Hotelpriser og profit

Brug matematik, herunder differentialregning, til at hjælpe en hotelejer med at tjene penge.

Hvis man driver et hotel, ønsker man, som i de fleste virksomheder, at maksimere profitten.

Indtægten, når man driver et hotel, kommer fra prisen på den leje man tager for en overnatning. Samtidig må der være en sammenhæng mellem den pris man tager i leje og antallet af værelser man kan udleje – er prisen for høj vil man kunne udleje færre værelser, end hvis man sætter prisen lavere.

Hvis vi opskriver det som funktionsudtryk må det gælde at:

- Indtægten per nat, i, er afhængig af det antal værelser, n, man lejer ud, hvilket kan skrives som $i(n)$.
- Antallet af værelser, n, man udlejer er afhængig af den leje (pris) man tager per overnatning, p, og kan skrives som $n(p)$.

Kombineres de to udtryk kan indtægten per nat udtrykkes som funktion af lejeprisen, hvilket skrives som $i(p)$. Den samlede indtægt er givet ved

$$i(p) = p \cdot n(p)$$

Opgave 1: Overbevis dig selv og din makker om, at ovenstående sammenhæng er rigtig. Hvad er det egentlig, der står i det matematiske udtryk? Hvilken variabel er den uafhængige variabel og hvilken variabel er den afhængige? Hvorfor skal man gange $n(p)$ med p?

Det viser sig, at når hotelejeren sætter en pris på 800 kr./nat for at en gæst kan leje et værelse, så udlejer hotelejeren alle de 150 værelser, der er på hotellet. Lad os beregne indtægten i dette tilfælde.

Her gælder det altså at $p = 800$, og der udlejes 150 værelser, så det gælder at:

$$n(800) = 150$$

For at beregne indtægten benytter vi os af formlen $i(p) = p \cdot n(p)$

$$i(800) = 800 \cdot 150 = 120000$$

Hotelejerens indtægt i denne situation er 120.000 kr.

Opgave 2: Gennemgå ovenstående tilfælde med din makker. Overbevis jer om, at I forstår tankegangen her.

Opgave 3: Hvorfor gælder det at $0 \leq n(p) \leq 150$?
Kan $n(p)$ i den virkelige verden være alle mulige tal, eller gælder der noget specielt?

Hotelejeren, som altså har 150 værelser til rådighed, ønsker at tjene flere penge og hæver derfor gradvist prisen. Han finder efter noget tid ud af, at han kan opstille en god matematisk model, som viser, at hver gang han hæver prisen med 10 kr./nat, så udlejer han et værelse mindre per nat.

Når prisen hæves udlejes der altså færre værelser.

Opgave 4: Beregn indtægten hvis hotelejeren sætter udlejningsprisen for et værelse til hhv. 820 kr./nat, 840 kr./nat og 860 kr./nat.

Opgave 5: Kommenter dine resultater fra opgave 4. Hvilken tendens observerer man? Diskuter med din makker om tendensen fortsætter.
Beregn hvor mange værelser man vil kunne udleje, hvis prisen sættes til 2300 kr./nat.

Opgave 6: Overbevis dig selv om at man kan generalisere antallet af værelser, der kan lejes ud, og at man kan skrive det som

$$n(p) = 150 - \frac{p - 800}{10}$$

Tal sammen om hvad de enkelte tal i udtrykket betyder. Hvad er det brøken $\frac{p-800}{10}$ beregner?

Vi kan nu opstille denne funktion (det nederste udtryk neden for) for indtægten, hvor n ikke længere indgår direkte:

$$i(p) = p \cdot n(p)$$
$$i(p) = p \cdot \left(150 - \frac{p - 800}{10}\right)$$

Opgave 7: Vis - brug pen og papir (!) - at man kan reducere udtrykket for indtægten til

$$i(p) = -0{,}1p^2 + 230p$$

- Start med at gange p ind i parentesen. Efterfølgende skal der arbejdes med at omskrive brøken.

Opgave 8:

- Tegn grafen for indtægten, det er funktionsforskriften for $i(p)$, i Nspire, og tal med din makker, om hvad grafen viser. Hvilke størrelser er repræsenteret på akserne?
  Hvilke værdier af p er relevante? Tænk på det, når du har tegnet grafen.

- Aflæs med et værktøj og en kommando, hvor på grafen indtægten bliver størst. (Kommandoen `fMax(f(x),x)` skal bruges, men ikke nødvendigvis med `f` og `x`.)

- Afgør hvilken udlejningspris man skal tage per værelse, for at maksimere indtægten. Hvad bliver indtægten i det tilfælde? Hvad er ekstremumspunktets koordinatsæt?

- Hvor mange værelser bliver udlejet, når man skal betale den pris.

- Benyt kommandoen `tangentline` i Nspire til at vise linjen for den tangent til grafen for funktionen i, som har røringspunkt ved ekstremumspunktet.

- Betragt grafen for funktionen i, som beskriver indtægten: Hvad er hældningen for den tangent, der har røringspunkt ved ekstremumspunktet?
  Hvordan opskriver man et matematisk udtryk, som inkluderer et begreb fra differentialregning, når man med differentialregning vil beregne ekstremumsstedet og kender funktionsforskriften $i(p) = -0{,}1p^2 + 230p$?

Opgave 9: Brug regnereglerne fra formelsamlingen til at forklare, at nedenstående er korrekt.

$$i'(p) = 0$$
$$(-0{,}1 \cdot p^2 + 230 \cdot p)' = 0$$
$$(-0{,}1 \cdot p^2)' + (230 \cdot p)' = 0$$
$$-0{,}2 \cdot p + 230 = 0$$

Benyt derefter Nspire til at vise, at ovenstående gælder. (Differentier funktionen i ved at bruge Nspire.)

Løs herefter ligningen $i'(p) = 0$ med hensyn til udlejningsprisen, p, og sammenlign den fundne værdi for indtægten med svaret i opgave 8.

Opgave 10: Løsningen du har vist og beregnet i opgave 8 og 9 er et globalt maksimum – dvs. der hvor funktionsværdien er størst. Hvad gælder der om tangentens hældningen i punkter på grafen hhv. før og efter ekstremumspunktet? Og gælder det altid for et globalt (eller lokalt) maksimum? Hvad ville gælde, hvis der var tale om et globalt eller lokalt minimum?

I det ovenstående har vi antaget, at indtægten svarer til profitten, men i virkeligheden er der også udgifter forbundet med at drive et hotel – det kan være alt fra afdrag på lån til bygningen til personaleomkostninger

Vi kan derfor opstille et udtryk for profitten/overskuddet, o, som værende forskellen mellem indtægter, i, og udgifter, u.

Da vi allerede har et funktionsudtryk for vores indtægter som funktion af lejeprisen, ønsker vi også at frembringe et udtryk for vores udgifter som funktion af lejeprisen.

Derefter kan vi udregne profitten som funktion af lejeprisen, $o(p) = i(p) - u(p)$.

Udgifterne skal derfor opskrives, og vi deler dem op i faste udgifter, som er <u>uafhængige</u> af, hvor mange værelser der lejes ud og variable udgifter, som er <u>afhængige</u> af, hvor mange værelser, der udlejes.

Opgave 11: Tal med din makker om hvordan et udtryk for udgifterne ser ud hvis man har faste udgifter for 35.000 kr./nat og variable udgifter for 120 kr./nat/værelse. Opskriv herefter udtrykket for udgifterne som funktion af lejeprisen, $u(p)$.

Opgave 12: Vis at profitten i ovenstående kan udtrykkes som

$$o(p) = i(p) - u(p)$$
$$o(p) = -0{,}1p^2 + 242p - 62600$$

Opgave 13: Gentag proceduren i opgave 9 og vis at den største profit opnås hvis man sætter udlejningsprisen til 1210 kr.
Vis det efterfølgende også grafisk, ved at tegne grafen for funktionen o.

Opgave 14: Hvor stor bliver profitten? Besvar spørgsmålet ved beregning og ved aflæsning på en graf.

Opgave 15: Hvor mange tomme værelser har man, når hotelejeren lejer værelserne ud til 1210 kr.?

Opgave 16: Diskuter med din makker, om det kan betale sig for hotelejeren at have (så mange) tomme værelser hver nat, og om hotelejeren kan finde en måde at tjene flere penge på.