

REGNEREGLER FOR DIFFERENTIALKVOTIENT - SUM OG DIFFERENS

Før vi starter på beviserne, forklares det, hvad vi ønsker at bevise.

På Figur 1 ser man graferne for tre funktioner f , g og $(f + g)$. På figuren er der markeret et punkt på alle tre grafer ved $x_0 = 1,5$. Ser vi nærmere på figuren konstaterer vi, at andenkoordinaten for punktet på grafen for f er 4,50, for punktet på grafen for g er andenkoordinaten 1,93 og for punktet på grafen for $f + g$ er andenkoordinaten 6,43. Vi har altså:

$$f(1,5) + g(1,5) = 4,50 + 1,93 = 6,43 = (f + g)(1,5)$$

Dette stemmer overens med vores tidligere overvejelser om at kombinere funktioner. Lægger vi altså funktionsværdierne for f og g sammen i $x_0 = 1,5$, har vi funktionsværdien for funktionen $f + g$ ved $x_0 = 1,5$. Vi definerede tidligere:

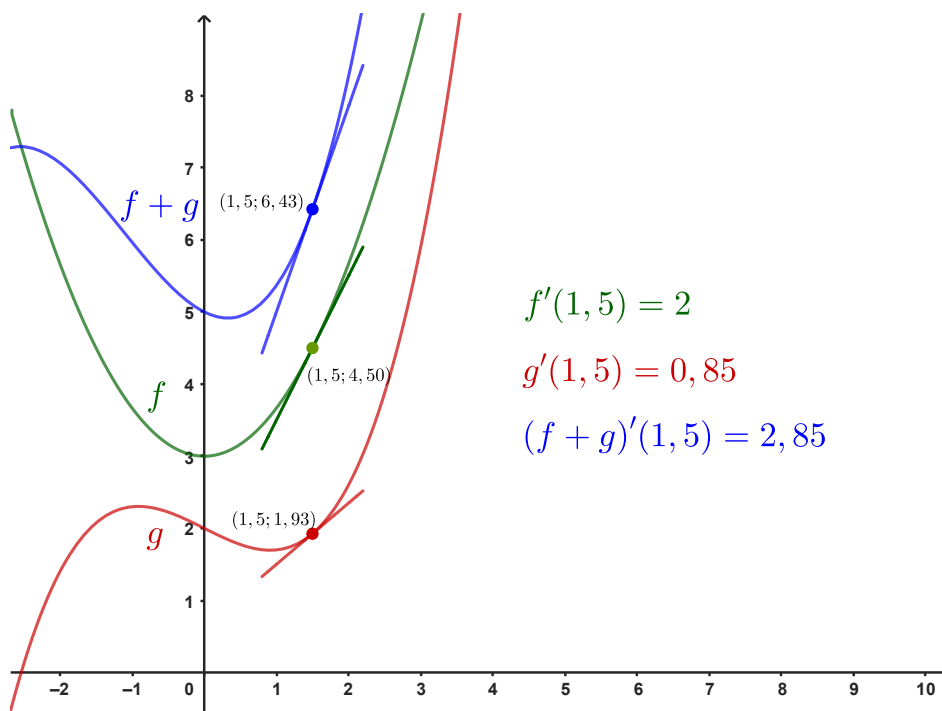
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

I den sammenhæng definerede vi også at:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

På figuren er differentialkvotienterne for de tre funktioner også vist i $x_0 = 1,5$. Husk på, at dette er et udtryk for de tre tangenters hældninger. Vi kan se, at

$$f'(1,5) + g'(1,5) = 2 + 0,85 = 2,85 = f'(1,5) + g'(1,5) = (f + g)'(1,5)$$



Figur 1 Tre grafer for funktionerne f , g og $f + g$. Ved $x_0 = 1,5$ er der i alle tre tilfælde markeret et koordinatsæt for punktet på grafen og en tangent ved dette røringspunkt. Differentialkvotienterne i $x_0 = 1,5$ er beregnet og vist på figuren.

Fra eksemplet tyder det på, at følgende regel gælder:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (1)$$

Har vi en sum af to funktioner, og vil vi bestemme den afledte funktion, så kan vi tilsyneladende blot differentiere først den ene funktion og derefter den anden funktion, og derefter lægge de to sammen.

Helt tilsvarende vil det gælde, hvis vi trækker funktionerne fra hinanden, og altså ser på deres differens. Vi kan skrive det således:

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \quad (2)$$

Disse to regneregler vil vi nu bevise. En tredje regneregul bevises til sidst i dokumentet.

I har allerede brugt de regneregler flere gange. Her er nogle eksempler, hvor vi bestemmer de afledte funktioner $f'(x)$ og $g'(x)$, ikke differentialkvotienten i et bestemt punkt x_0 .

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \ln(x), \quad x > 0$$

Husk på, at $\frac{1}{3}x^3$ og $\ln(x)$ er funktioner! Bruger vi reglen for sum har vi:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \ln(x)\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + (\ln(x))' = x^2 + \frac{1}{x}$$

Her er et eksempel for differensreglen:

$$g(x) = \sqrt{x} - x^5, \quad x \geq 0$$

Vi differentierer ved at bruge reglen:

$$g'(x) = (\sqrt{x} - x^5 - 9)' = (\sqrt{x})' - (x^5)' - (9)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5x^4$$

Med ovenstående er det forhåbentlig klart, hvad vi vil bevise.

Det er forhåbentlig også klart, hvordan dette relateres til grafer og til tangenternes hældninger på Figur 1.

SÆTNING: Lad f og g være differentiable funktioner i x_0 . Definer sumfunktionen S ved $S(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Da er S differentiable i x_0 , og det gælder at:

$$S'(x_0) = (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (3)$$

Vi benytter tretrinsreglen til at bevise dette.

BEMÆRK: Da funktionerne f og g er differentiable i x_0 , gælder det at:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \\ \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} &\rightarrow g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4)$$

BEVIS: I **første trin** opskriver vi differenskvotienten. Her er det for sumfunktionen S :

$$\begin{aligned} \frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h} &= \frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} \\ &= \frac{(f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} \end{aligned} \quad (5)$$

I det **andet trin** omskriver vi differenskvotienten og her benyttes udtrykket i (5) som start:

$$\begin{aligned} &\frac{(f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \end{aligned} \quad (6)$$

Tredje trin: Bemærk nu at brøkerne markeret med blå og rødt i (6), idet vi udnytter viden fra (4), giver os:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) + g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad (7)$$

■

SÆTNING: Lad f og g være differentiable funktioner i x_0 . Definer differensfunktionen D ved $D(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$. Da er D differentiable i x_0 , og det gælder at:

$$D'(x_0) = (f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \quad (8)$$

Vi benytter tretrinsreglen til at bevise dette.

BEMÆRK: Da funktionerne f og g er differentiable i x_0 , gælder det at:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \\ \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} &\rightarrow g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (9)$$

BEVIS: I første trin opskriver vi differenskvotienten. Her er det for differensfunktionen D :

$$\begin{aligned} \frac{D(x_0 + h) - D(x_0)}{h} &= \frac{(f - g)(x_0 + h) - (f - g)(x_0)}{h} \\ &= \frac{(f(x_0 + h) - g(x_0 + h)) - (f(x_0) - g(x_0))}{h} \end{aligned} \quad (10)$$

I det **andet trin** omskriver vi differenskvotienten og her benyttes udtrykket i (10) som start:

$$\begin{aligned} &\frac{(f(x_0 + h) - g(x_0 + h)) - (f(x_0) - g(x_0))}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - g(x_0 + h) - f(x_0) + g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - (g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \end{aligned} \quad (11)$$

Tredje trin: Bemærk nu, at brøkerne markeret med blå og rødt i (11), idet vi udnytter viden fra (9), giver os:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) - g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad (12)$$

■

REGNEREGEL FOR DIFFERENTIALKVOTIENT – KONSTANT GANGE FUNKTION

Vi beviser nu regnereglen for en konstant ganget med en differentiabel funktion.

SÆTNING: Lad f være en differentiabel funktion i x_0 og lad k være en konstant. Definer funktionen K ved $K(x) = (kf)(x) = k \cdot f(x)$. Da er K differentiabel i x_0 , og der gælder:

$$K'(x_0) = (kf)'(x_0) = k \cdot f'(x_0) \quad (13)$$

Vi benytter tretrinsreglen til at bevise dette.

BEMÆRK: Da funktionen f er differentiabel i x_0 gælder det, at:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad (14)$$

BEVIS: I første trin opskriver vi differenskvotienten. Her er det for funktionen K :

$$\frac{K(x_0 + h) - K(x_0)}{h} = \frac{kf(x_0 + h) - kf(x_0)}{h} \quad (15)$$

I det **andet trin** omskriver vi differenskvotienten og her benyttes udtrykket i (15) som start:

$$\frac{kf(x_0 + h) - kf(x_0)}{h} = \frac{k(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} = k \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (16)$$

Tredje trin: Bemærk nu, at brøken markeret med rødt i (16), idet vi udnytter viden fra (14), giver os

$$k \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \rightarrow kf'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad (17)$$

■

Afsluttende note.

Beviserne kan opskrives ved at benytte denne definition

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

i stedet for

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0$$

De to forskellige måder at skrive definitionen for differentiability af funktionen f i x_0 er omtalt i dokumentet `beviser_differentialkvotienter - 2a 25_26.pdf`.

Det samme kan naturligvis skrives for funktionen g .