Regneregler der driller

Formelsamlingen har en lidt irriterende notation, når man skal bestemme $f'(x)$ af produktet af funktioner eller for en sammensat funktion. Der står følgende:

Produkt	(177)	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
		Eksempel: Hvis $f(x) = e^{3x}\cdot \ln(x)$, så er $f'(x) = 3e^{3x}\cdot\ln(x) + e^{3x}\cdot\frac{1}{x}$
Sammensat funktion	(178)	$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$
		Eksempel: Hvis $f(x) = (x^2+3x-1)^4$, så er $f'(x) = 4\cdot(x^2+3x-1)^3\cdot(2x+3)$

Det kan være lidt vanskeligt at bruge, hvis man skal bestemme $f'(x)$ for eksempelvis

$$f(x) = \sqrt{x}\cdot \ln(x)$$

eller

$$f(x) = \sqrt{(x^3 - 2x)}$$

Mulig strategi

Lad os prøve at skrive produktreglen således:

$$f(x) = u(x)\cdot v(x)$$

Så kan vi skrive formelsamlingens notation således:

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Eksempel

$$f(x) = \sqrt{x}\cdot e^{3x}$$

Vi lader $u(x) = \sqrt{x}$ så $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Vi lader $v(x) = e^{3x}$ så $v'(x) = 3e^{3x}$.

Da er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{3x} + \sqrt{x}\cdot 3e^{3x} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right)e^{3x} \end{aligned}$$

Lad os prøve at skrive formlen for sammensat funktion – kædereglen - således:

$$f(x) = u(v(x))$$

Så kan vi skrive formelsamlingens notation således:

$$\left(u\left(v(x)\right)\right)' = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x)$$

Eksempel

$$f(x) = (\ln(x))^3$$

Vi lader $u(x) = x^3$ så $u'(x) = 3x^2$.

Vi lader $v(x) = \ln(x)$ så er $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Da er

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(\ln(x))^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{3(\ln(x))^2}{x} \end{aligned}$$

Træningsopgaver

a) $f(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x$

b) $f(x) = (3x^2 - 1)^5$

c) $f(x) = x \cdot \ln(x)\,, \quad x > 0$

d) $f(x) = \sqrt{5x - 2}\,, \quad x > \frac{5}{2}$

e) $f(x) = (1 - x^3) \cdot \cos(x)$

f) $f(x) = e^{4x^3}$

g) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 2)$

h) $f(x) = \ln(2x + 5)\,, \quad x > -\frac{5}{2}$

i) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 + 1), \quad x > 0$

j) $f(x) = e^{5\sqrt{x}}, \quad x > 0$

k) $f(x) = 2\sqrt{x} + e^{5x} - x^2$

l) $f(x) = 800 \cdot \sqrt{x}$

m) $f(x) = 2 \cdot \ln(4x)$