning

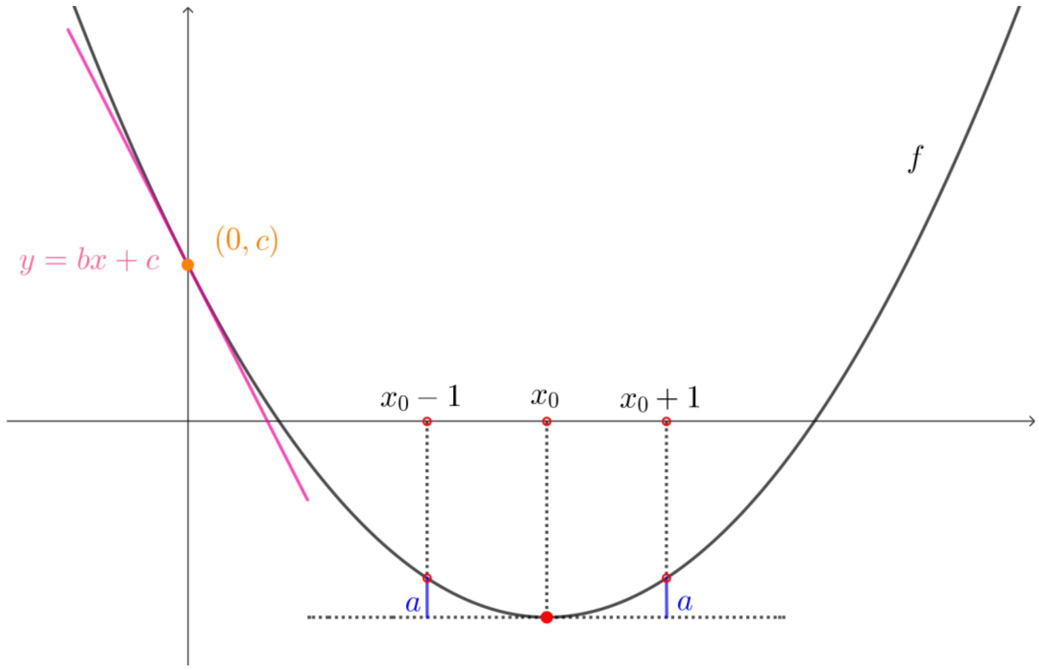
Lad et andengradspolynomium være givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ , hvor } a \neq 0.$$

Lad x_0 være ekstremumsstedet for andengradspolynomiets graf[1].

Da gælder følgende:

1. For c gælder det, at grafen for andengradspolynomiet skærer andenaksen i punktet $(0, c)$.
2. For b gælder det, at tangentens hældning i røringspunktet $(0, c)$ er b.
3. For a gælder det at[2]:
   $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah^2$ og $f(x_0 - h) = f(x_0) + ah^2$ for alle $h \in \mathbb{R}$



Figur der illustrerer sætningen for $h = 1$ og dermed $h^2 = 1$. Man ser at grafen skærer andenaksen i punktet $(0, c)$, at tangentens hældning, i røringspunktet mellem tangenten og parablen i punktet $(0, c)$, er b. Når man går negativ en eller positiv en ud fra ekstremumsstedet x_0, da ændres funktionsværdien fra $f(x_0)$ til $f(x_0) + a$. Dette er illustreret med det blå linjestykke.

[1] Husk at førstekoordinaten for toppunktet er givet ved $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

[2] Kan også skrives mere kompakt: $f(x_0 \pm 1) = f(x_0) + a$.
Bemærk, at man dermed fra viden om, at fortegnet af a viser, om parabelgrenene vender opad eller nedad. Man får også information om symmetri og bredde af parablen.

Beviser

- Vi starter med at bevise punkt 1 i sætningen.

  Idet $x = 0$ i punktet $(0, c)$ gælder det at:

  $$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

  hvilket skulle vises.

- Vi beviser punkt 2 i sætningen.

  Idet tangentens hældning i punktet $(0, c)$ er givet ved $f'(0)$ bestemmes først $f'(x)$.

  $$f'(x) = 2ax + b$$

  Deraf følger det at:

  $$f'(0) = 2a \cdot 0 + b = b$$

  hvilket skulle vises.

- Vi beviser punkt 3 i sætningen.

  Det gælder i toppunktet, at $f'(x_0) = 2ax_0 + b = 0$.

  Vi finder således at:

  $$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c \\ &= a(x_0^2 + 2x_0 h + h^2) + b(x_0 + h) + c \\ &= ax_0^2 + 2ax_0 h + ah^2 + bx_0 + bh + c \\ &= ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)h + ah^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + ah^2 \\ &= f(x_0) + ah^2 \end{aligned}$$

  hvilket skulle vises.

  Med tilsvarende overvejelser som ovenfor, gælder det at:

  $$\begin{aligned} f(x_0 - h) &= a(x_0 - h)^2 + b(x_0 - h) + c \\ &= a(x_0^2 - 2x_0 h + h^2) + b(x_0 - h) + c \\ &= ax_0^2 - 2ax_0 h + ah^2 + bx_0 - bh + c \\ &= ax_0^2 + bx_0 + c - (2ax_0 + b)h + ah^2 \\ &= f(x_0) - f'(x_0)h + ah^2 \\ &= f(x_0) + ah^2 \end{aligned}$$

  hvilket skulle vises.[3] ■

[3] Hermed er det også vist, at parablen er symmetrisk.