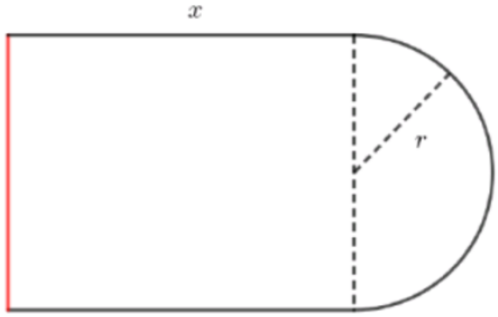
Udfordring 4 (delvis lukket)

2a har købt et stykke jord i Vanløse. De er vilde med biodiversitet, så de vil anlægge et blomsterbed, med at areal på 20 m^2. Bedet skal være formet som et rektangel, der er sat sammen med en halvcirkel. Her er en skitse af blomsterbedet, se figuren.



a) Hvor langt er det røde linjestykke.

Da der skal placeret nogle meget dyre sten rundt om hele bedet, skal 2a gøre omkredsen af bedet så lille som mulig.

b) Hvordan skal blomsterbedet designes?

Metoden fra webmatematik_b side 62.

Opskrift

Her følger en opskrift på hvordan du løser optimeringsproblemer

1. Opskriv den funktion, du skal optimere
2. Opskriv den bibetingelse, du er blevet givet.
3. Isoler den ene variabel i bibetingelsen
4. Indsæt udtrykket for denne variabel i den funktion, du skal optimere.
5. Nu står du tilbage med en funktion af en variabel.
6. Differentier funktionen
7. Løs ligningen f '(x)=0
8. Bestem fortegnene for f ' mellem løsningerne
9. Tegn monotonilinjen

Metoden fra Differentialregning (Mathematicus) side 52.

1. Opstil en ligning ud fra en betingelse der er givet i opgaven (f.eks. fast omkreds, fast areal, fast rumfang). Isolér herefter én af de variable i den opstillede ligning.
2. Opstil et udtryk for den størrelse der skal optimeres, og erstat en af de variable i udtrykket med det udtryk man fandt frem til under punkt. 1. Man står nu med en funktion af én variabel.
3. Bestem ekstrema for den funktion man fandt frem til under punkt 2. Bestem evt. de resterende mål.

Blomsterbedets areal bestemmes ved at bestemme arealet af et rektangel med sidelængderne 2r og *x*, samt en halvcirkel med radius *r*. Det skal gælde at $r>0$ og $x>0$.

Arealet af blomsterbedet er dermed

$$A=2rx+\frac{1}{2}\pi r^2$$

Omkredsen af blomsterbedet skal gøre så lille som mulig. Omkredsen af blomsterbedet er givet ved tre sider i rektanglet og det halve af cirklens omkreds. Det er derfor

$$\mathbf{O} = 2\cdot r+2\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \pi\cdot r = 2\cdot r+2\cdot x + \pi\cdot r$$

Det skal gælde (bibetingelsen/kravet), at arealet af blomstebedet er 20 m^2. Derfor har man følgende:

$$20=2rx+\pi r$$

Her isoleres *x* , så man kan udtrykke omkredsen ved en enkelt variabel.

NOTE − man kan gøre dette ved håndkraft eller med Nspire. Bruges Nspire skal man skrive, hvad man gør, men her vises kommandoen blot.

$$\text{solve}\left(20=2\cdot r\cdot x+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2,x\right) \blacktriangleright x=\frac{-\left(\pi\cdot r^2-40\right)}{4\cdot r}$$

Nu indsættes udtrykket for x i udtrykket for omkredsen, hvilket giver:

NOTE − igen kan dette gøres på pen og papir. Her bliver det blot gjort i Nspire, og man skal forklare, hvad man gør.

$$\mathbf{O} = 2\cdot r+2\cdot\left(\frac{-\left(\pi\cdot r^2-40\right)}{4\cdot r}\right)+\pi\cdot r$$

NOTE − dette kan reduceres, men det er ikke strengt nødvendigt for at løse opgaven.

Nspire gør det ved blot at taste ENTER ved ovenstående matematikfelt.

Man bestemmer minimum for udtrykket der beskriver omkredsen ved først at differentiere.

Her introduceres funktionen *o* der betegner omkredsen af blomsterbedet med radius *r*. Funktionen defineres i Nspire.

$$\mathbf{o}(r):=2\cdot r+2\cdot\frac{-\left(\pi\cdot r^2-40\right)}{4\cdot r}+\pi\cdot r \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$

Funktionen *o* differentieres ved at bruge kommandoen `derivative(o(r),r)`, og den afledte funktion kalder vi i Nspire for *om*.

$$\mathbf{om}(r):=\frac{d}{dr}\left(\mathbf{o}(r)\right) \ \blacktriangleright\ \mathit{Udført}$$ NOTE − igen er Nspire benyttet − opgaven KAN løses i hånden.

Dermed er $o'(r)$, som i Nspire er $om'(r)$, bestemt som: $\mathbf{om}(r)=\dfrac{(\pi+4)\cdot r^2-40}{2\cdot r^2}$ ⚠

Nu bestemmes ekstremumssteder ved at løse ligningen $\mathbf{o}'(r)=0$ med solve−kommandoen i Nspire.

$\text{solve}\left(\mathbf{om}(r)=0,r\right) \ \blacktriangleright\ r=^-2.36664 \text{ or } r=2.36664$ ⚠

Da radius for cirklen ikke kan være et negativt tal, er blomsterbedet enten størst eller mindst når radius for cirklen er 2,37 m.

For at bestemme, om der er tale om et minimumssted, indsættes værdier for *r* i funktionen *o'* i to tilfælde:

Tilfælde 1: $0< r < 2{,}37$.

Beregning med Nspire giver: $\mathbf{om}(1) \ \blacktriangleright\ ^-16.4292$ ⚠

Tilfælde 2: $r > 2{,}37$.

Beregning med Nspire giver: $\mathbf{om}(10) \ \blacktriangleright\ 3.3708$ ⚠

Dermed ved vi, at funktionen *o* er aftagende før ekstremumsstedet og voksende efter ekstremumsstedet. Derfor er der tale om et minimum.

For at bestemme længden af x indsættes $r = 2{,}37$ m i udtrykket fra tidligere:

$$x=\frac{-(\pi\cdot r^2-40)}{4\cdot r}$$

som med r bestemt tidligere giver

$$x=\frac{-(\pi\cdot (2.36664)^2-40)}{4\cdot 2.36664} \blacktriangleright x=2.36665$$

hvor beregningen er foretaget med Nspire.

Blomsterbedet får den mindste omkreds når sidelængden x er 2,37 m og radius i halvcirklen er 2,37 m.