Sætning

Toppunktet for andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ er givet ved følgende formel:

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

Her er d diskriminenten og det er kendt at $d = b^2 - 4ac$.

Bevis.

For et andengradspolynomium er toppunktet et ekstremum. (Fremstil selv en skitse der viser det.)

Da polynomiet er givet ved $f(x) = ax^2 + bx + c$ ved vi at:

$$f'(x) = 2ax + b$$

Ved et ekstremumssted er $f'(x) = 0$ og derfor gælder det at:

$$2ax + b = 0$$

Ved at isolere x bestemmes førstekoordinaten for toppunktet, som derfor er givet ved:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

(Vis selv dette ved omskrivning.)

Idet ekstremumsstedet nu er kendt kan andenkoordinaten for toppunktet bestemmes:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{d}{4a}$$

Netop dette skulle vises. ■

Note: De ovenstående syv linjer kan relativt enkelt skrives på færre linjer, hvis man har overblik over de enkelte trin.