Sætning

Antag, at to linjer l og m er givet ved

$$\begin{aligned} l: &\quad y = ax + b \\ m: &\quad y = cx + d \end{aligned}$$

hvor $a \neq 0$ og $c \neq 0$.

Er linjerne ortogonale, gælder det, at $ac = -1$.

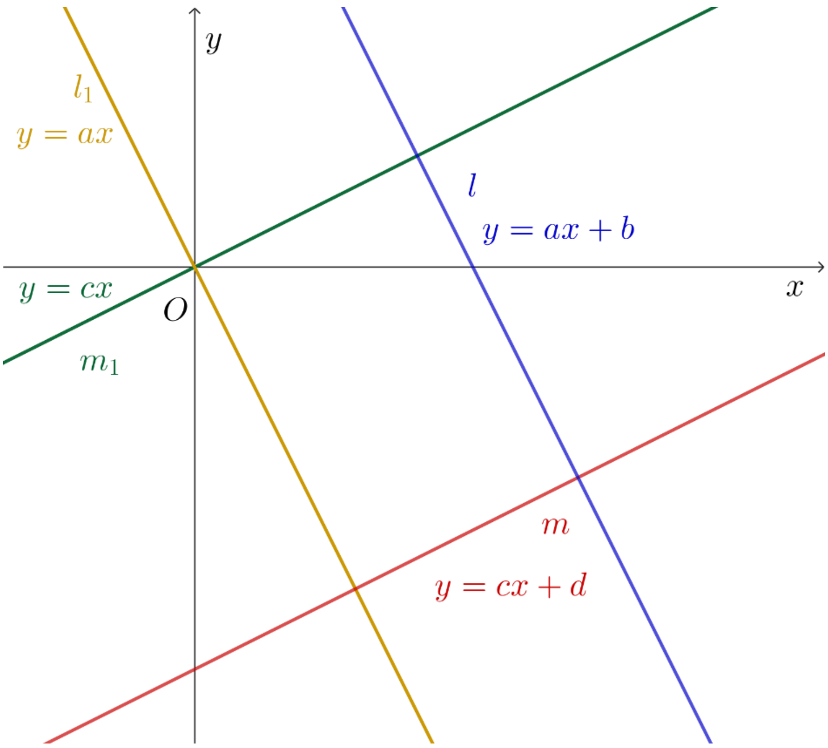
Bevis

Lad linjerne l og m være ortogonale med ligningerne $y = ax + b$ og $y = cx + d$. Vi kan parallelforskyde linjerne, så deres skæringspunkt kommer til at ligge i origo. De er stadig ortogonale efter parallelforskydningen.

De parallelforskudte linjer kalder vi l_1 og m_1. De har ligningerne

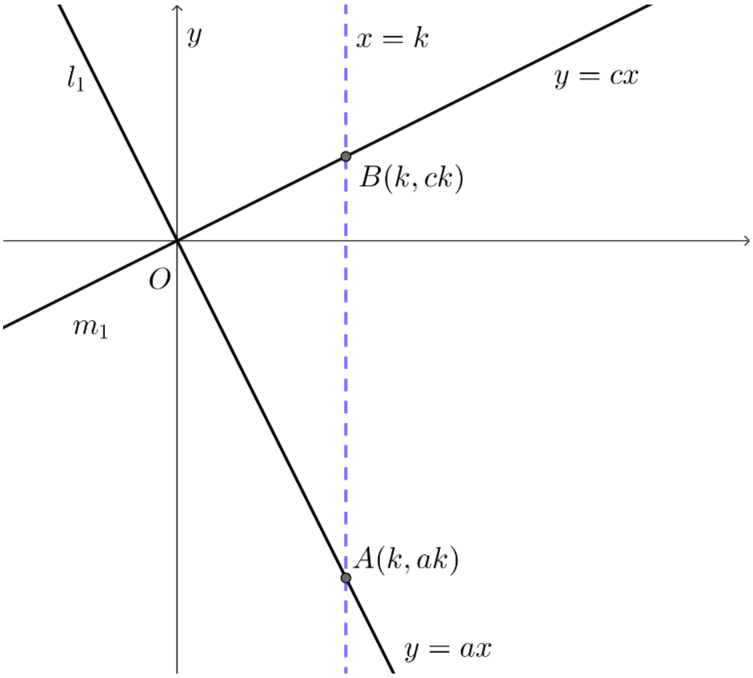
$$\begin{aligned} l_1: &\quad y = ax \\ m_1: &\quad y = cx \end{aligned}$$

Se figur 1. Her er linjerne m og l tegnet sammen med de parallelforskudte linjer l_1 og m_1. Læg mærke til, at linjerne stadig er ortogonale efter parallelforskydningen.



Figur 1

Se figur 2. Her er linjerne l_1 og m_1 tegnet sammen med den lodrette linje $x = k$, hvor $k \neq 0$.



Figur 2

Det gælder, at $\angle AOB$ er 90 °. Da $\triangle\ AOB$ er retvinklet, benyttes Pythagoras' sætning.

Overvej overgangen fra (1) til (2) grundigt. Inddrag figuren, og overbevis dig selv om, at du forstår det trin. Man bruger, at der er to retvinklede trekanter i $\triangle\ AOB$. Marker de to trekanter på figur 2. Man bruger Pythagoras' sætning for de to trekanter til at bestemme $|OA|^2$ og $|OB|^2$.

Fra (4) til (5) dividerer man med k^2. Argumenter for, at det er en lovlig matematisk handling.

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 \tag{1}$$

$$(ck - ak)^2 = (k^2 + (ak)^2) + (k^2 + (ck)^2) \tag{2}$$

$$c^2k^2 + a^2k^2 - 2ack^2 = 2k^2 + a^2k^2 + c^2k^2 \tag{3}$$

$$-2ack^2 = 2k^2 \tag{4}$$

$$-2ac = 2 \tag{5}$$

$$ac = -1 \tag{6}$$

■