Først erindrer vi, at for en annuitetsopsparing gælder det at

- **Man indbetaler et beløb *b***
- **Man får renter af dette beløb ved afslutningen af en termin (således får man ikke renter af det beløb, som man indsætter ved afslutningen af det sidste termin.**

Sætning

Lad det for en annuitetsopsparing gælde at A_n er saldoen efter den sidste (n'te) opsparing, b er indbetalingen pr termin - altså ydelsen, r er vækstraten, n er antallet af indbetalinger og endelig er $a = 1 + r$ fremskrivningsfaktoren. Da gælder det at:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bevis

Antag nu, at vi får renter n gange, hvor n for argumentets skyld her er større end eller lig med seks. Vi starter med at sætte ydelsen b ind på kontoen - dette er den første indbetaling. Vi får renter på dette beløb ved de efterfølgende terminer op til det n'te termin. Således har vi efter n terminer fået rente $n-1$ gange.
Ved den anden indbetaling indsættes igen ydelsen b. Vi får renter af dette beløb $n-2$ gange.
Ved den tredje indbetaling indsættes igen ydelsen b. Vi får renter af dette beløb $n-3$ gange.
…
Ved den n'te indbetaling indsættes igen ydelsen b. Vi får *ikke* renter af dette beløb.

Det totale beløb efter n terminer er derfor givet ved summen af ovenstående beløb:

$$\begin{aligned} A_n &= b \cdot a^{n-1} + b \cdot a^{n-2} + b \cdot a^{n-3} + \cdots + b \cdot a^1 + b \cdot a^0 \\ &= b \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a^1 + a^0) \\ &= b \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a + 1) \qquad (1) \end{aligned}$$

Lad det gælde at $S = (a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a + 1)$.

Da kan vi skrive (1) som $A_n = b \cdot S$.

Trivielt gælder det at:

$$a \cdot S = a \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a + 1) = (a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a)$$

Nu betragter vi $(a-1) \cdot S$, hvilket kan skrives om:

$$\begin{aligned} (a-1) \cdot S &= a \cdot S - S \\ &= (a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a) - (a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a + 1) \\ &= a^n - 1 \end{aligned}$$

Vi har derfor givet at:

$$(a-1) \cdot S = a^n - 1$$

Derfor gælder det at:

$$S = \frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Da vi fra tidligere har at $A_n = b \cdot S$ gælder det derfor at:

$$A_n = b \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

■