MATHHX A

Benjamin Teglbjærg

23. januar 2025

Indhold

Kapitel 1

Integralregning

Integralregning er tæt knyttet til differentialregning. I første omgang vil emnet handle om at bestemme forskrifter for funktioner ud fra kendskab til deres differentialkvotient, men senere vil vi se, at integralregning også kan bruges til at finde arealer under kurver, hvilket er overraskende nyttigt – også indenfor økonomi. F.eks. kan man beregne Gini-koefficienter med integralregning.

Udover at være nyttigt i sig selv, er integralregning også en forudsætning for mange andre vigtige emner som f.eks. differentialligninger.

1.1 Stamfunktioner

Definition 1.1.1

Lad f være en funktion. En *stamfunktion* til f er en funktion F, som opfylder

$$F'(x) = f(x)$$

En stamfunktion til f er altså en funktion som giver f, når man differentiere den.

Eksempel 1.1.1

Funktionen $F(x) = x^2$ er en stamfunktion til funktionen $f(x) = 2x$, fordi

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Øvelse 1.1.1

Undersøg:

a) Er $F(x) = 4x$ en stamfunktion til $f(x) = 4$?

b) Er $F(x) = 2x^6$ en stamfunktion til $f(x) = 4x^5$?

Eksempel 1.1.2

Vi vil bestemme en stamfunktion til $f(x) = 3x^2+1$. Vi skal altså finde et udtryk, som giver $3x^2 + 1$ når man differentiere det.

Vi husker fra differentialregning, at x^3 differentieret giver $3x^2$, og at x differentieret giver 1. Derfor gætter vi på at svaret er $F(x) = x^3 + x$. Vi tester:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3x^2 + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Den var god nok.

Der er regler til at finde stamfunktioner (for simple funktioner), men ofte kan man tænke sig frem til stamfunktionen, ud fra den viden man har fra differentialregning.

Eksempel 1.1.3

Vi vil bestemme en stamfunktion til $f(x) = x^4$.

Vi leder først efter noget som giver x^4, når man differentiere det. Vi prøver x^5, fordi vi kan huske at man trækker en fra eksponenten, når man differentiere en potensfunktion. Men x^5 differentieret giver $5x^4$, og det var ikke helt det vi skulle have. Vi kan dog reparere på det ved at gange med $\frac{1}{5}$, så vi får

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5.$$

Vi tester vores svar:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{5} \cdot 5x^4 \\ &= x^4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Den var god nok.

Øvelse 1.1.2

Bestem en stamfunktion til følgende funktioner

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = 3x^2 - x^5 + 2$

Metoden vi lige har brugt virker kun for simple funktioner, hvor man hurtigt kan gennemskue hvad stamfunktionen må være. Det viser sig, at det generelt er sværere at bestemme stamfunktioner, end det er at differentiere. Er funktionen simpel er det dog nemt nok. Man slår bare stamfunktionen op i en tabel.

Eksempel 1.1.4

Vi vil bestemme en stamfunktion til $f(x) = \ln(x)$, men vi kan ikke lige komme i tanke om noget som giver $\ln(x)$ når man differentiere det. Vi åbner formelsamlingen, finder en tabel over stamfunktioner og ser at stamfunktionen er

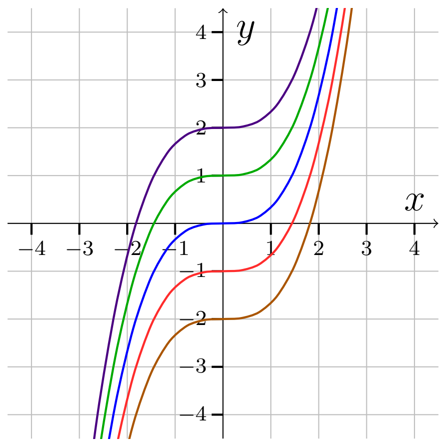
$$F(x) = x\ln(x) - x.$$

Øvelse 1.1.3

Lad $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Bestem en stamfunktion til f.

I eksempel 1.1.1 så vi at $F(x) = x^2$ var en stamfunktion til $f(x) = 2x$, men det er ikke den eneste stamfunktion. Vi kunne i stedet vælge f.eks. $F(x) = x^2 + 1$, eller hvad med $F(x) = x^2 + 27$? Hvis man differentiere dem, så får man også f. Helt generelt gælder der, at hvis F er en stamfunktion til f, så er $F(x)+c$, hvor c er en konstant, også en stamfunktion til f. Der findes dog ikke andre stamfunktioner til f end dem på formen $F(x)+c$, og det betyder at vi kan fastlægge en stamfunktion ved at kræve, at dens graf skal gå igennem et punkt.



Stamfunktioner for $f(x) = x^2$. Vi har $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ med $c = -2$, $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$.

Eksempel 1.1.5

Lad $f(x) = 2x$. Vi vil bestemme den stamfunktion til f, som går igennem punktet $P(4, 5)$.

Vi finder først en stamfunktion, men denne gang lægger vi et c til. Vi får så

$$F(x) = x^2 + c.$$

Vi mangler nu bare at finde ud af hvad c skal være, for at grafen for stamfunktionen kommer til at gå igennem P. Hvis funktionen skal gå igennem P, så skal $F(4) = 5$. Det giver os ligningen:

$$4^2 + c = 5$$

Vi isolerer c og får $c = -11$. Altså er forskriften

$$F(x) = x^2 - 11.$$

Øvelse 1.1.4

Lad $f(x) = 4x - 1$.

a) Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går igennem punktet $P(1, 3)$

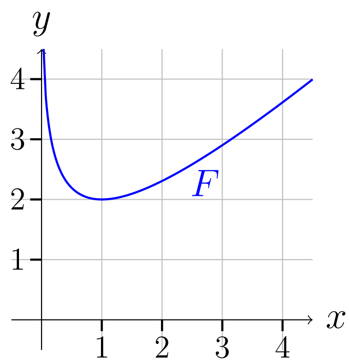
Øvelse 1.1.5

Lad $f(x) = e^x + 2x$.

a) Bestem den stamfunktion F, der opfylder $F(0) = -7$

Øvelse 1.1.6

Her ses grafen for en stamfunktion F til $f(x) = -\frac{1}{x} + 1$.



a) Bestem først ud fra forskriften for f en forskrift for F på formen $F(x)+c$.

b) Aflæs nu et pænt punkt på grafen og bestem ud fra det konstanten c.

c) Opskriv den endelige forskrift for F

Man kan undre sig over, om alle funktioner har stamfunktioner. Det viser sig at der findes funktioner, som ikke har stamfunktioner, men hvis en funktion er *kontinuert*, så har den også en stamfunktion. Derfor vil vi ofte kræve at funktioner er kontinuerte ,når vi opskriver sætninger – så er vi sikre på at funktionerne har stamfunktioner. Vi husker at en funktion, løst sagt, er kontinuert, hvis grafen er sammenhængende (den er uden huller eller hop). I praksis er det ikke noget som vi vil bekymre os om, når vi regner opgaver.

1.2 Ubestemte integraler

I sidste afsnit lærte vi, at når vi har en funktion f og en stamfunktion F, så kan samtlige stamfunktioner skrives på formen $F(x) + c$. Det motiverer følgende definition:

Definition 1.2.1

Lad f være en funktion og $F(x)$ en stamfunktion til f. Det *ubestemte integral af f* er givet ved:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

hvor c er en arbitrær konstant.

Ordet arbitrær betyder i denne sammenhæng ”ikke videre bestemt”. På den måde kan man opfatte $\int f(x)\,dx$ som at være en repræsentant for *samtlige* stamfunktioner til f. Integralet er altså *ubestemt*, fordi det ikke giver en konkret stamfunktion. Det er først når c får en værdi, at vi får en konkret stamfunktion. Notationen dx betyder at det er x som er variablen. Derfor læses $\int f(x)\,dx$ også nogle gange som *det ubestemte integral af f af x med hensyn til x*. Symbolet $\int$ kaldes et *integraltegn*, $f(x)$ kaldes *integranden* og c kaldes *integrationskonstanten* . At regne det ubestemte integral kaldes også at *integrere*

Eksempel 1.2.1

Vi vil bestemme $\int 5^x\,dx$. Dvs. at vi skal finde en stamfunktion til 5^x og så lægge c til. Vi slår stamfunktionen op i formelsamlingen, og får i alt:

$$\int 5^x\,dx = \frac{1}{\ln(5)}5^x + c$$

Øvelse 1.2.1

Med udgangspunkt i eksemplet oven over, skal du svare på følgende spørgsmål:

a) Hvad er integranden ?

b) Hvad har vi integreret med hensyn til?

c) Med hvilket bogstav har vi betegnet integrationskonstanten?

Øvelse 1.2.2

Regn følgende ubestemte integraler

a) $\int 2x\,dx$

b) $\int \ln(x)\,dx$

Det er ikke altid variablen hedder x. Det skal man dog ikke lade sig forvirre af. Det ændrer ikke noget i metoden.

Øvelse 1.2.3

Regn følgende ubestemte integraler

a) $\int 2t^4\,dt$

b) $\int \sqrt{u} + 10\,du$

Der gælder følgende regler for ubestemte integraler:

Sætning 1.2.1

Lad f og g være kontinuerte funktioner og k en konstant som ikke er nul. Så gælder følgende regneregler:

1. $\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$
2. $\int \left(f(x) + g(x)\right)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
3. $\int \left(f(x) - g(x)\right)\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$

Vi har allerede fundet stamfunktioner som har form som dem i sætningen (f.eks. i eksempel 1.1.2). Men indtil nu har vi været nødt til at gætte og så tjekke ved at differentiere. Nu hvor vi har sætningen behøver vi ikke at tjekke at den fundne funktion rent faktisk er en stamfunktion.

Eksempel 1.2.2

Vi vil regne $\int 5x^2\, dx$. Vi bruger reglen $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$:

$$\int 5x^2\, dx = 5 \int x^2\, dx = 5\frac{1}{3}x^3 + c = \frac{5}{3}x^3 + c$$

Eksempel 1.2.3

Vi vil regne $\int x^2 + e^x\, dx$. Vi bruger reglen $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + e^x)\, dx &= \int x^2\, dx + \int e^x\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + c_1 + e^x + c_2 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + e^x + c\end{aligned}$$

Til sidst har vi samlet de to integrationskonstanter i en konstant $c = c_1 + c_2$. Normalt vil man dog springe mellemregningerne over og bare skrive:

$$\int (x^2 + e^x)\, dx = \frac{1}{3}x^3 + e^x + c.$$

Det betyder ikke at reglen er unødvendig. Vi har stadig brugt den – det fremgår bare ikke at den måde, vi har skrevet det op.

Øvelse 1.2.4

Bestem vha. sætning 1.2.1 følgende stamfunktioner. Skriv hvilken regel du bruger.

a) $\int x^2 + 2x \, dx$

b) $\int 5e^x \, dx$

c) $\int 4x^3 + 5^x - 1 \, dx$

d) $\int \frac{5}{x} \, dx$

1.3 Bestemte integraler

Jeg fortalte i indledning, at man kunne bruge integralregning til at bestemme arealer. Arealbestemmelse foregår vha. det som kaldes *bestemte integraler*, og det er emnet for dette afsnit. Først i et senere afsnit, vil vi se, hvordan de bestemte integraler kan bruges til at finde arealer.

Definition 1.3.1

Lad f være en funktion og F en stamfunktion til f. For to reelle tal a og b er det *bestemte integral* af f fra a til b givet ved:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Tallet a kaldes den *nedre grænse* og tallet b kaldes den *øvre grænse*.

At regne et bestemt integral, med grænserne a og b, kaldes også at *integrere fra a til b*.

Når vi regner bestemte integraler, vil vi altid benytte skrivemåden:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Skrivemåden gør det nemmere at overskue processen.

Eksempel 1.3.1

Vi vil bestemme det bestemte integral: $\int_3^5 2x \, dx$.

$$\begin{aligned}\int_3^5 2x\,dx &= \left[x^2\right]_3^5\\ &= 5^2 - 3^2\\ &= 16.\end{aligned}$$

Altså er

$$\int_3^5 2x\,dx = 16.$$

Læg mærke til at det bestemte integral er et tal og ikke en funktion. Læg også mærke til at det er et *bestemt* tal. Det afhænger ikke at hvilken en stamfunktion man vælger (se næste øvelse).

Øvelse 1.3.1

Betragt det bestemte integral $\int_3^5 2x\,dx$ fra eksempel 1.3.1.

a) Regn integralet, men brug nu stamfunktionen $F(x) = x^2 + 7$. Får du samme tal som i eksemplet?

b) Forklar hvorfor det ikke spiller nogen rolle, hvilken stamfunktion man vælger når man regner bestemte integraler.

Øvelse 1.3.2

Regn følgende bestemte integraler

a) $\int_2^3 3x^2\,dx$

b) $\int_{-2}^5 (6t-2)\,dt$

c) $\int_0^1 e^x\,dx$

d) $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{u}\,du$

e) $\int_2^{-1} 5\,dx$

Ligesom ved ubestemte integraler gælder der nogle regneregler for bestemte integraler:

Sætning 1.3.1

Lad f og g være kontinuerte funktioner, a, b og c reelle tal, og k en konstant. Så gælder følgende regneregler:

1. $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (Indskudsreglen)

De to første regler er fuldstændig tilsvarende til dem vi så for ubestemte integraler.

Eksempel 1.3.2

Regel 1:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} 10x\,dx =& 10\int_{-2}^{3} x\,dx \\ =& 10\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{3} \\ =& 10(\frac{1}{2}3^2 - \frac{1}{2}(-2)^2) \\ =& 25\end{aligned}$$

Regel 2:

$$\begin{aligned}\int_{1}^{3} (6x+2)\ dx &= \int_1^3 6x\,dx + \int_1^3 2\,dx \\ &= \left[3x^2\right]_1^3 + [2x]_1^3 \\ &= 3\cdot 3^2 - 3\cdot 1^2 + 2\cdot 3 - 2\cdot 1 \\ &= 27 - 3 + 6 - 2 \\ &= 28\end{aligned}$$

Bare fordi man kan bruge en regel, betyder det ikke altid at det er smart at bruge den. Vi vil nu regne det sidste integral fra ovenstående eksempel uden at bruge regel 2.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (6x+2)\ dx &= \left[3x^2+2x\right]_1^3 \\
&= 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3 - (3\cdot 1^2 + 2\cdot 1) \\
&= 27+6-3-2 \\
&= 28
\end{aligned}$$

Var det ikke nemmere? Mens det næsten altid er smart at trække konstanter ud foran integraltegnet (regel 1), er det sjældent smart at dele summer/differenser op (regel 2). Ligesom man kan tage konstanter ud foran integraltegnet, kan man også tage dem ud foran de firkantede parenteser:

$$[k\cdot F(x)]_a^b = k[F(x)]_a^b$$

Igen en nyttig regel som kunne have gjort udregninger i eksempel 1.3.2 en anelse nemmere:

Eksempel 1.3.3

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^3 10x\,dx =& 10\int_{-2}^3 x\,dx \\
=& 10\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^3 \\
=& 10\cdot \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-2}^3 && \text{(Rykker konstant ud)} \\
=& 10\cdot \frac{1}{2}(3^2-(-2)^2) \\
=& 25
\end{aligned}$$

Indskudsreglen (sætning 1.3.1 punkt 4) er nyttig til integraler, hvor integranden er stykkevist defineret:

Eksempel 1.3.4

Lad funktionen f være defineret ved:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x<1 \\ \frac{1}{x} & x\geq 1 \end{cases}$$

Vi vil regne integralet

$$\int_0^2 f(x)\,dx.$$

Da f er stykkevist defineret kan vi ikke finde en samlet stamfunktion, så vi bruger indskudsreglen til at dele den op, der hvor forskriften skifter (i $x = 1$):

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx && \text{(Indskudsregel med } c = 1\text{)}\\
&= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx\\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \big[\ln(|x|)\big]_1^2\\
&= \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) + \ln|2| - \ln|1| && \text{(Rykket konstant ud)}\\
&= \frac{1}{3} + \ln(2)\\
&= 1{,}03
\end{aligned}$$

Altså er

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 1{,}03$$

Øvelse 1.3.3

Betragt funktionen f med forskriften:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Regn $\int_{-1}^5 f(x)\,dx$.

Ekstra

Sætning 1.3.1 indeholder de vigtigste regler for bestemte integraler, men for at gøre listen mere komplet, udvider vi med følgende regler:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Øvelse 1.3.4

Lad f være en funktion med en hemmelig forskrift. Antag at:

$$\int_2^7 f(x)\,dx = 10 \quad \text{og} \quad \int_4^7 f(x)\,dx = 3$$

Bestem

a) $\int_2^7 3\cdot f(x)\,dx$

b) $\int_4^7 f(x) - 2\,dx$

c) $\int_7^2 f(x)\,dx$

d) $\int_5^5 f(x)\,dx$

e) $\int_2^4 f(x)\,dx$

1.4 Integration ved substitution

Som tidligere skrevet kan det være svært at bestemme stamfunktioner og dermed også at regne integraler. Vi skal nu se på en teknik, der kaldes *integration ved substitution*, som kan bruges når integralerne (bestemte eller ubestemte) har en særlig form.

Substitutionsmetoden for ubestemte integraler

Vi kan bruge integration ved substitution når integralet kan skrives på følgende form

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Vi bemærker, at vi skal have en sammensat funktion med den indre funktions differentialkvotient ganget på. Hvis man har svært ved at se, om integralet har den helt rigtige form, kan man starte med at lede efter noget, der ligner en indre funktion. Er der sådan en, så kan man prøve om man kan komme igennem med metoden. Inden vi er klar til at demonstrere teknikken er vi først nødt til at indføre noget notation (dvs. en skrivemåde) for differentialkvotienter. Hvis vi har en funktion $f(x)$, vil vi kalde differentialkvotienten $\frac{df}{dx}$ i stedet for $f'(x)$. De funktioner vi vil differentiere hedder $t(x)$, så vi vil skrive differentialkvotienten som $\frac{dt}{dx}$. Den notation har i sig selv ikke noget med substitutionsmetoden at gøre, og vi vil da også møde den senere i andre sammenhænge.

Eksempel 1.4.1

Vi vil regne det ubestemte integral

$$\int (x^2 - 1)^7 \cdot 2x \, dx.$$

Vi ser at integralet ser svært ud med de teknikker vi har lært indtil videre, og det er et tegn på at vi nok skal bruge substitution.

Vi kan se at $x^2 - 1$ ligner en indre funktion og derfor sætter vi

$$t = x^2 - 1.$$

Vi regner nu differentialkvotienten

$$\frac{dt}{dx} = 2x,$$

og ganger med dx på begge sider

$$dt = 2x \, dx$$

Vi genkender nu værdierne for t og dt i det oprindelige integral:

$$\int (x^2 - 1)^7 \cdot 2x \, dx$$

så vi kan altså skrive integralet som

$$\int t^7 \, dt.$$

Det er et nemt integral. Det giver

$$\frac{1}{8} t^8 + c$$

og da $t = x^2 - 1$ får vi:

$$\frac{1}{8}(x^2 - 1)^8 + c.$$

Altså er:

$$\int (x^2 - 1)^7 \cdot 2x \, dx = \frac{1}{8}(x^2 - 1)^8 + c.$$

Vi siger at vi har regnet integralet med *substitutionen* $t = x^2 - 1$.

Øvelse 1.4.1

Regn integralerne

a) $\int (x^3 - 1)^2 \cdot 3x^2 \, dx$

b) $\int e^{2x+1} \cdot 2 \, dx$

c) $\int 4x \cdot \sqrt{2x^2 + 1} \, dx$

d) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \, dx$

Det er ikke altid man lige kan gennemskue hvad man skal substituere, så nogle gange må man bare gøre forsøget. Hvis man ikke kan få det til at gå op, er det fordi man har valgt forkert eller fordi substitutionsmetoden slet ikke kan bruges.

Eksempel 1.4.2

Vi vil regne det ubestemte integral

$$\int \sqrt{x^4 + 7} \cdot x^3 \, dx.$$

Vi sætter

$$t = x^4 + 7$$

og får:

$$\frac{dt}{dx} = 4x^3.$$

Vi "ganger" med dx og får

$$dt = 4x^3 \, dx.$$

Vi sammenligner nu værdierne for t og dt med vores integral og opdager at de ikke passer helt. Vi har et 4-tal for meget i vores udtryk for dt, så vi dividerer med 4 på begge sider:

$$\frac{1}{4} \, dt = x^3 \, dx.$$

Nu kan vi genkende udtrykkene for t og $\frac{1}{4} \, dt$ i integralet :

$$\int \sqrt{x^4 + 7} \cdot x^3 \, dx,$$

så vi kan skrive det som

$$\int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{4} \, dt.$$

Vi rykker $\frac{1}{4}$ ud foran integralet og integrerer

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int \sqrt{t}\cdot\, dt &= \frac{1}{4}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c\\ &= \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}} + c,\end{aligned}$$

og husker at $t = x^4 + 7$:

$$\frac{1}{6}(x^4 + 7)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Altså:

$$\int \sqrt{x^4 + 7}\cdot x^3\, dx = \frac{1}{6}(x^4 + 7)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Øvelse 1.4.2

Regn følgende integraler

a) $\int \sqrt{x^2 + 1}\cdot x\, dx$

b) $\int 2^{3x+1}\, dx$

c) $\int \frac{12x}{3x^2+1}\, dx$

Substitutionsmetoden for bestemte integraler

Substitutionsmetoden kan også bruges for bestemte integraler med kun en lille ændring.

Eksempel 1.4.3

Vi vil regne det bestemte integral

$$\int_1^2 (x^2 - 1)^7\cdot 2x\, dx.$$

Det var det samme integral vi mødte i eksempel 1.4.1 denne gang bare med grænser (dvs. som bestemt integral). Vi starter på samme måde som ved ubstemte integraler. Vi sætter

$$t = x^2 - 1,$$

og får på sædvanlig vis

$$dt = 2x\, dx$$

MEN nu kommer det nye. Grænserne. De skal ændres til grænser for t i stedet for grænser for x. Vi indsætter integralets grænser i udtrykket for t:

Nedre grænse: $t = 1^2 - 1 = 0$ Øvre grænse: $t = 2^2 - 1 = 3$.

Nu indsætter vi vores værdier i integralet helt som ved ubestemte integraler bortset fra at vi indsætter grænserne for t som vi lige har regnet:

$$\begin{aligned}\int_0^3 t^7\,dt &= \left[\frac{1}{8}t^8\right]_0^3\\ &= \frac{1}{8}\left[t^8\right]_0^3\\ &= \frac{1}{8}(3^8-0^8)\\ &= 820{,}125.\end{aligned}$$

Altså er

$$\int_1^2 (x^2-1)^7\cdot 2x\,dx = 820{,}125.$$

Øvelse 1.4.3

Regn følgende integraler

a) $\int_{-2}^{2}(x^2-1)^7\cdot 2x\,dx$

b) $\int_{-1}^{3} e^{-2x+3}\,dx$

c) $\int_2^8 \frac{2\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx$

Ekstra

Det vi har set indtil videre virker. Man får det rigtige facit. Men man kan undre sig over metoden. Hvorfor må man gange med dx? Jeg skrev at $\frac{dt}{dx}$ betød $t'(x)$. Så $\frac{dt}{dx}$ er **ikke** en brøk, men et samlet betegnelse for differentialkvotienten. Alså har dx ikke nogen betydning i sig selv, og derfor burde man ikke kunne gange med det. Det er en lidt længere historie at skulle forklare, hvorfor man (i denne sammenhæng) kan tillade sig at opfatte differentialkvotienten som en brøk, så jeg vil i stedet vise en metode, hvor vi ikke er afhængig af den slags hokus pokus. Metoden tager udgangspunkt i følgende to sætninger.

Sætning 1.4.1

Lad f være en kontinuert funktion og g en differentiabel funktion. Så gælder:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt,$$

hvor $t = g(x)$.

Sætning 1.4.2

Lad f være en kontinuert funktion, g en differentiabel funktion og lad a og b være to reelle tal. Så gælder:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt,$$

hvor $t = g(x)$.

I sætningerne er det underforstået, at vi substituerer tilbage til x efter vi har integreret.

Eksempel 1.4.4

Vi vil regne det ubestemte integral fra eksempel 1.4.1:

$$\int (x^2-1)^7 \cdot 2x\,dx.$$

Vi ser at det har form som

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

med $g(x) = x^2 - 1$ og $f(t) = t^7$, hvor $t = g(x)$. Vi bruger sætning 1.4.1:

$$\begin{aligned}\int (x^2-1)^7 2x\,dx &= \int t^7\,dt \\ &= \frac{1}{8}t^8 + c \\ &= \frac{1}{8}(x^2-1)^8 + c\end{aligned}$$

Eksempel 1.4.5

Vi vil regne det bestemte integral fra eksempel 1.4.3

$$\int_1^2 (x^2-1)^7 \cdot 2x\,dx.$$

Som før ser vi at det har form som $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ med $g(x) = x^2 - 1$ og

$f(t) = t^7$, hvor $t = g(x)$). Vi bruger sætning 1.4.2

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x^2-1)^7 2x\,dx &= \int_{g(1)}^{g(2)} t^7\,dt \\
&= \int_{1^2-1}^{2^2-1} t^7\,dt \\
&= \int_0^3 t^7\,dt \\
&= \left[\frac{1}{8}t^8\right]_0^3 \\
&= \frac{1}{8}\left[t^8\right]_0^3 \\
&= \frac{1}{8}(3^8-0^8) \\
&= 820{,}125.
\end{aligned}$$

Øvelse 1.4.4

a) Regn den sidste integral i hver øvelse i dette afsnit vha. sætning 1.4.1 og sætning 1.4.2.

1.5 Arealbestemmelse ved integralregning

Vi er nu endelig klar til at se, hvad vi kan med integralregning. Vi skal nemlig se, hvordan integralregning kan bruges til at bestemme arealer. Alt efter hvordan arealerne er placeret, skal vi bruge lidt forskellige teknikker.

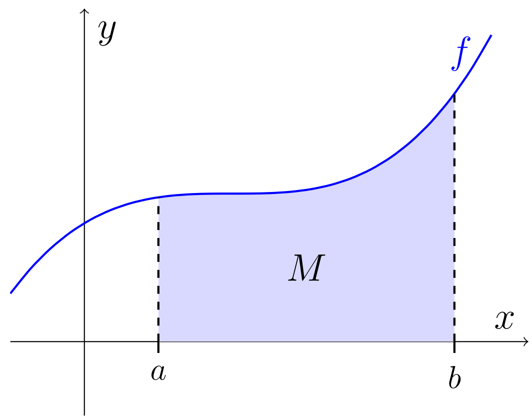
Areal under ikke-negativ funktion

Vi starter med at se på situationen, hvor vi vil bestemme et areal under en ikke-negativ (dvs. positiv eller nul) funktion.

Sætning 1.5.1 (Differential- og integralregningens hovedsætning)

Lad f være kontinuert funktion, som er ikke-negativ på intervallet $[a, b]$.

Lad A betegne arealet af området M afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, førsteaksen og f:



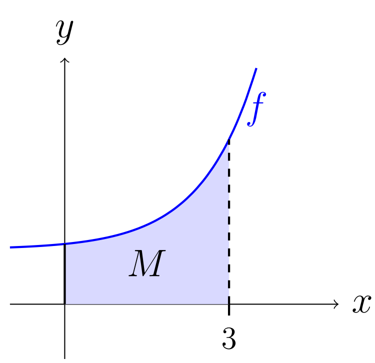
Arealet A er bestemt ved:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sætningen er umiddelbart lidt overraskende. Sådan som vi har defineret bestemte integraler, har de jo ikke noget med arealer at gøre. Men det har de så alligevel. Interessant.

Eksempel 1.5.1

Lad $f(x) = 0{,}1e^x + 1$. Vi vil bestemme arealet A af området M, afgrænset af førsteaksen, andenaksen, funktionen f og linjen med ligningen $x = 3$. Vi har altså



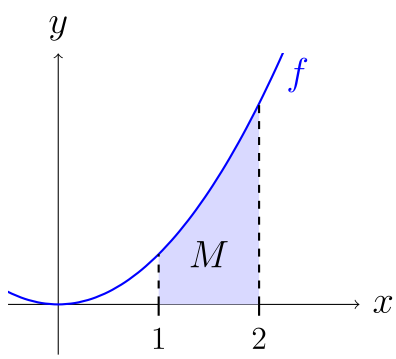
Vi bruger sætning 1.5.1:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^3 f(x)\,dx \\
&= \int_0^3 (0{,}1e^x + 1)\,dx \\
&= [0{,}1e^x + x]_0^3 \\
&= 0{,}1e^3 + 3 - (0{,}1e^0 + 0) \\
&= 4{,}91
\end{aligned}
$$

Arealet af M er altså 4,91

Øvelse 1.5.1

Betragt området M begrænset af førsteaksen, linjen $x = 1$, linjen $x = 2$ og funktionen med forskriften $f(x) = \frac{1}{2}x^2$:



a) Bestem arealet A af området M

Det er ikke altid, at man får en tegning af området, så man skal kunne afkode hvilket område der er tale om ud fra den sproglige beskrivelse.

Øvelse 1.5.2

Lad M betegne området afgrænset af førsteaksen, linjen $x = 2$, linjen $x = 10$ og funktionen med forskriften $f(x) = \ln(x)$:

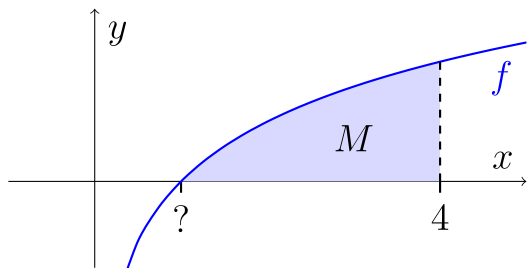
a) Lav en hurtig skitse af området. Hvis du ikke kan huske hvordan grafen for $\ln(x)$ ser ud... jaaah så må du jo tegne i GeoGebra

b) Bestem arealet A af M.

Nogle gange skal man regne lidt for at finde grænserne til ens integral.

Eksempel 1.5.2

Lad $f(x) = \ln(x)$. Vi vil bestemme arealet af området M, afgrænset af førsteaksen, funktionen f og linjen med ligningen $x = 4$. Vi har altså



Vi kan se at, vi er nødt til at bestemme nulpunktet for f før vi kan integrere:

$$\begin{aligned} \ln(x) &= 0 \\ e^{\ln(x)} &= e^0 && \text{(Vi bruger } e^x \text{ på begge sider)} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Okay, så vi skal altså have 1 som nedre grænse i vores integral.

Vi bruger sætning 1.5.1:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 f(x)\,dx \\ &= \int_1^4 \ln(x)\,dx \\ &= [x\ln(x) - x]_1^4 \\ &= 4\ln(4) - 4 - (1 \cdot \ln(1) - 1) \\ &= 2{,}55 \end{aligned}$$

Øvelse 1.5.3

Lad $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

a) Beregn nulpunkterne for f.

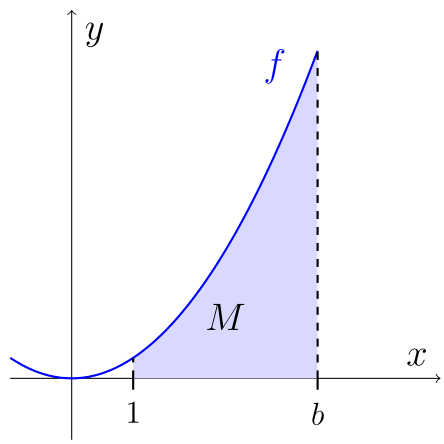
b) Funktionen f afgrænser sammen med førsteaksen et område M. Lav ud fra nulpunkterne og din viden om andengradspolynomier en hurtig skitse af M.

c) Beregn arealet A af området M.

Nogle gange er selve arealet givet og man skal så i stedet bestemme noget andet i integralet.

Eksempel 1.5.3

Betragt arealet A af området afgrænset førsteaksen, funktionen $f(x)) = \frac{1}{3}x^2$, linjen $x = 1$ og linjen $x = b$. Vi vil bestemme b således at $A = 7$. Området ser altså sådan ud:



Vi ved at arealet skal være 7 så vi kan opstille ligningen:

$$A = 7,$$

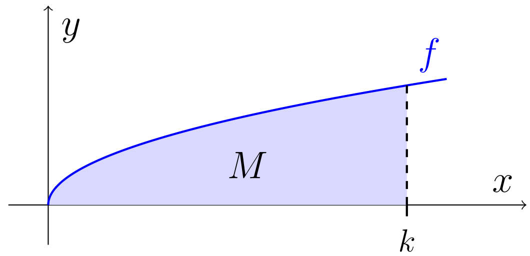
og vi kan så bruge sætning 1.5.1 til at bestemme A:

$$\begin{aligned}
\int_1^b f(x)\,dx &= 7 \\
\int_1^b \frac{1}{3}x^2\,dx &= 7 \\
\frac{1}{3}\int_1^b x^2\,dx &= 7 \\
\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^b &= 7 \\
\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^b &= 7 \\
\frac{1}{9}(b^3 - 1^3) &= 7 \\
b^3 - 1^3 &= 63 \\
b^3 &= 64 \\
b &= \sqrt[3]{64} \\
b &= 4
\end{aligned}$$

Altså er $b = 4$.

Øvelse 1.5.4

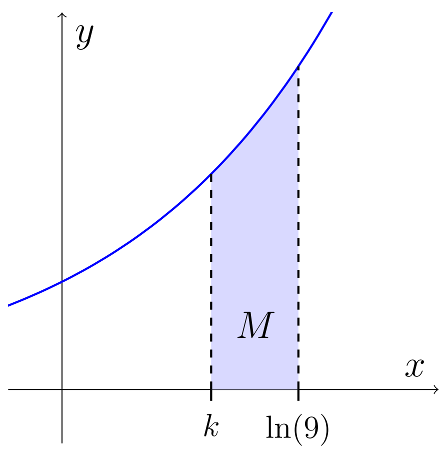
Lad $f(x) = \sqrt{x}$ og betragt arealet afgrænset af førsteaksen, andenaksen og linjen $x = k$:



a) Bestem k så arealet af M er 18

Øvelse 1.5.5 (Svær)

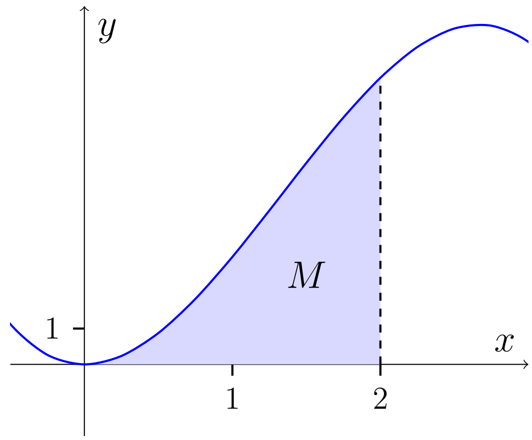
Lad $f(x) = e^{0,5x}$. Betragt arealet afgrænset af førsteaksen, f, linjen $x = k$ og linjen $x = \ln(9)$:



a) Bestem k således at M får et areal på 2.

Øvelse 1.5.6

Lad $f(x) = -x^3 + a \cdot x^2$ og lad M betegne området afgrænset af x-aksen, funktionen f og linjen $x = 2$. Hvis $a = 2$ ser M således ud:



a) Bestem a således at arealet af M er 4.

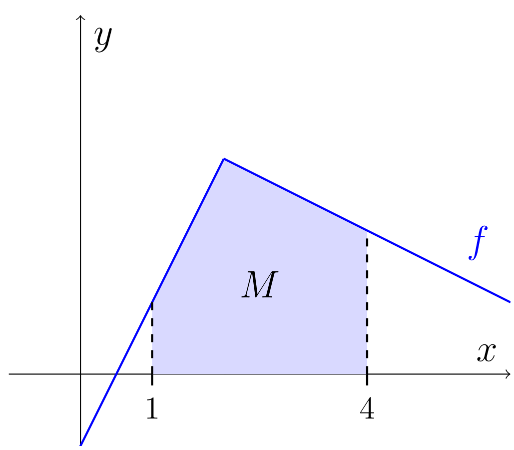
Er funktionen stykkevist defineret, kan man finde arealet ved at regne hver del for sig:

Eksempel 1.5.4

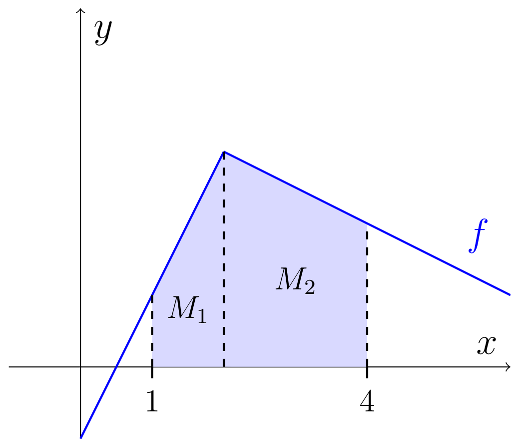
Betragt funktionen f give ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & x > 2 \end{cases}$$

Vi bestemmer nu arealet A af området M, afgrænset af førsteaksen, $x = 1$, $x = 4$ og funktionen f. Altså arealet markeret her:



Funktionen skifter forskrift ved $x = 2$ (se forskriften), og derfor deler vi området op i to dele:



Vi regner nu arealet A_1 af M_1

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_1^2 f(x)\,dx \\ &= \int_1^2 (2x-1)\,dx \\ &= 2 && \text{(Lav selv mellemregninger)} \end{aligned}$$

Vi regner nu arealet A_2 af M_2.

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_2^4 f(x)\,dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x+4\right)\,dx \\ &= 5 && \text{(Lav selv mellemregninger)} \end{aligned}$$

Arealet af M er altså $A_1 + A_2 = 2 + 5 = 7$.

Øvelse 1.5.7

Lad f give ved

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x < 1 \\ 4 - x & x \ge 1 \end{cases}$$

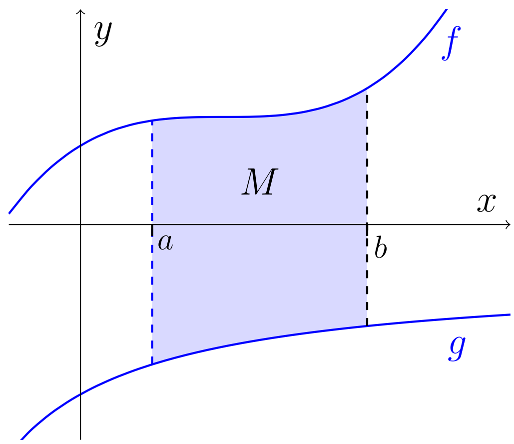
a) Tegn grafen for f i GeoGebra.

b) Bestem arealet A af området M afgrænset af f og førsteaksen.

Areal mellem to grafer

Sætning 1.5.2

Lad f og g være to funktioner defineret på intervallet $[a, b]$. Antag at $f > g$ og lad A betegne arealet af området M afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, funktion g og funktionen f:



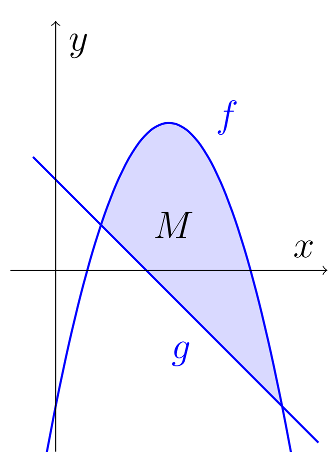
Arealet A er bestemt ved:

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

Bemærk at der ikke er nogen krav til hvordan funktionerne ligger i forhold til x-aksen. Vi kræver kun at f er større end g.

Eksempel 1.5.5

Vi vil bestemme arealet A af området M mellem graferne for funktionerne $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ og $g(x) = -x + 2$. Altså:



Vi starter med at beregne skæringspunkter mellem f og g som vi har lært på b-niveau. Skæringspunkterne har $x = 1$ og $x = 5$. Vi kan nu anvende sætning

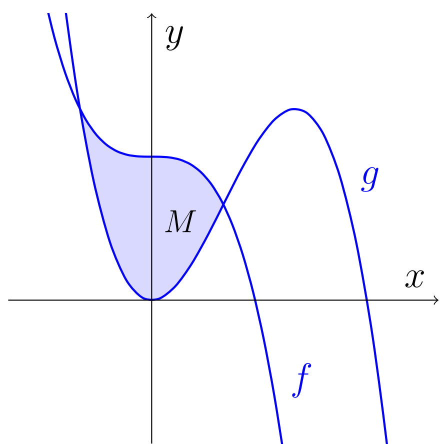
1.5.2:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^5 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \\
&= \int_1^5 \big(-x^2 + 5x - 3 - (-x+2)\big)\,dx \\
&= \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,dx \\
&= \frac{32}{3} \qquad \text{(Lav selv mellemregninger)}
\end{aligned}
$$

Læg mærke til at grafen for f ligger over grafen for g. Havde de ligget omvendt, skulle vi have integreret $g(x) - f(x)$ i stedet for $f(x) - g(x)$.

Øvelse 1.5.8

Lad $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 4$ og $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2$. Graferne for de to funktioner afgrænser et område M som har et areal A.



a) Bestem x-koordinaterne til skæringspunkterne mellem f og g.

b) Bestem A.

Øvelse 1.5.9

Lad $f(x) = x^2 - 4x$ og $g(x) = -2x$. Graferne for de to funktioner afgrænser et område M som har et areal A.

a) Tegn M (f.eks. i GeoGebra).

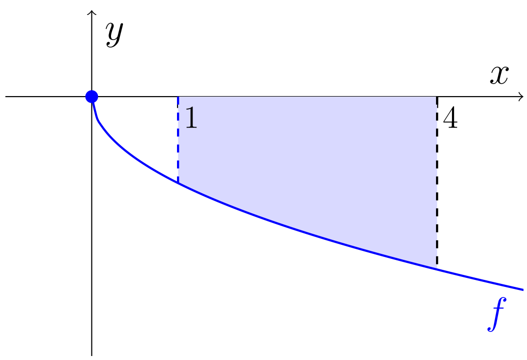
b) Bestem A.

Areal over ikke-positiv funktion

Sætning 1.5.2 kan også bruges til at finde arealet over en ikke-positiv (negativ eller nul) funktion.

Eksempel 1.5.6

Vi vil regne arealet A af området M afgrænset af funktionen $f(x) = -\sqrt{x}$, x-aksen og linjerne $x = 1$ og $x = 4$:



Så vi kan ikke bruge sætning 1.5.1, da grafen er under x-aksen. Men vi kan bruge sætning 1.5.2, selvom vi umiddelbart kun har én funktion. Sætter vi $g(x) = 0$, så vil grafen for g ligge oven i x-aksen, og vi kan derfor regne arealet som et areal mellem to grafer:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx && \text{(Bemærk at } g > f\text{)} \\ &= \int_1^4 \big(0 - (-\sqrt{x})\big)\,dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{14}{3} && \text{(Lav selv mellemregninger)} \end{aligned}$$

Altså er $A = \frac{14}{3}$

Øvelse 1.5.10

Lad funktion f være givet ved forskriften

$$f(x) = -2^x + x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

a) Bestem ved hjælp af GeoGebra nulpunkter for f.

b) Tegn grafen for f i GeoGebra.

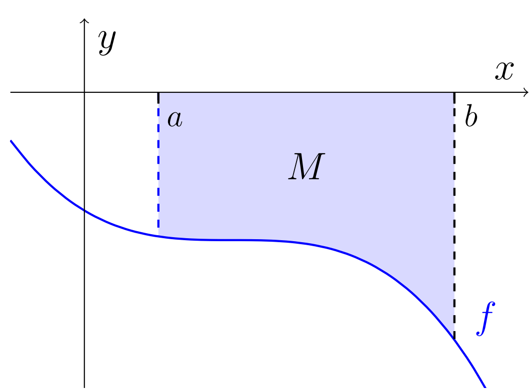
c) Bestem arealet A af det område, som er afgrænset af f, førsteaksen og andenaksen.

d) Sammenlign dit beregnede areal med grafen i GeoGebra. Ser resultatet rimeligt ud?

Som du måske har gennemskuet er der en simplere måde at regne arealet over en negativ funktion.

Sætning 1.5.3

Lad f være kontinuert funktion, som er ikke-positiv på intervallet $[a, b]$ og lad A betegne arealet af området M afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, førsteaksen og f:



Arealet A er bestemt ved:

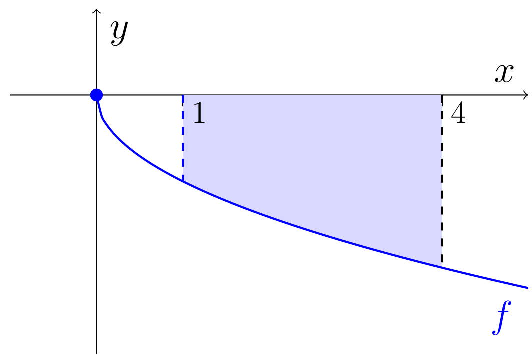
$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Vi ser altså at vi kan finde arealet over en negativ funktion ved at regne det bestemte integral (som om grafen var positiv), hvis altså bare vi sætter et minus foran integralet.

Eksempel 1.5.7

Vi vender tilbage til funktionen fra eksempel 1.5.6. Vi vil altså regne arealet A

af området M afgrænset af funktionen $f(x) = -\sqrt{x}$, x-aksen og linjerne $x = 1$ og $x = 4$:



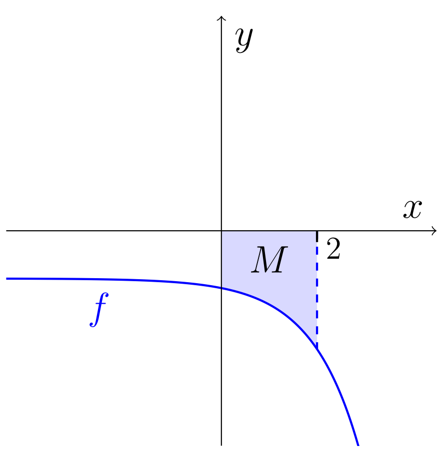
Vi bruger sætning 1.5.3, da grafen er under x-aksen:

$$\begin{aligned} A &= -\int_1^4 f(x)\,dx \\ &= -\int_1^4 -\sqrt{x}\,dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{14}{3} \qquad\qquad \text{(Lav selv mellemregninger)} \end{aligned}$$

Altså er $A = \frac{14}{3}$

Øvelse 1.5.11

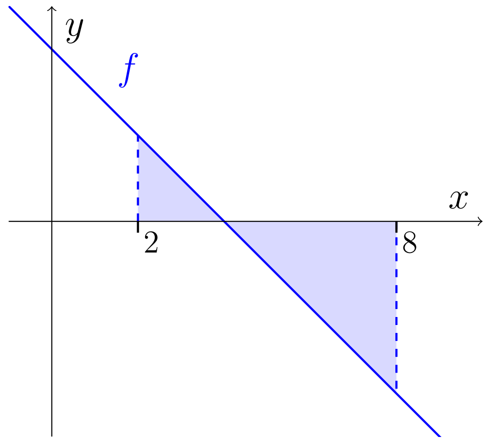
Lad $f(x) = -0{,}2e^x - 1$. Grafen afgrænser sammen med førsteaksen, andenaksen og linjen $x = 2$ et område M:



a) Regn arealet af M ved hjælp af metoden fra sætning 1.5.3.

Eksempel 1.5.8

Lad $f(x) = -x + 4$. Vi vil bestemme arealet A af området markeret her:



Vi ser at den første del af arealet er over x-aksen og den anden del er under, og derfor må vi regne de to dele hver for sig. Vi finder først nulpunktet

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x + 4 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

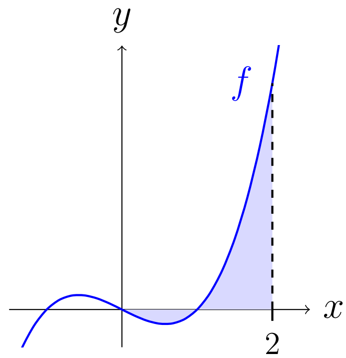
Kalder vi arealet over x-aksen for A_1 og arealet under for A_2 får vi:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_2^4 f(x)\,dx + \left(-\int_4^8 f(x)\,dx\right) \\ &= \int_2^4 (-x+4)\,dx + \left(-\int_4^8 (-x+4)\,dx\right) \\ &= \int_2^4 (-x+4)\,dx - \int_4^8 (-x+4)\,dx \\ &= 2 + 8 && \text{(Regn selv efter)} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Altså er arealet 10.

Øvelse 1.5.12

Lad $f(x) = x^3 - x$. Betragt arealet markeret med blå:



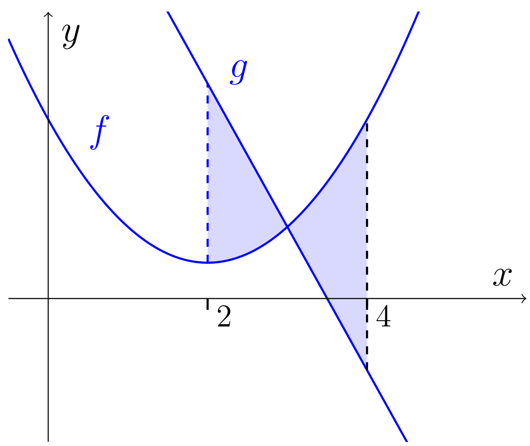
a) Hvordan bestemmer man nulpunkter for f? Hvilken teknik?

b) Beregn nulpunkterne for f.

c) Bestem det markerede areal.

Eksempel 1.5.9

Lad $f(x) = x^2 - 4x + 5$ og $g(x) = -4x + 14$. Og betragt det markerede areal:



Vi vil nu regne arealet. Vi vil gerne bruge sætning 1.5.2 (areal mellem to grafer) men vi har et problem. Sætningen forudsætter nemlig at den ene graf ligger over den anden. I dette eksempel har vi først $f > g$ og efter skæringspunkt gælder $g > f$. Vi løser problemet ved at regne de to delarealer, lad os kalde dem A_1 og A_2, hver for sig. Vi starter med at beregne skæringspunktet, hvilket giver (tjek selv):

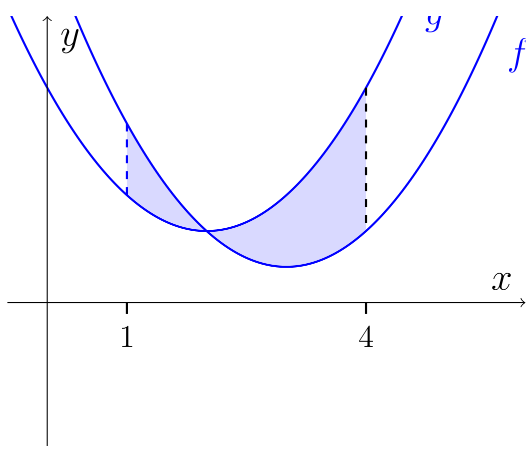
$$x = 3$$

Vi kan nu regne regne arealet sum summen af de to delarealer:

$$\begin{aligned}
A =& A_1 + A_2 \\
=& \int_2^3 (g(x) - f(x))\ dx + \int_3^4 (f(x) - g(x))\ dx \\
=& \int_1^2 \left(-4x + 14 - (x^2 - 4x + 5)\right)\ dx \\
& + \int_2^3 \left(x^2 - 4x + 5 - (-4x + 14))\right)\ dx \\
=& \int_2^3 \left(x^2 - 9\right)\ dx + \int_3^4 \left(-x^2 + 9\right)\ dx \\
=& \frac{8}{3} + \frac{10}{3} && \text{(Lav selv mellemregninger)} \\
=& 3
\end{aligned}$$

Øvelse 1.5.13

Lad $f(x) = x^2 - 6x + 10$ og $g(x) = x^2 - 4x + 6$. Og betragt det markerede område:



a) Bestem arealet af det markerede område

Vurdering af integral ud fra graf

Fordi vi kender betydning af et bestemt integral, både for grafer over og under x-aksen, kan vi nu bestemme en ca.-værdi for bestemte integraler alene ud fra deres graf:

Eksempel 1.5.10

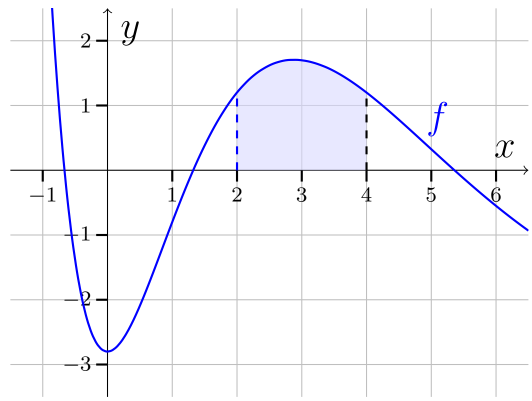
Betragt funktionen

$$f(x) = 4x^2 \cdot 0.5^x - 2.8.$$

Det er svært at bestemme en stamfunktion til f, men vi kan ud fra grafen anslå værdien af forskellige bestemte integraler.

Vi vil først bestemme integralet $\int_2^4 f(x)\,dx$

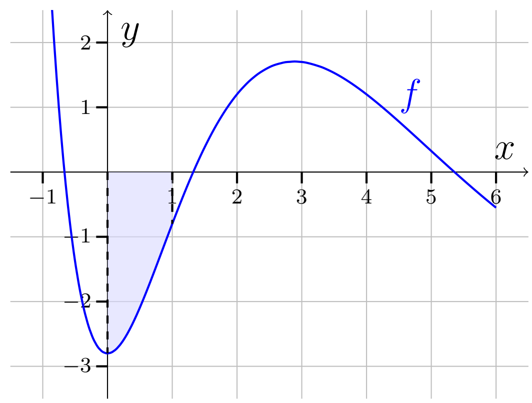
Vi tegner grafen og markerer arealet mellem grafen og x-aksen i intervallet $[2;4]$



Fra sætning 1.5.3 ved vi at $\int_2^4 f(x)\,dx$ er det markerede areal. Vi tæller tern og når frem til at arealet er ca. 3. Altså er$\int_2^4 f(x)\,dx \approx 3$.

Vi vil nu vurdere værdien integralet $\int_0^1 f(x)\,dx$

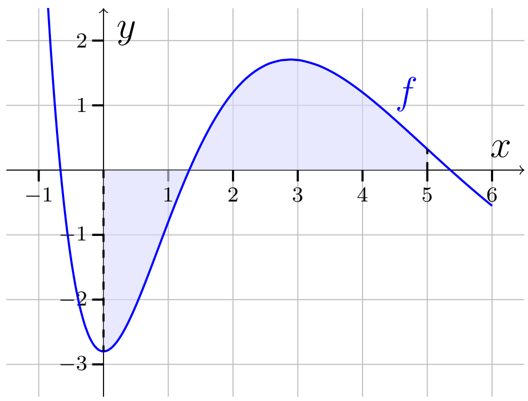
Vi markerer arealet mellem grafen og x-aksen i intervallet $[0;1]$



Fra sætning 1.5.3 ved vi at $\int_0^1 f(x)\,dx$ er det markerede areal, men med et minus på. Vi tæller tern og når frem til at arealet er ca. 2. Så skal vi bare putte et minus på. Vi får altså $\int_0^1 f(x)\,dx \approx -2$.

Til slut vil vi anslå værdien integralet $\int_0^5 f(x)\,dx$.

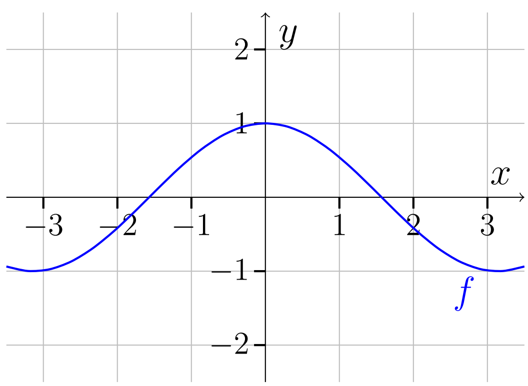
Vi markerer arealet mellem grafen og x-aksen i intervallet $[0;5]$:



Indskudsreglen tillader os dele integralet op i to. Først en del hvor funktionen ligger under x-aksen. Her er arealet ca. 2 og det skal der et minus på, så det bidrager med ca. -2. Derefter er der en del over x-aksen og her er arealet ca. 4, så det bidrager med 4. I alt får vi $\int_0^5 f(x)\,dx \approx -2+4=2$.

Øvelse 1.5.14

Betragt funktionen f



Vurder værdien af følgende integraler ved at tælle tern som i eksemplet ovenover.

a) $\int_0^{1,5} f(x)\,dx$

b) $\int_{1,5}^{3} f(x)\,dx$

c) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$

d) $\int_3^{1,5} f(x)\,dx$ (hmm nu er øvre grænse mindre end nedre, hvordan er det nu, det er med det...?)

Øvelse 1.5.15

Ved at tegne i GeoGebra og tælle tern, skal du vurdere værdien af følgende integraler:

a) $\int_{-4}^{-2}(-2x^3e^x - 1)\,dx$

b) $\int_{-9}^{-5}(-2x^3e^x - 1)\,dx$

c) $\int_{-5}^{-9}(-2x^3e^x - 1)\,dx$

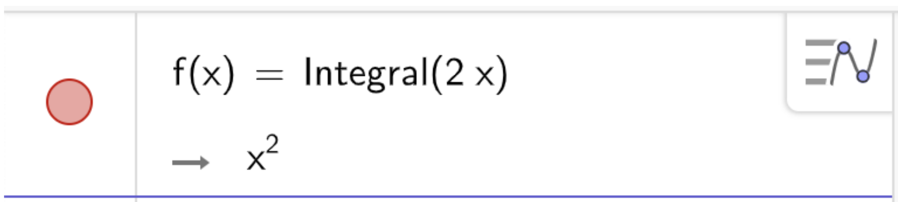
1.6 Integraler i GeoGebra

Man finder en stamfunktion med kommandoen :

```
Integral( <Funktion> )
```

Eksempel 1.6.1

Vi vil bestemme en stamfunktion F til $f(x) = 2x$ i GeoGebra. I et algebravindue skriver vi: `Integral(2x)`:



og vi kan se at $F(x) = x^2$ er en stamfunktion til f (vi skriver F selvom GeoGebra kalder stamfunktionen f)

Øvelse 1.6.1

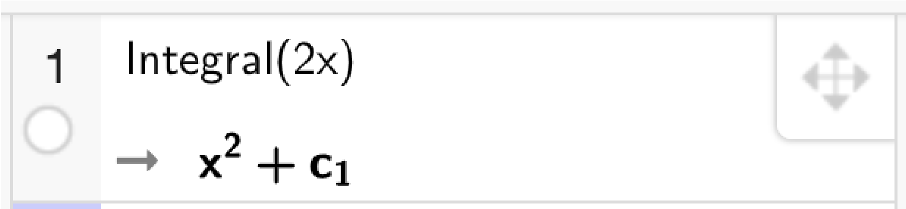
Lad $f(x) = x \cdot e^x$.

a) Bestem i GeoGebra en stamfunktion til f.

Ubestemte integraler bestemmer man også med kommandoen `Integral(funktion)`, men man skal indtaste den i CAS:

Eksempel 1.6.2

Vi vil bestemme $\int 2x\,dx$ i GeoGebra. Vi åbner CAS og skriver: `Integral(2x)`:



Vi kan se at GeoGebra kalder integrationskonstanten c_1. Vi plejer at kalde den for c vores facit er $\int 2x\,dx = x^2 + c$

Øvelse 1.6.2

Lad $f(x) = \sqrt{x+1}$.

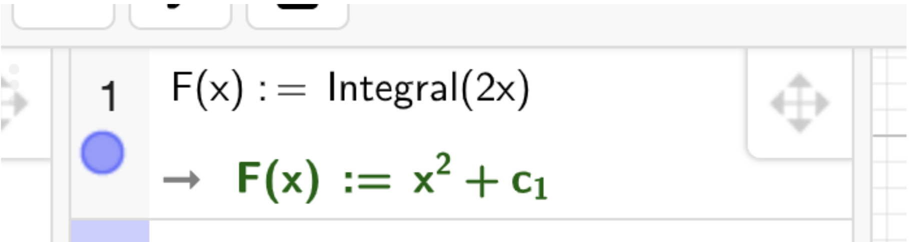
a) Regn $\int f(x)\,dx$ i GeoGebra CAS.

Vil man bestemme en bestemt stamfunktion (f.eks. gennem et punkt), så finder man først det ubestemte integral, og derefter bruger man kommandoen `Beregn(ligning med` til at finde integrationskonstanten.

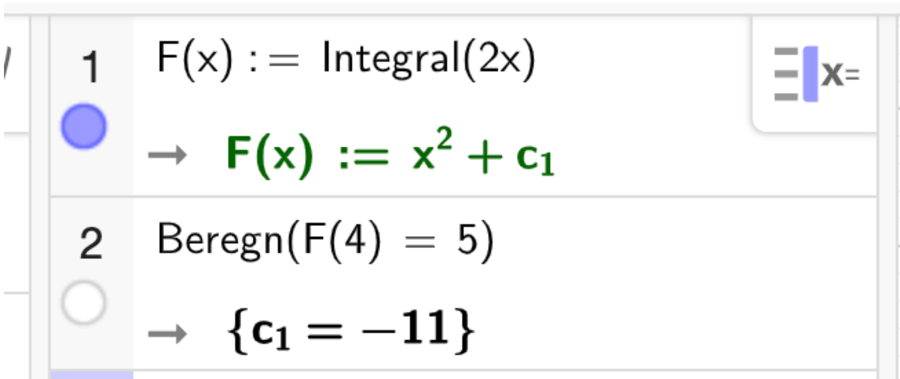
Eksempel 1.6.3

Vi vil bestemme den stamfunktion F til $f(x) = 2x$, som går igennem punktet $(4, 5)$.

Vi skal igen bruge CAS. Vi starter med regne det ubestemte integral, men denne gang vil vi gerne kalder resultatet F, så vi skriver: `F(x):=Integral(2x)`.



Vi skal nu finde ud af hvad integrationskonstanten skal være så vi skriver: `Beregn(F(4)=5)`:



Vi ser at $c_1 = -11$, så vores facit er:

$F(x) = x^2 - 11$

Øvelse 1.6.3

Lad $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Bestem (i GeoGebra) den stamfunktion til f som går igennem punktet $(1, 2)$.

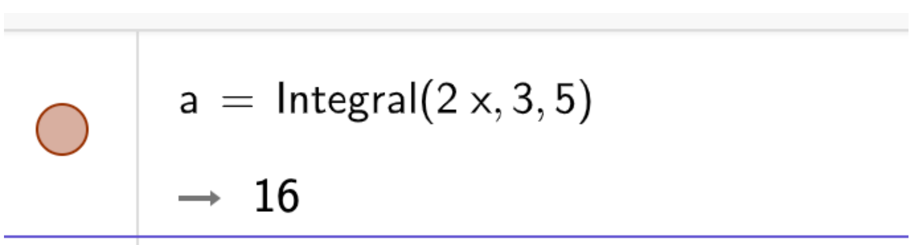
Bestemte integraler

Bestemte integraler regner man med kommandoen:

```
Integral(funktion, Start x-Værdi, Slut x-Værdi)
```

Eksempel 1.6.4

Vi vil regne det bestemte integral: $\int_3^5 2x\,dx$. I et algebra vindue skriver vi: `Integral(2x,3,5)`:



Altså er

$$\int_3^5 2x\,dx = 16.$$

Øvelse 1.6.4

Regn i GeoGebra:

a) $\int_3^7 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

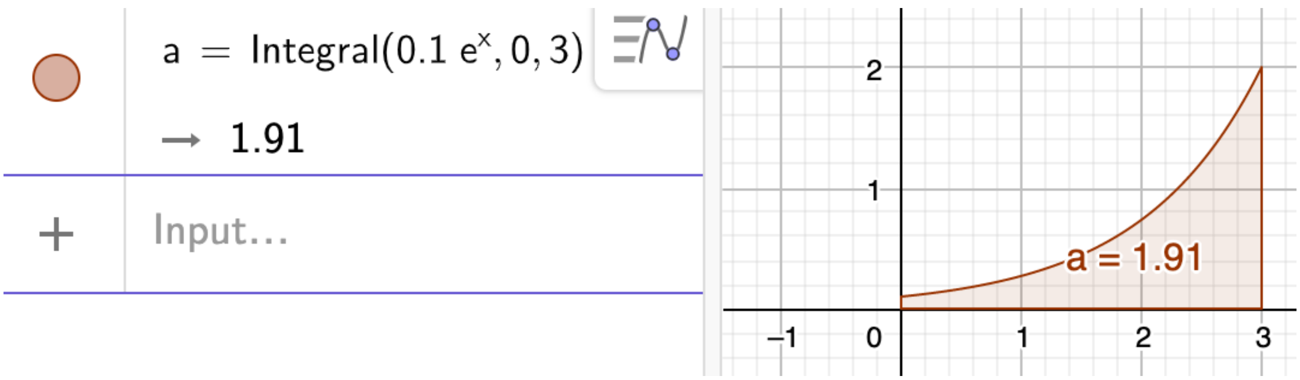
Areal under graf

Da arealer under grafer er givet ved bestemte integraler er der ikke rigtig noget ny her i forhold til GeoGebra. Men okay her er et eksempel alligevel:

Eksempel 1.6.5

Lad $f(x) = 0{,}1e^x$. Vi vil bestemme arealet af området M, afgrænset af førsteaksen, andenaksen, funktionen f og linjen med ligningen $x = 3$.

Vi skriver: `Integral(0,1e^x,0,3)`:



Vi kan se at $A = 1{,}91$. Vi kan endda se selve arealet i tegneblokken til højre.

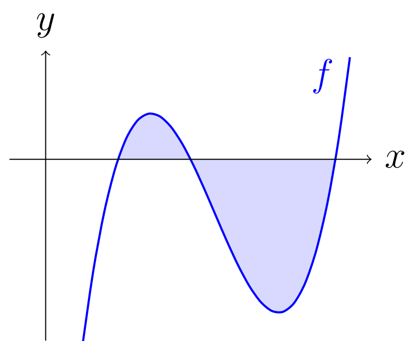
Øvelse 1.6.5

Lad $f(x) = x^3 - e^x$. Lad A betegne arealet af punktmængden afgrænset af førsteaksen, andenaksen, f og linjen $x = 1$.

a) Bestem A i GeoGebra

Øvelse 1.6.6

Lad $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde som vist her:



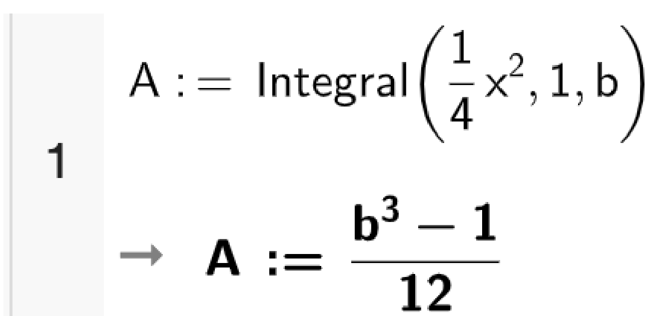
a) Bestem arealet af punktmængden.

Måske er det mere interessant at se et eksempel på hvordan man bestemmer en ukendt konstant i forbindelse med et integral.

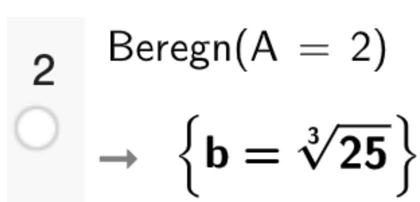
Eksempel 1.6.6

Betragt arealet A af området afgrænset førsteaksen, funktionen $f(x)) = \frac{1}{4}x^2$, linjen $x = 1$ og linjen $x = b$. Vi vil bestemme b således at $A = 2$.

Vi åbner CAS og skriver: `A:=Integral(1/4x^2,1,b)` og får:

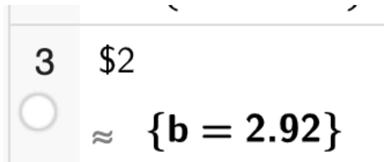


Vi kan nu finde b ved at løse ligningen $A = 2$. Vi skriver: `Beregn(A=2)`



Vi vil gerne have decimaltal, så vi trykker krøllet lighedstegn:

og vi får facit:



Altså $b = 2{,}92$

Øvelse 1.6.7

Lad $f(x) = \sqrt{x^2 + k}$. Lad A betegne arealet afgrænset af førsteaksen, andenaksen, f og linjen $x = 1$

a) Hvis GeoGebra-kommandoen `Beregn` ikke virker, findes der en anden kommando man kan bruge. Hvad er det for en kommando? og hvad er forskellen på de to kommandoer?

b) Bestem k så $A = 1$.

Areal mellem to grafer

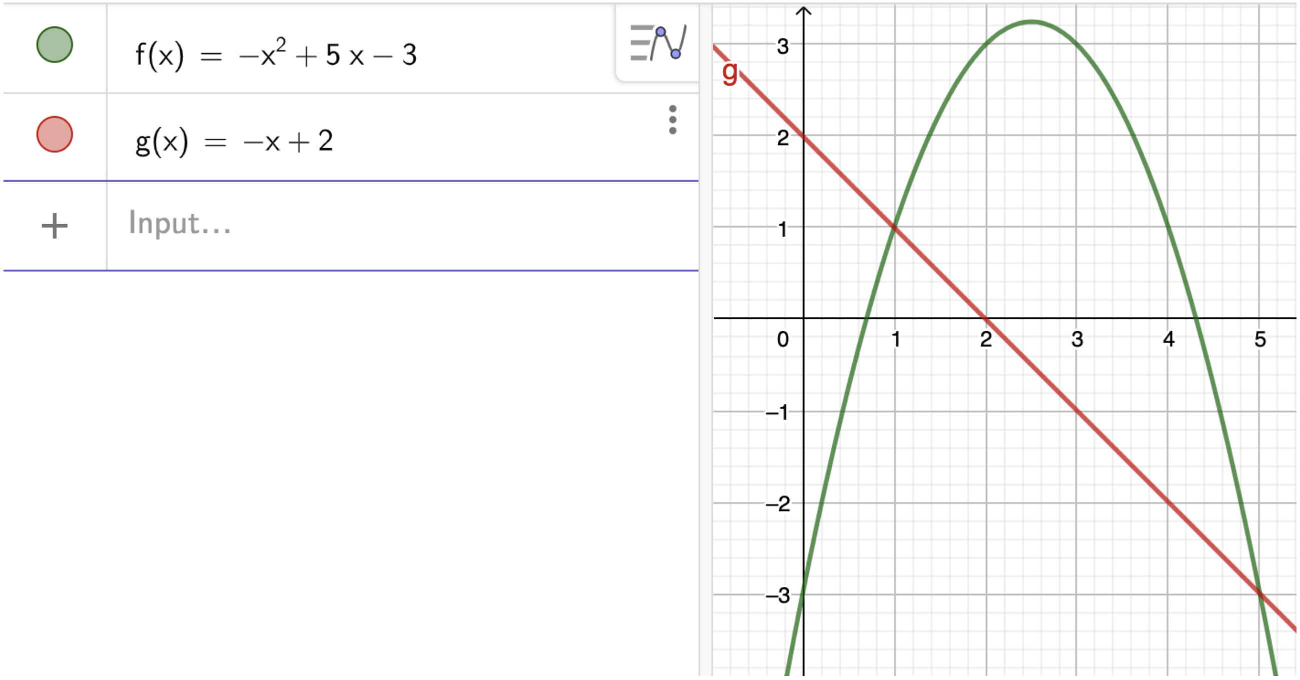
Arealet mellem to grafer findes med kommandoen:

```
IntegralMellem(funktion, Funktion, Start x-Værdi, Slut x-Værdi)
```

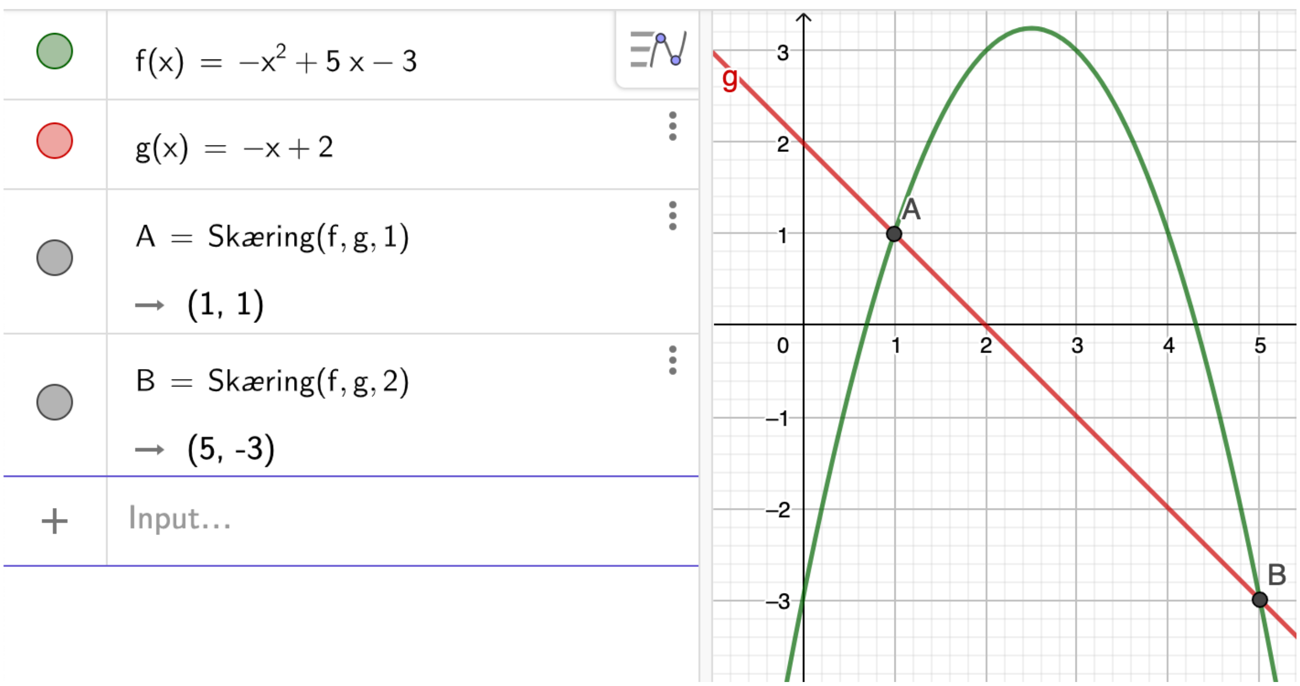
Eksempel 1.6.7

Vi vil bestemme arealet A af området M mellem graferne for funktionerne $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ og $g(x) = -x + 2$.

Vi starter med at tegne funktionerne:

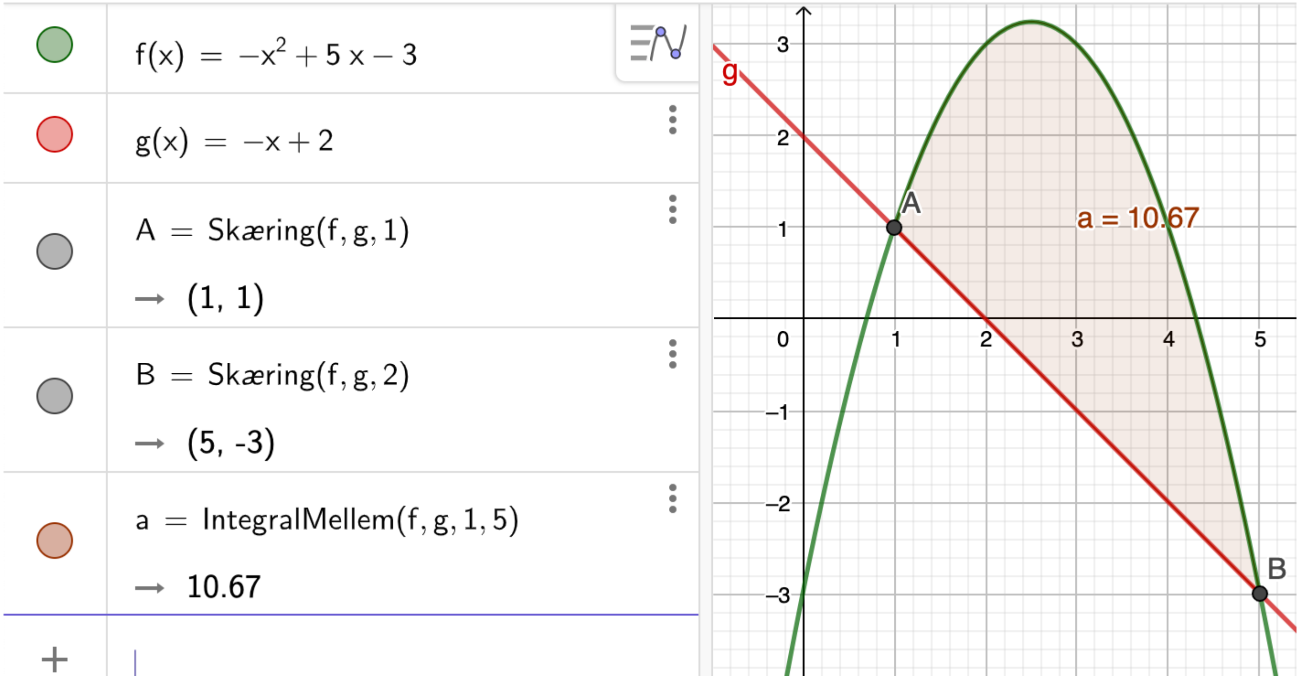


Vi finder skæringspunkterne med skæringsværktøjet eller skæringskommandoen:



Vi kan se at x-koordinaterne til skæringspunkterne er 1 og 5. Dvs. vi har de grænser vi skal bruge og vi kan regne arealet med et integral.

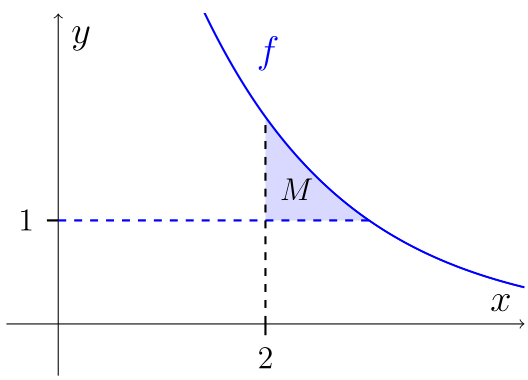
Vi skriver: `IntegralMellem(f,g,1,5)`



Vi kan se på tegneblokken at vi har fat i det rigtige areal, og at det har værdien 10,67.

Øvelse 1.6.8

Lad $f(x) = 2 \cdot 0{,}5^{x-2}$ og betragt punktmængden M:



a) Bestem arealet af M

1.7 Beviser - Integralregning

Beviser til stamfunktioner

Sætning 1.7.1

Lad F være en stamfunktion til f, G en stamfunktion til g og k en konstant. Så gælder:

1. $k \cdot F(x)$ er en stamfunktion til $k \cdot f(x)$
2. $F(x) + G(x)$ er en stamfunktion til $f(x) + g(x)$
3. $F(x) - G(x)$ er en stamfunktion til $f(x) - g(x)$

Bevis

Vi viser første regneregel. Se nedenstående øvelse for resten.

Vi husker at en stamfunktion funktion f er en funktion F som opfylder at:

$$F'(x) = f(x)$$

Så skal vi vise at $k \cdot F(x)$ er stamfunktion til $k \cdot f(x)$ skal vi altså vise at:

$$(k \cdot F(x))' = k \cdot f(x)$$

Vi regner $(k \cdot F(x))'$ ved at bruge regnereglen $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$, som vi kender fra differentialregning:

$$\begin{aligned} (k \cdot F(x))' &= k \cdot F'(x) && (\text{Regel: } (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)) \\ &= k \cdot f(x) && (\text{Da } F'(x) = f(x)) \end{aligned}$$

Altså er $(k \cdot F(x))' = k \cdot f(x)$, hvilket var det vi gerne ville vise.

Øvelse 1.7.1

a) Bevis resten af sætning 1.7.1.

Vi lægger godt mærke til resultaterne i sætning 1.7.1 da vi for brug for dem i næste bevis.

Beviser til bestemte integraler

Sætning 1.3.1

Lad f og g være kontinuerte funktioner, a, b og c reelle tal, og k en konstant. Så gælder følgende regneregler:

1. $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))\; dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b (f(x) - g(x))\; dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad$ (Indskudsreglen)

Bevis

Regel 1: Vi skal vise at

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Vi udnytter at $k \cdot F(x)$ er stamfunktion til $k \cdot f(x)$:

$$\begin{aligned}\int_a^b k \cdot f(x)\,dx &= [k \cdot F(x)]_a^b \\ &= k \cdot F(b) - k \cdot F(a) \\ &= k \cdot (F(b) - F(a)) \\ &= k \cdot \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Regel 2: Vi skal vise at

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\; dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Vi udnytter at $F(x) + G(x)$ er en stamfunktion til $f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))\; dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

Regel 3 springer vi over da den bevises som regel 2.

Regel 4 Vi skal vise

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Her er det nemmest at starte med højresiden:

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

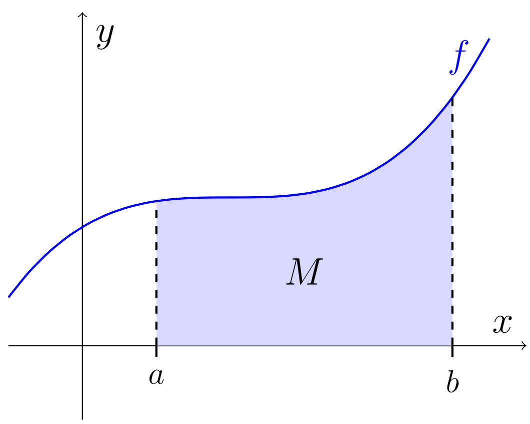
Beviser til arealbestemmelse

Det vigtigste og mest spændende bevis er beviset for hovedsætningen.

Sætning 1.5.1 (Differential- og integralregningens hovedsætning)

Lad f være kontinuert funktion, som er ikke-negativ på intervallet $[a, b]$.

Lad A betegne arealet af området M afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, førsteaksen og f:

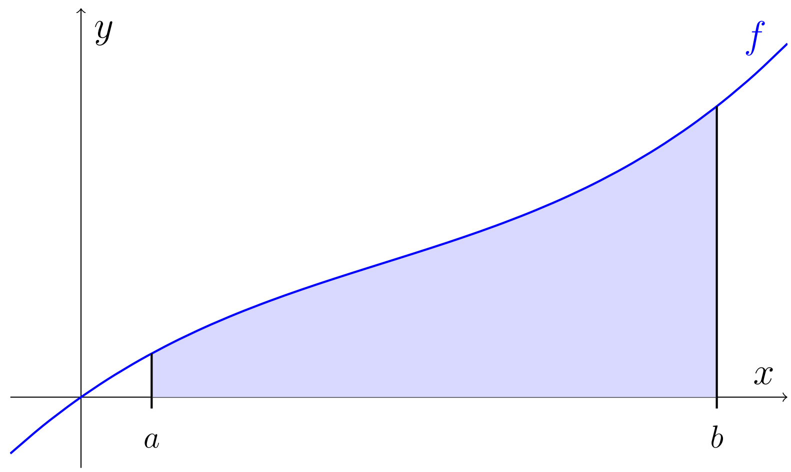


Arealet A er bestemt ved:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Bevis

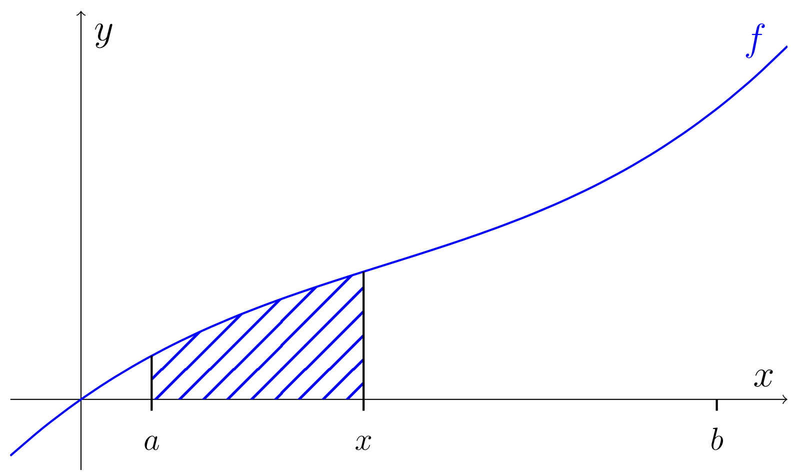
For at gøre beviset nemmere vil vi antage at f er voksende. Arealet A er arealet af det farvede område:



Beviset er langt, så vi deler det op i to dele.

Del 1: Arealfunktionen

Første del omhandler en funktion vi kalder *arealfunktionen* og betegner med $A(x)$. Den er defineret ved, at den til ethvert x knytter arealet af området afgrænset af de lodrette linjer gennem a og x, grafen for f og førsteaksen. Arealet $A(x)$ er altså det blåt skraverede område:



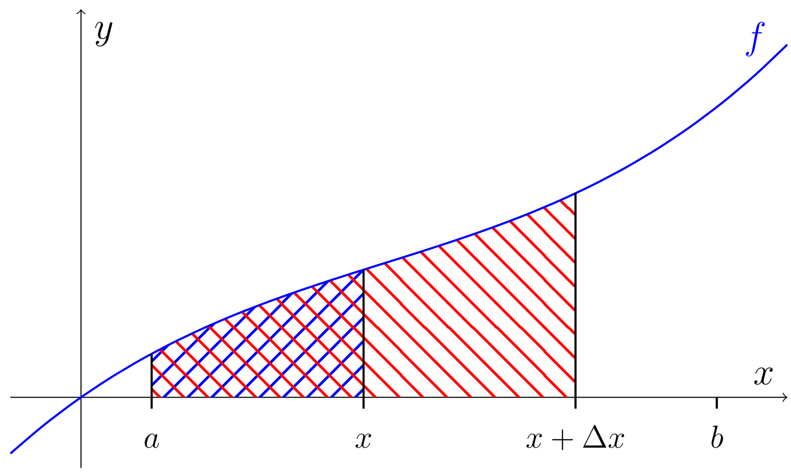
Læg mærke til at der forskel på A og $A(x)$. Bogstavet A bruger vi om arealet omtalt i sætningen, mens $A(x)$ altså er arealfunktionen. Del 1 går ud på at vise at $A(x)$ er stamfunktion til f. Dvs. vi skal vise at $A'(x) = f(x)$. Vi husker at differentialkvotienten er defineret ved:

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}$$

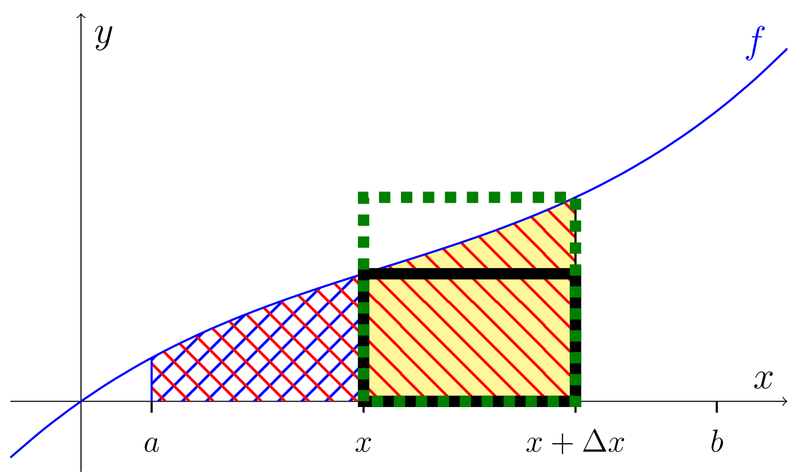
Nu skal vi vise at $A'(x) = f(x)$, så vi skal altså vise at

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Vi vælger nu et Δx, og indtegner arealet $A(x + \Delta x)$ på vores skitse:



Vi har skraveret $A(x + \Delta x)$ med rødt (vi husker at det blå område er $A(x)$). Hvis vi kigger på den del af det røde område, som ikke er blåt, må det være givet ved $A(x+\Delta x) - A(x)$. Det er det område vi er interesseret i, og derfor vil vi nu markere det med gult. Vi indtegner også to rektangler på tegningen:



Det sorte rektangel har bredde Δx og højde $f(x)$. Dermed har det arealet $f(x)\Delta x$. Det grønne rektangel har også en bredde på Δx, men højden er $f(x + \Delta x)$. Dermed har det arealet $f(x+\Delta x)\Delta x$. Vi kan se at areal af det gule område ligger i mellem arealerne af de to rektangler. Altså

$$f(x)\Delta x \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq f(x + \Delta x)\Delta x$$

Vi dividerer nu med Δx:

$$f(x) \leq \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x).$$

Vi genkender nu udtrykket i midten som at være differenskvotienten. Vi mangler bare at tage grænseværdien, så vi lader $\Delta x \to 0$. Vi har antaget at f er kontinuert, så derfor må $f(x+\Delta x) \to f(x)$ når $\Delta x \to 0$. Men differenskvotienten $\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}$ ligger imellem $f(x)$ og $f(x+\Delta x)$, så derfor må den følge med, og også gå mod $f(x)$ når $\Delta x \to 0$. Altså:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} = f(x),$$

hvilket var det vi skulle vise, og vi kan konkludere at $A(x)$ er stamfunktion til f. Vi er hermed færdige med bevisets første del.

Del 2: Arealet A som bestemt integral

I del 2 viser vi sætningens påstand. Altså vi vil bevise at:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ifølge definitionen af det bestemte integral er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

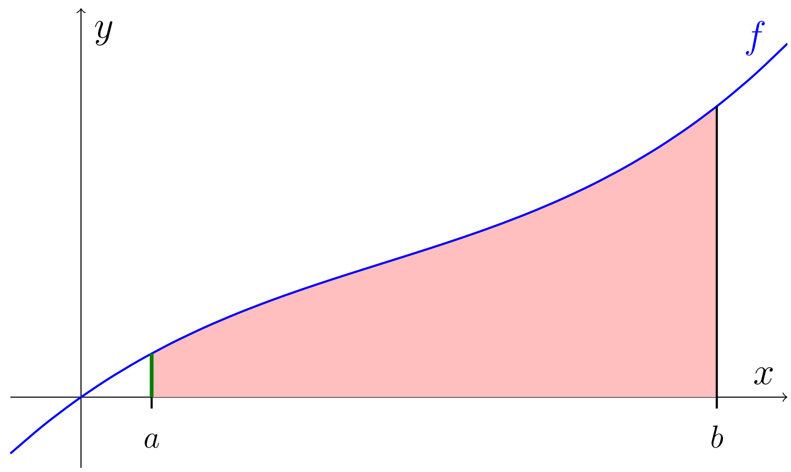
hvor F en hvilken som helst stamfunktion til f. Vi har lige vist at $A(x)$ er en stamfunktion til f, så den må vi kunne bruge som stamfunktion i integralet. Altså:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) - A(a).$$

Vi ser at højresiden er en forskel mellem to arealer. Lad os se nærmere på de to arealer. Arealet $A(b)$ er, ifølge definitionen af arealfunktionen, arealet af området afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, førsteaksen og f. Det er det areal vi kaldte A i sætningen. Arealet $A(a)$ er, ifølge definitionen af arealfunktionen, arealet af området afgrænset af linjerne $x = a$, $x = a$, førsteaksen og f. Da de to lodrette afgrænsningslinjer ligger oven i hinanden vil området bare være en streg og dermed er $A(a) = 0$. Vi har altså:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) - A(a) = A - 0 = A,$$

hvilket fuldender beviset. For klarhedens skyld har jeg inkluderet en tegning de omtalte arealer. Området med arealet $A(b)$ har jeg farvet pink, mens området med arealet $A(a)$ er grønt:



Øvelse 1.7.2 (Svær)

I beviset ovenover har vi (uden at gøre om opmærksom på det) antaget at Δx er positiv.

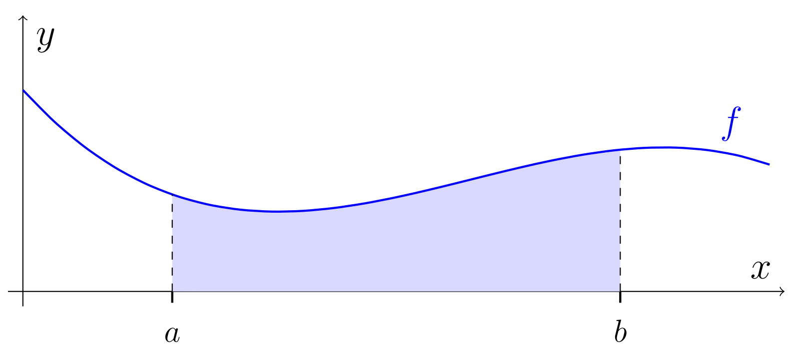
a) Gennemfør beviset når Δx er negativ.

Ekstra beviser

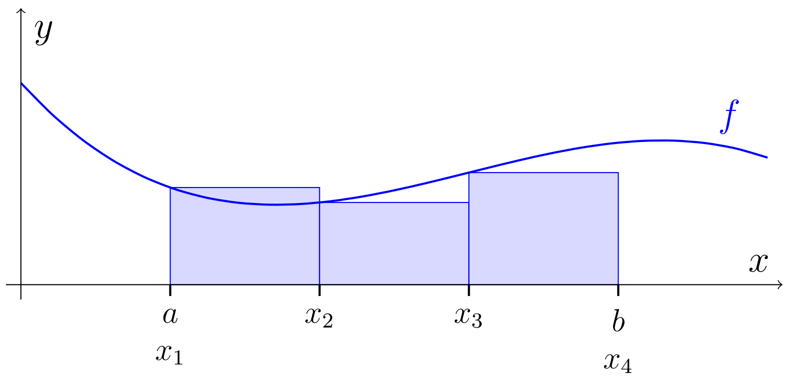
Argument for hovedsætningen

Beviset for hovedsætningen er lidt som de fleste andre beviser. Når beviset er færdig, må man erkende at sætningen må være rigtig, men sætningen fremstår ikke klarere, end inden man lavede beviset. Vi skal nu se argument for hovedsætningen, som ikke er så stringent, men til gengæld får det sætningen til at fremstå mere klart (måske? you tell me).

Vi skal vise at $A = \int_a^b f(x)\,dx$ og det vil vi gøre ved at kigge på arealet først. Så betragt funktionen f og arealet under f mellem a og b som vist her:



Vi vil nu bestemme dette areal ved at opdele x-aksen i mindre ligestore dele og tegne bokse som vist her:



Vi kan se at det ikke er det helt rigtige areal vi får, men det er klart at arealet af rektanglerne nærmer sig det rigtige areal, hvis vi gør inddelingen finere. Vi regner nu arealet. Kalder vi boksenes bredde for Δx vil første boks havde arealet

$$\text{højde} \cdot \text{bredde} = f(x_1) \cdot \Delta x$$

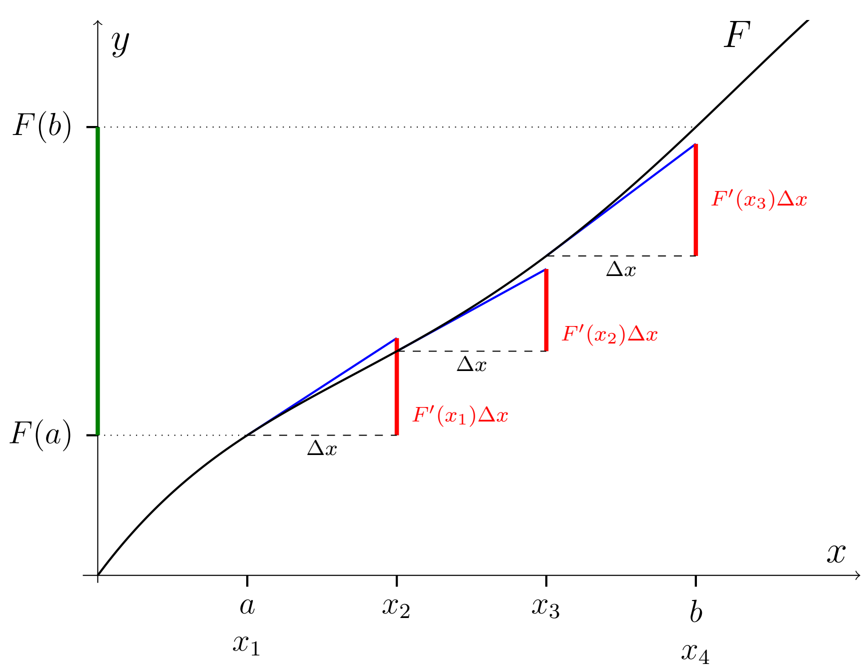
Tilsvarende for de andre bokse. Det samlede areal er altså givet ved:

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$$

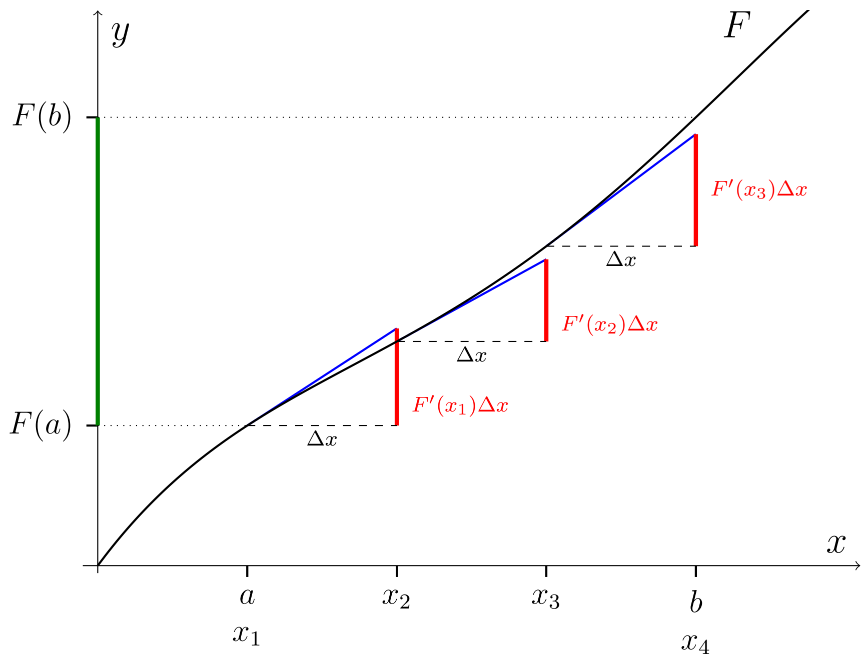
Vi kan udtrykke arealet vha. stamfunktionen F, da $F'(x) = f(x)$:

$$A \approx F'(x_1)\Delta x + F'(x_2)\Delta x + F'(x_3)\Delta x$$

Nu er arealet altså udtrykt ved F. Lad os se hvordan det ser ud på grafen for F. Vi ved at F' udtrykker hældningen på tangenten til F. Ganger vi hældning med Δx får vi tangentens vækst, når x vokser med Δx. Lad os tegne det ind. Vi tegner tangenterne med blå og væksten med rød:



Arealet er altså lig med summen af de røde længder. Vi sammenligner nu summen af de røde længder med $F(b) - F(a)$ som må være afstanden fra $F(a)$ til $F(b)$ langs y-aksen.



Vi ser at den samlede længde af de røde stykker (som utrykker arealet) giver omtrent det samme som længden af det grønne stykke (som udtrykker $F(b)-F(a)$). Altså

$$A \approx F(b) - F(a)$$

og da $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ må

$$A \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

Når vi skriver "$\approx$" i stedet for "$=$" er det pga. de afvigelser der introduceres som konsekvens af inddelingen af x-aksen. Hvis vi gør inddelingen finere er det klart, at afvigelserne bliver mindre. Faktisk er det oplagt at vi kan gøre afvigelserne vilkårligt små ved bare at gøre inddelingen fin nok. Derfor konkluderer vi at:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Beviser til ubestemte integraler

Vi skal nu bevise nogle simple regneregler for ubestemte integraler. Men inden vi går i gang med de konkrete regler, skal vi se på et generelt princip. Lad os sige at vi vil bevise påstanden

$$\int (\text{udtryk 1})\,dx = \text{udtryk 2}.$$

Ifølge definitionen af det ubestemte integral betyder det, at vi skal bevise at udtryk 2 udgør samtlige stamfunktioner til integranden (altså udtryk 1). I praksis vil vi nøjes med at bevise at udtryk 2 er én stamfunktion til integranden. Den eneste forskel på *én* stamfunktion og *samtlige* stamfunktioner er, at udtrykket for samtlige stamfunktioner indeholder en integrationskonstant. I vores tilfælde vil udtryk 2 oplagt indeholde en integrationskonstant, det er bare ikke noget vi vil komme ind på.

Sætning 1.2.1

Lad f og g være kontinuerte funktioner og k en konstant som ikke er nul. Så gælder følgende regneregler:

1. $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$
2. $\int \left(f(x) + g(x)\right)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
3. $\int \left(f(x) - g(x)\right)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Bevis

Vi vil bevise de to første regler.

Regel 1: Vi skal vise at

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

Ifølge vores vores generelle princip om beviser med ubestemte integraler skal vi vise, at højresiden er stamfunktion til integranden. Altså at $k \cdot \int f(x)\,dx$ er stamfunktion til $k \cdot f(x)$: Vi diffentierer $k \cdot \int f(x)\,dx$

$$\left(k \cdot \int f(x)\,dx\right)'$$

Vi sætter k ud foran differentiationen.

$$k \cdot \left(\int f(x)\,dx\right)'$$

Vi husker at ubestemte integraler er stamfunktioner. Så integration og differentiation ophæver hinanden altså har vi:

$$k \cdot f(x)$$

Altså er $k \cdot \int f(x)\,dx$ er stamfunktion til $k \cdot f(x)$ og vi har vist Regel 1.

Regel 2: Vi skal vise at

$$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Vi differentierer højresiden:

$$\left(\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\right)'$$

Vi opdeler differentiationen i to:

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' + \left(\int g(x)\, dx\right)'$$

Differentiation ophæver integration:

$$f(x) + g(x)$$

og vi har altså vist, at $\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$ er stamfunktion $f(x) + g(x)$, så regel 2 er bevist.

Øvelse 1.7.3

a) Bevis regel 3 i sætning 1.2.1 (ovenstående sætning).

Øvelse 1.7.4 (Svær)

I bemærkningen inden ovenstående bevis står der: "I vores tilfælde vil udtryk 2 oplagt indeholde en integrationskonstant"

a) Forklar hvorfor, for hver af de tre regneregler.

Beviser til integration ved substitution

Sætning 1.4.1

Lad f være en kontinuert funktion og g en differentiabel funktion. Så gælder:

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt,$$

hvor $t = g(x)$.

Bevis

Vi skal vise at

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$$

Vi skal vise at $\int f(t)\,dt$ er stamfunktion til $f\big(g(x)\big)g'(x)$, hvilket vil sige, at vi skal differentiere $\int f(t)\,dt$,og tjekke at det giver $f\big(g(x)\big)g'(x)$. Men nu skal vi holde tungen lige i munden. Fordi selvom $\int f(t)\,dt$ ligner en funktion af t, skal den opfattes som en funktion af x, og når vi differentiere den, skal den altså differentieres med hensyn til x. Det betyder at det er en sammensat funktion:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g(x)"] \arrow[rr, bend left, "\substack{\int f(t)\,dt \\ \text{(Opfattet som funktion af } x\text{)}}"] & t \arrow[r, "\int f(t)\,dt"] & \int f(t)\,dt \end{tikzcd}$$

Regnereglen for differentiation af sammensatte funktioner lyder:

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Hos os er den ydre funktion $\int f(t)\,dt$, og den indre funktion er $t = g(x)$. Vi får nu

$$\begin{aligned} \Big(\int f(t)\,dt\Big)' &= f(t) \cdot t' \\ &= f\big(g(x)\big) \cdot g'(x), \end{aligned}$$

og vi har hermed vist at $\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$. Man kan dog undre over hvorfor jeg ganger med t' ved det første lighedstegn. Burde differentiation og integration ikke gå ud med hinanden? Nej, for vi differentierer med hensyn til x og integrere med hensyn til t. Først når vi bruger reglen om differentiation af sammensatte funktioner, kan vi differentiere den ydre funktion med hensyn til t ,og på det tidspunkt vil differentiation og integration gå ud med hinanden. Men reglen siger så også, at vi skal gange med den indre differentieret, og derfor ganger vi med t'.

Sætning 1.4.2

Lad f være en kontinuert funktion, g en differentiabel funktion og lad a og b være to reelle tal. Så gælder:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt,$$

hvor $t = g(x)$.

Bevis

Ifølge sætningen for substitution for ubestemte integraler gælder følgende:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

Her er det er underforstået at vi skal indsætte $g(x)$ i stedet for t efter vi har integreret på højresiden. Men det må betyde, at vi kan finde en stamfunktion til $f(g(x))g'(x)$, ved at finde en stamfunktion til $f(t)$, og så indsætte $g(x)$ i stedet for t. Så hvis $F(t)$ er en stamfunktion til $f(t)$, så er $F(g(x))$ en stamfunktion til $f(g(x))g'(x)$. Sætningen er nu nem at vise:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= \big[F\big(g(x)\big)\big]_a^b \\ &= F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) \\ &= [F(x)]_{g(a)}^{g(b)}\end{aligned}$$

Øvelse 1.7.5 (Svær)

a) Bevis de ekstra regneregler i afsnit 1.3.

Kapitel 2

Differentialligninger

Når man vil beskrive problemstillinger, som handler om sammenhængen mellem en funktion og dens vækst, får man en ligning, som både indeholder funktionen og dens differentialkvotient. Den slags ligninger kaldes differentialligninger, og dem skal vi studere nærmere i dette kapitel.

2.1 Introduktion til differentialligninger

En *differentialligning* er en ligning, hvor den ubekendte er en funktion, og som indeholder funktionens differentialkvotient (deraf navnet – differentialligning). Funktionen betegner vi med y og differentialkvotienten skrives dermed som y'.

Eksempel 2.1.1

Betragt ligningen

$$y' = 5.$$

Vi kan se at ligningen indeholder differentialkvotienten y', og derfor er det en differentialligning.

I ovenstående eksempel står der ikke y nogle steder i ligningen. Men det ændrer ikke på, at det er y der er den ubekendte. Man kan sige at y optræder i ligningen via sin differentialkvotient.

Eksempel 2.1.2

Betragt ligningen

$$y' \cdot x = y + 2x^3.$$

Vi kan se at ligningen indeholder differentialkvotienten y', og derfor er det en differentialligning. Ligning indholder også funktionen y og variablen x.

Øvelse 2.1.1

Bestem hvilke af følgende ligninger som er differentialligninger

a) $y' = 2$

b) $3x + y = y'$

c) $x + 2y = y$

d) $y = 3$

En *løsning* til en differentialligning er en funktion, der gør ligningen sand, når man sætter funktionens forskrift ind i stedet for y.

Eksempel 2.1.3

Funktionen $f(x) = x^2$ er **ikke** en løsning til differentialligningen $y' = 5$. Det kan vi se, ved at sætte f ind i stedet for y i ligningen. I ligningen optræder differentialkvotienten y', så vi finder først $f'(x)$. Den giver $f'(x) = 2x$ og den kan vi nu sætte ind i ligningen:

$$
\begin{aligned}
y' &= 5 && \text{(Vores oprindelige ligning)} \\
2x &= 5 && \text{(Vi har indsat } f'(x) \text{ i stedet for } y'\text{)}
\end{aligned}
$$

Vi kan se at f ikke en løsning, da ligningen er falsk (der står ikke det samme på hver side af lighedstegnet).

Vi vil nu prøve om funktionen $g(x) = 5x+1$ er en løsning til differentialligningen. Vi finder først differentialkvotienten $g'(x) = 5$. Vi sætter nu ind i ligningen.

$$
\begin{aligned}
y' &= 5 && \text{(Vores oprindelige ligning)} \\
5 &= 5 && \text{(Vi har indsat } g'(x) \text{ i stedet for } y'\text{)}
\end{aligned}
$$

Vi kan se at g er løsning til differentialligningen, da ligningen er sand (der står det samme på begge sider).

Øvelse 2.1.2

Bestem hvilke af følgende funktioner som er løsning til differentialligningen $y' = 2x$

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = x^2 - x$

d) $f(x) = x^2$

Eksempel 2.1.4

Vi vil nu undersøge om funktionen $f(x) = x^3 - 3x$ er en løsning til ligningen $y' \cdot x = y + 2x^3$. Vi finder først differentialkvotienten $f'(x) = 3x^2 - 3$, hvorefter vi indsætter f og f' i ligningen:

$$\begin{aligned} y' \cdot x &= y + 2x^3 && \text{(Oprindelige ligning)} \\ (3x^2 - 3) \cdot x &= x^3 - 3x + 2x^3 && \text{(Indsat } f \text{ for } y \text{ og } f' \text{ for } y'\text{)} \\ 3x^3 - 3x &= 3x^3 - 3x && \text{(Reduceret)} \end{aligned}$$

Vi kan se at ligningen er sand og vi kan dermed konkludere at $f(x) = x^3 - 3x$ er løsning til ligningen $y' \cdot x = y + 2x^3$.

Øvelse 2.1.3

Tjek om:

a) $f(x) = x^2 + 3x$ er løsning til $y' \cdot x = x^2 + y$

b) $f(x) = \ln(x)$ er løsning til $x\ln(x) = (y' + y)x - 1$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ er løsning til $y' - y + x^3 = 6x$

d) $f(x) = e^{3x}$ er løsning til $y^2 - e^{6x} + y' = 3y$

Eksempel 2.1.5

Vi vil bestemme konstanten c således at funktion

$$f(x) = x^2 + c \cdot x$$

er løsning til differentialligningen

$$y' - 2 = 2x + 1.$$

Vi regner først f' :

$$f'(x) = 2x + c.$$

Vi indsætter nu i ligningen og isolerer c:

$$\begin{aligned} y' - 2 &= 2x + 1 && \text{(Oprindelige ligning)} \\ 2x + c - 2 &= 2x + 1 && \text{(Indsat } f' \text{ for } y'\text{)} \\ c &= 3 && \text{(Isoleret } c\text{)} \end{aligned}$$

Vi konkluderer, at hvis $c = 3$, så er $f(x) = x^2 + c \cdot x$ løsning til $y' - 2 = 2x + 1$.

Øvelse 2.1.4

Lad $f(x) = x^2 + 5x + k$.

a) Bestem konstanten k så f er løsning til differentialligningen: $y' - 2y = -2x^2 - 8x - 1$.

Øvelse 2.1.5

Betragt ligningen $2y' = -a(y - x) + 2$

a) Bestem a så funktionen $f(x) = e^{4x} + x$ er løsning til ligningen.

Øvelse 2.1.6

Gør rede for at:

a) $f(x) = x \cdot e^x$ er løsning til $x(y' - y) = y$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ er løsning til $\frac{x}{y} = y'$

Der er flere måder at opskrive den samme ligning på. Følgende variationer er mulige:

- Den ubekendte kaldes $f(x)$ i stedet for y.
- Differentialkvotienten skrives som $\frac{dy}{dx}$ i stedet for y' .
- Løsningen betegnes med y i stedet for $f(x)$.

Eksempel 2.1.6

Differentialligningen $y' \cdot x = y + 2x^3$ kan skrives på følgende måder:

$$y' \cdot x = y + 2x^3$$
$$f'(x) \cdot x = f(x) + 2x^3$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot x = y + 2x^3$$

Løsningen (tjek selv at rent faktisk er en løsning) kan skrives som

$$f(x) = x^3 - 3x \quad \text{eller} \quad y = x^3 - 3x$$

Om differentialligningen, eller løsningen, står på den ene eller den anden måde har selvfølgelig ingen betydning for, hvordan man regner på ligningen.

Øvelse 2.1.7

Gør rede for at:

a) $f(x) = x^3 + x^2$ er løsning til $2\frac{dy}{dx} - 6x^2 = 4x$

b) $y = x^2$ er løsning til $y' = 2x$

c) $f(x) = e^x$ er løsning til $f(x) = f'(x)$

Ekstra

Differentialligninger kan også indeholdte den dobbelt afledte. Så kaldes det en *andenordens differentialligning*. Den type ligninger møder man meget ofte i fysik (sikkert også i økonomi). De kan være svære at løse

Øvelse 2.1.8

Lad $f(x) = e^{2x} - 4e^{-3x}$

a) Gør rede for at f er løsning til $y'' + y' = 6y$

2.2 Bestemmelse af løsninger

I sidste afsnit så vi, hvordan man undersøger om en funktion er løsning til en givet differentialligning. I dette afsnit skal vi se på, hvordan man *løser* en differentialling. Altså hvordan man selv finder løsningen.

Fuldstændige og partikulære løsninger

Betragt differentialligningen

$$y' = 2x.$$

Ligningen udtrykker, at y er en stamfunktion til $2x$, så derfor kan vi hurtigt se, at $f(x) = x^2$ er en løsning til ligningen. Men hvad med funktionen $g(x) = x^2 + 7$? Den opfylder også ligningen og derfor er den også en løsning. Fra integralregning ved vi at samtlige løsninger til ligningen har formen $y = x^2 + c$, hvor c er en arbitrær konstant. Vi kalder løsningerne $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^2 + 7$ for *partikulærer løsninger* og løsningen $y = x^2 + c$ for den *fuldstændige løsning*. Så de partikulære løsninger er konkrete løsninger, mens at den fuldstændige løsning er en generel løsning, som viser hvilken form de partikulære løsninger har.

Øvelse 2.2.1

Betragt differentialligningen $y' = 3$

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

b) Bestem to forskellige partikulære løsninger til differentialligningen

Fuldstændig løsning ved tabelopslag

Betragt ligningen

$$y' = y + 1$$

Skal vi løse den, skal vi finde en funktion, som giver sig selv plus en, når man differentierer den. Hvad kunne det mon være? Selvom ligningen er meget simpel er det svært at se, hvad løsningen er. Heldigvis skal vi kun lære at løse differentialligninger på nogle helt bestemte former. For hver form kan vi så finde den fuldstændige løsning i en tabel:

Ligning	Løsning	
$y' = h(x)$	$y = \int h(x)\,dx$	
$y' = h(x) \cdot g(y)$	$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int h(x)\,dx$	Separation af de variable
$y' = k \cdot y$	$y = c \cdot e^{k \cdot x}$	Eksponentiel vækst
$y' = b - a \cdot y$	$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$	
$y' = a \cdot y(M - y)$	$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$	Logistisk vækst

Tabel 2.1: Løsningsformler for differentialligninger

Tabellen findes også i formelsamlingen, men uden den sidste række. Vi kan se, at nogle af ligningerne har et specielt navn, og disse vil vi vende tilbage til senere.

Eksempel 2.2.1

Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til ligningen $y' = 3y$. Ligningen har formen $y' = k \cdot y$ og ifølge tabellen er den fuldstændige løsning givet ved:

$$y = c \cdot e^{k \cdot x}$$

I vores tilfælde er $k = 3$, så vi får løsningen

$$y = c \cdot e^{3x}$$

Øvelse 2.2.2

Bestem ved hjælp af tabellen den fuldstændige løsning til differentialligningerne:

a) $y' = 5y$

b) $y' = 2 - 3 \cdot y$

c) $y' = 4y(100 - y)$

d) $y' = \ln(x) + 1$

Nogle gange skal man omskrive ligningen lidt for at kunne genkende den i tabellen.

Eksempel 2.2.2

Vi vil finde den fuldstændige løsning til ligningen $y' = 4 + 5y$. Vi kan skrive ligningen som $y' = 4 - (-5)y$, så den har form som $y' = b - a \cdot y$ med $b = 4$ og $a = -5$. Ifølge tabellen er den fuldstændige løsning givet ved

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Vi indsætter $b = 4$ og $a = -5$:

$$y = \frac{4}{-5} + c \cdot e^{-(-5)x}$$

og reducerer

$$y = -\frac{4}{5} + c \cdot e^{5x}$$

Øvelse 2.2.3

Bestem den fuldstændige løsning til ligningerne:

a) $y' = 3 + 2y$

b) $2y' = y$

c) $y' + x = 0$

Partikulær løsning ved tabelopslag

Partikulære løsninger opstår når der kommer krav til løsningen – som regel i form af et punkt løsningen skal gå igennem.

Eksempel 2.2.3

Betragt differentialligningen

$$y' = 3x^2.$$

Vi vil bestemme den løsning f, som opfylder at $f(1) = 5$.

Vi finder først den fuldstændige løsning ved finde ligningen i tabellen. Ligningen har form som $y' = h(x)$, med $h(x) = 3x^2$, og ifølge tabellen er den fuldstændige løsning givet ved:

$$y = \int h(x)\, dx$$

Vi indsætter forskriften for $h(x)$ og integrerer

$$y = \int 3x^2\, dx = x^3 + c,$$

og den fuldstændige løsning er altså:

$$y = x^3 + c.$$

Vi vil nu finde den partikulære løsning, som opfylder at $f(1) = 5$. Altså når $x = 1$ skal $y = 5$. Det kan vi indsætte i den fuldstændige løsning:

$$5 = 1^3 + c$$

Vi isolerer c og får $c = 4$. Så vores endelige løsning er

$$f(x) = x^3 + 4$$

Kravet $f(1) = 5$ kan også formuleres som at ”f går igennem punktet $(1, 5)$”.

Øvelse 2.2.4

Betragt differentialligningen $y' = 2x - 1$.

a) Bestem den partikulære løsning til som går igennem punktet $(3, 4)$.

Eksempel 2.2.4

Betragt differentialligningen

$$y' = 6 + 3y.$$

Vi vil nu finde den løsning f som går igennem punktet $(0, 1)$.

Vi starter igen med at finde den fuldstændige løsning i tabellen. Vores ligning har form som $y' = b - a \cdot y$, hvor $a = -3$ og $b = 6$. Ifølge tabellen er den fuldstændige løsning givet ved:

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}.$$

Vi indsætter værdierne for a og b:

$$y = \frac{6}{-3} + c \cdot e^{-(-3) \cdot x},$$

og reducerer for så at få den fuldstændige løsning:

$$y = c \cdot e^{3x} - 2.$$

Vi indsætter punktet $(0, 1)$:

$$1 = c \cdot e^{3 \cdot 0} - 2,$$

og reducerer:

$$1 = c - 2.$$

Vi isolerer c og får

$$c = 3,$$

og vores endelige løsning er dermed:

$$f(x) = 3 \cdot e^{3x} - 2$$

Metoden i det ovenstående eksempel bruges når ligningerne har form som de 3 nederste rækker i tabellen. Det eneste som ændrer sig er at man får forskellig type af ligninger når man skal isolere c. Separation af de variable skal vi se nærmere på i det næste afsnit.

Øvelse 2.2.5

Bestem

a) den partikulære løsning til ligningen $y' = 7y$, som opfylder $f(0) = 3$.

b) den partikulære løsning til ligningen $y' = 2y(400 - y)$, som går igennem punktet $(0, 100)$.

Øvelse 2.2.6 (Svær)

Bestem den partikulære løsning til ligningen...

a) $\frac{dy}{dx} = 3y$, som opfylder $f(0) = 10$.

b) $y' - 9 = y$, som går igennem punktet $(0, 2)$.

c) $y' = (4x + 8)^{10}$, som opfylder $f(-2) = 0$.

d) $y' = -2y^2 + 20y$, som går igennem punktet $(0, 6)$

2.3 Separation af de variable

Separation af de variable er en metode, man kan bruge til at løse differentialligninger på formen

$$y' = h(x) \cdot g(y)$$

Fuldstændige løsninger ved separation

Ligesom man kan lave integration ved substitution på to måder, med en teknik eller en formel, så kan man tilsvarende lave separation af de variable med en teknik eller en formel. Vi vil først se på "teknikken".

Eksempel 2.3.1

Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til ligningen:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2} \quad , \quad y \neq 0$$

Vi ser at ligningen har form som $y' = h(x) \cdot g(y)$ og derfor kan vi bruge metoden separation af de variable til at finde den fuldstændige løsning. Vi starter med at omdøbe differentialkvotienten til $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{1}{3y^2}$$

Tricket er nu, at samle alt det som har med x at gøre på den ene side, og alt det som har med y at gøre på den anden. Vi starter med at gange med $3y^2$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x,$$

hvorefter vi nu ganger med dx på begge sider (her "leger" vi altså også at differentialkvotienten er en brøk):

$$3y^2\,dy = 2x\,dx$$

Vi har nu separeret variablene, dvs. alt med y er på den ene side af lighedstegnet og alt med x er på den anden. Vi integrerer på begge sider:

$$\int 3y^2\,dy = \int 2x\,dx,$$

hvilket giver

$$y^3 + c_1 = x^2 + c_2$$

Vi trækker c_1 fra på begge sider:

$$y^3 = x^2 + c_2 - c_1,$$

og samler de to konstant i en $c = c_2 - c_1$:

$$y^3 = x^2 + c$$

Vi tager nu den tredje rod på begge sider:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + c}$$

Normalt vil man ikke skrive så mange detaljer som i ovenstående eksempel. Man bliver hurtigt træt af at først skrive de to konstanter c_1 og c_2 for så senere at samle dem som en enkelt konstant c. Hvorfor ikke bare starte med en enkelt konstant? Vi kan også finde på at gøre flere ting på en gang når vi separere variablene. Ville vi skrive eksemplet mere kompakt, kunne det altså se således ud:

Eksempel 2.3.2

Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til ligningen:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2} \quad , \quad y \neq 0$$

Vi bruger separation af de variable. Vi har:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{1}{3y^2}$$

Vi ganger med $3y^2$ og dx på begge sider og integrerer:

$$\int 3y^2\, dy = \int 2x\, dx,$$

hvilket giver

$$y^3 = x^2 + c$$

Vi tager nu den tredje rod på begge sider:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + c}$$

Øvelse 2.3.1

a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen

$$y' = 2x \cdot y^2$$

Metoden har de nogle af de samme problemer som substitutionsmetoden vi så i afsnittet om integration ved substitution (vi behandler dx og dy som størrelser vi kan regne på). Det er ikke noget man som almindelig elev behøver at bekymre sig om, men hvis man er generet af argumentationen i eksemplerne, så kan man vælge at bruge en formel i stedet for:

Eksempel 2.3.3

Vi vil igen bestemme den fuldstændige løsning til ligningen:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2} \quad , \quad y \neq 0$$

Denne gang vil vi bruge en formel. Ligningen har form som $y' = h(x) \cdot g(y)$, med

$h(x) = 2x$ og $g(y) = \frac{1}{3y^2}$. Ifølge tabel 2.1 er den fuldstændige løsning givet ved

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int h(x)\,dx.$$

Vi indsætter forskrifterne for g og h i formlen

$$\int \frac{1}{\frac{1}{3y^2}}\,dy = \int 2x\,dx,$$

og reducerer (I kan vel jeres brøkregneregler, right?)

$$\int 3y^2\,dy = \int 2x\,dx,$$

Vi integrerer og får:

$$y^3 = x^2 + c,$$

hvilket giver:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + c}$$

Man bestemmer selv om man bruger teknikken eller formlen, men i det efterfølgende vil jeg tage udgangspunkt i formlen.

Øvelse 2.3.2

a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen $y' = e^x \cdot e^{-y}$. Brug formlen, hvis du kan.

Nogle gange skal man omskrive ligningen lidt for at kunne bruge formlen.

Eksempel 2.3.4

Vi vil finde den fuldstændige løsning til ligningen:

$$y' = \frac{2x}{3y^2}$$

Vi omskriver ligningen så den har formen $y' = h(x) \cdot g(y)$:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2}$$

Vi genkender nu ligningen fra eksempel 2.3.3, så resten kan regnes som i eksempel 2.3.3.

Øvelse 2.3.3

a) Regn ovenstående eksempel færdigt. Hvis det er helt klart for dig, hvordan det skal gøres, så spring øvelsen over.

Øvelse 2.3.4

a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen $y'e^{2y} = 3x$

For at kunne bruge formlen for separation af de variable er det nødvendigt at ligningen har formen $y' = h(x) \cdot g(y)$, men der er ingen som siger at $h(x)$ eller $g(y)$ ikke må være konstante funktioner.

Eksempel 2.3.5

Vi vil finde den fuldstændige løsning til ligningen $y' = \sqrt{y}$. Vi ser at ligningen har form som $y' = h(x) \cdot g(y)$ med $h(x) = 1$ og $g(y) = \sqrt{y}$ Løsningen er givet ved:

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int h(x)\, dx.$$

Vi indsætter $h(x)$ og $g(y)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \int 1\, dx.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}}$ kan vi skrive det som

$$\int y^{-\frac{1}{2}}\, dy = \int 1\, dx.$$

Vi integrere

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} y^{-\frac{1}{2}+1} = x + c$$

Vi reducerer

$$2y^{\frac{1}{2}} = x + c$$

Det er det samme som at

$$2\sqrt{y} = x + c$$

Så det må betyde at

$$y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}c)^2$$

Da c kan være hvad som helst, er der ingen grund til at skrive $\frac{1}{2}c$. Vi kan bare skrive c. Så får vi

$$y = (\frac{1}{2}x + c)^2$$

Partikulære løsninger ved separation

I udgangspunktet er der ikke noget nyt her. Skal man finde en partikulær løsning, starter man med en fuldstændig løsning, hvorefter man udnytter, at funktionen skal opfylde noget bestemt:

Eksempel 2.3.6

Betragt differentialligningen

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2} \quad , \quad y \neq 0$$

Vi vil nu bestemme den løsning f som opfylder $f(4) = 2$ Vi bruger formlen for separation af de variable og får

$$\int \frac{1}{\frac{1}{3y^2}} \, dy = \int 2x \, dx,$$

og reducerer:

$$\int 3y^2 \, dy = \int 2x \, dx,$$

hvilket giver

$$y^3 = x^2 + c$$

Vi tager nu den tredje rod på begge sider:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + c}$$

Vi skal nu bestemme c. Det er nemmest at tage udgangspunkt i mellemregningen $y^3 = x^2 + c$. Da $f(4) = 2$ kan vi indsætte $x = 4$ og $y = 2$ i ligningen.

$$2^3 = 4^2 + c,$$

hvilket giver $c = -8$ Altså er vores partikulære løsning givet ved:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8}$$

Øvelse 2.3.5

Lad:

$$y^{-2}y' = x \quad , \quad y > 0$$

a) Bestem den fuldstændige løsning.

b) Bestem den partikulære løsning som går igennem punktet $(2, 1)$

Desværre kan det godt være lidt mere kompliceret at finde den rigtige partikulære løsning, da vi kan risikerer at få flere muligheder når vi bestemmer den fuldstændige løsning:

Eksempel 2.3.7

Betragt ligningen

$$y' = \frac{x^2}{2y} \quad , \quad y < 0$$

Vi vil gerne finde den partikulærer løsning som opfylder $f(3) = -5$. Vi omskriver først ligningen så den har form som et produkt:

$$y' = x^2 \cdot \frac{1}{2y}.$$

Vi bruger formlen for separation af de variable og får

$$\int \frac{1}{\frac{1}{2y}}\, dy = \int x^2\, dx,$$

og reducerer:

$$\int 2y\, dy = \int x^2\, dx,$$

Vi integrerer:

$$y^2 = \frac{1}{3}x^3 + c,$$

hvilket giver:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + c}.$$

Vi kan se at der er to muligheder for y. Den er enten er positiv eller negativ. I selve differentialligningen har vi forudsat at $y < 0$, så det er altså den negative løsning vi skal have fat i.

$$y = -\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + c}.$$

Vi indsætter nu punktet $x = 3$ og $y = -5$ i ligningen $y^2 = \frac{1}{3}x^3 + c$:

$$(-5)^2 = \frac{1}{3}3^3 + c,$$

og reducerer:

$$25 = 9 + c,$$

Det ses at $c = 16$, så vi har altså:

$$f(x) = -\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 16}.$$

I eksemplet ovenover har vi forudsat at $y < 0$ og derfor ved vi vi skal have den negative løsning. Men vi kunne også se dette ud fra kravet $f(3) = -5$. Her ser vi nemlig at vi skal have en negativ y-værdi når $x = 3$. Det kan vi kun få med den negative løsning.

Øvelse 2.3.6

Betragt differentialligningen

$$y' = \frac{e^x}{y}$$

a) Bestem den partikulære løsning som opfylder $f(0) = -4$

Eksempel 2.3.8

Betragt ligningen

$$y' = x^2 \cdot y, \qquad y \neq 0$$

Vi vil bestemme den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet $(0, 1)$. Vi benytter separation af de variable:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y$$

Vi indsætter i formlen for separation af de variable

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int x^2\, dx.$$

Vi slår stamfunktionerne op og får

$$\ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Vi bruger den naturlige eksponentialfunktion på begge sider:

$$|y| = e^{\frac{1}{3}x^3+c},$$

hvilket må betyde at

$$y = \pm e^{\frac{1}{3}x^3+c},$$

Vi har ikke forudsat noget om hvorvidt y er positiv eller negativ, men da grafen skal gå igennem punktet $(0, 1)$ er det kun den positive løsning der duer:

$$y = e^{\frac{1}{3}x^3+c}.$$

Vi indsætter nu punktet $(0, 1)$ i ligningen $\ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + c$

$$\ln|1| = \frac{1}{3}0^3 + c,$$

hvoraf vi kan se, at $c = 0$. Vi har derved vores partikulære løsning:

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}.$$

Øvelse 2.3.7

Betragt ligningen

$$y' = (y + 5)(x + 2)$$

a) Bestem den partikulære løsning som opfylder $f(0) = 1$

b) Bestem den partikulære løsning som opfylder $f(0) = -1$

Du skal nu bestemme om du vil spise den røde eller den blå pille. Vil du spise den røde hopper du direkte til ekstraafsnittet. Ellers regner du følgende opgave.

Øvelse 2.3.8

Find den partikulære løsning til...

a) ligningen: $y' = \frac{6x^2}{y}$, hvor $f(2) = -4$

b) ligningen: $y' = 4 - y$, hvor f skal gå igennem $(0, -7)$

c) ligningen: $y' = 4x\sqrt{y}$, hvor $f(1) = 4$

Ekstra

Der er en detalje, jeg har sprunget over. Når man løser en differentialligning, bør man også angive definitionsmængden, og den skal være et åbent interval. Mere præcist, skal definitionsmængden være det størst mulige interval, som indeholder det punkt (eller de punkter), som løsningen kræves at gå igennem. Både ligningen og løsningen skal være defineret i hele intervallet.

Eksempel 2.3.9

Vi vil bestemme definitionsmængden for løsningen i eksempel 2.3.6. Vi har ligningen:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2} \quad , \quad y \neq 0$$

og vi fandt løsningen:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8}$$

Vores ligning er ikke defineret i $y = 0$, hvilket betyder at løsningen heller ikke er defineret når $y = 0$. For at finde det sted sætter vi $f(x) = 0$

$$\sqrt[3]{x^2 - 8} = 0$$

En rod er nul når indmaden er nul, så:

$$x^2 - 8 = 0$$

Dvs.

$$x = \pm\sqrt{8}$$

Altså er løsningen ikke defineret i $x = \pm\sqrt{8}$. Hvis definitionsmængen skal være et interval giver det altså tre mulige definitionsmængder.

1. $\mathrm{Dm}(f) =]-\infty, -\sqrt{8}[$
2. $\mathrm{Dm}(f) =]-\sqrt{8}, \sqrt{8}[$
3. $\mathrm{Dm}(f) =]\sqrt{8}, \infty[$

Vi husker at løsningen skulle opfylde $f(4) = 2$, så derfor skal 4 ligge i definitionsmængden. Altså er definitionsmængden:

$$\mathrm{Dm}(f) =]\sqrt{8}, \infty[$$

Alt i alt skriver vi facit som:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8} \quad , \quad x > \sqrt{8}$$

Øvelse 2.3.9

Find den partikulære løsning, inklusiv definitionsmængde, til...

a) ligningen: $y' = \frac{6x^2}{y}$, hvor $f(2) = -4$

b) ligningen: $y' = 4 - y$, hvor f skal gå igennem $(0, -7)$

c) ligningen: $y' = 4x\sqrt{y}$, hvor $f(1) = 4$

d) ligningen: $y' = \frac{-2xy}{1-x^2}$, hvor f skal gå igennem $(0, 1)$

2.4 Linjeelementer og retningsfelter

Skal vi løse en differentialligning, skal den have en bestemt form. Har den ikke form som ligningerne i tabel 2.1, så kan vi kun løse den med CAS. Der findes selvfølgelig mere avancerede tabeller og metoder, men der findes faktisk simple differentialligninger, som der ikke lige er formler for. I dette afsnit skal vi se på en metode, man vi bruge til at blive klogere på løsningerne, for de ligninger vi ikke umiddelbart kan løse.

Løsningskurver

I de fuldstændige løsninger optræder der altid konstanter. Det betyder at der er uendelige mange løsninger til den tilhørende ligning, og at vi til ethvert punkt kan finde en partikulær løsning, hvis graf går igennem netop det punkt. En graf for en partikulær løsning til en givet differentialligning kaldes en *løsningskurve*, eller en *integralkurve*.

Eksempel 2.4.1

Betragt differentialligningen:

$$y' = 2x$$

Det er nemt at se, at den fuldstændige løsning er:

$$y = x^2 + c$$

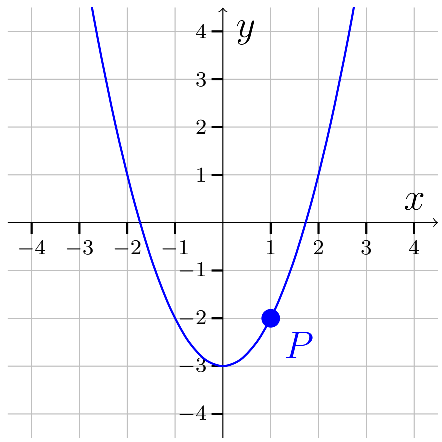
Vi vil nu tegne en løsningskurve igennem punktet $P(1, -2)$. Vi indsætter punktet i den fuldstændige løsning:

$$-2 = 1^2 + c$$

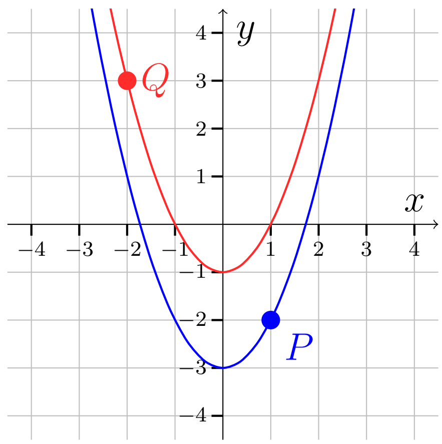
Vi ser at $c = -3$, så løsningskurven igennem punktet $P(1, -2)$ er altså grafen for den partikulære løsning

$$f(x) = x^2 - 3$$

Vi tegner løsningskurven:



Der er ikke noget specielt ved punkt P. Vi kunne have valgt et hvilket som helst andet punkt, f.eks. $Q(-2, 3)$. Det ville give os løsningskurven:



Eftersom der til ethvert punkt findes en løsningskurve gennem netop det punkt, så ville koordinatsystem blive malet sort, hvis vi prøvede at tegne alle løsningerne.

Øvelse 2.4.1

Betragt ligninging $y' = \frac{1}{5}y$

a) Bestem den fuldstændige løsning som du har lært i de forgående afsnit.

b) Tegn løsningskurven gennem punktet $P(0, 2)$. Altså bare I GeoGebra.

Linjeelementer

Vi skal nu se på en metode som kan bruges til at skitsere integralkurver for differentialligninger som har formen

$$y' = f(x, y)$$

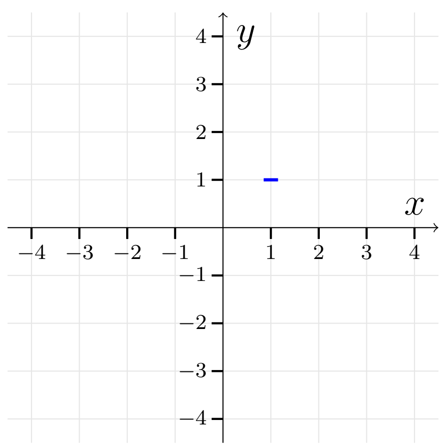
Dvs. ligninger som har y' på den ene side og noget som kun afhænger af x og y på den anden. Et eksempel på dette er ligningen

$$y' = x - y$$

Ligningen har ikke form som nogle af dem i tabel 2.1, og vi kan derfor ikke løse den med tabellen. Men fordi y' står isoleret i ligningen, kan vi bruge ligningen til at finde tangenthældninger (vi husker at differentialkvotienten er tangentens hældning). Vi vælger et tilfældigt punkt $(1, 1)$ og beregner hældningen i det punkt:

$$y' = x - y = 1 - 1 = 0$$

Dvs. den løsningskurve, som går igennem punktet $(1, 1)$, har hældningen på 0. Det kan vi illustrere med et lille vandret linjestykke, som går igennem $(1, 1)$;



Vi kalder det lille linjestykke for et linjeelement, og vi skriver det som $(1, 1; 0)$. De to 1-taller er punktets koordinater, og 0 er tangentens hældning. For en vilkårlig funktion f og et vilkårligt punkt $P(x_0, y_0)$ med $f'(x_0) = a$, skriver vi linjeelementet gennem punktet P som $(x_0, y_0; a)$.

Øvelse 2.4.2

Betragt differentialligningen $y' = x^2 \cdot y$

a) Bestem linjeelementet igennem punktet $P(-2, 2)$

b) Tegn linjeelementet

Eksempel 2.4.2

Vi vil bestemme linjeelementet for differentialligningen $y' = 2^y$ igennem punktet $(3, 1)$. Vi skal indsætte 3 i stedet for x og 1 i stedet for y i ligningen. Men der er slet ikke noget x i ligningen, så det er kun y vi erstatter:

$$y' = 2^1 = 2$$

Altså er linjeelementet $(3, 1; 2)$.

Øvelse 2.4.3

Betragt differentialligningen $y' = \ln(x^3 - 7)$

a) Bestem linjeelementet igennem punktet $P(2, -3)$

Eksempel 2.4.3

Vi vil bestemme linjeelementet gennem punktet $(-1, 2)$ for funktionen

$$f(x) = x^4 + 2.$$

Vi finder først $f'(x)$

$$f'(x) = 4x^3$$

Vi indsætter nu -1 for at bestemme linjeelementets hældning:

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4$$

Vi konkluderer at linjeelementet er $(-1, 2; -4)$

Øvelse 2.4.4

Lad $f(x) = 2\sqrt{x}$.

a) Bestem linjeelementet gennem punktet $Q(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$.

Eksempel 2.4.4

Et linjeelement for en funktion f er givet ved $(5, 2; 3)$. Vi vil bestemme en ligning for tangenten gennem punktet $(5, f(5))$. Ud fra linjeelementet kan vi se at tangenten går igennem punktet $(5, 2)$ og har en hældning på 3. Da tangenten er en lineær funktion må den have forskriften

$$y = ax + b.$$

Vi indsætter hældning:

$$y = 3x + b,$$

og vi udnytter nu at tangenten går igennem punktet $(5, 2)$:

$$2 = 3 \cdot 5 + b.$$

Vi isolerer b:

$$b = -13,$$

og tangentens ligning bliver dermed:

$$y = 3x - 13$$

Alternativt kunne vi have indsat i tangentens ligning fra formelsamlingen.

Øvelse 2.4.5

Et linjeelement for en funktion f er givet ved $(-3, 2; 4)$.

a) Bestem en ligning for tangenten gennem punktet $(-3, f(-3))$.

Øvelse 2.4.6

Kig på igen på eksempel 2.4.4.

a) Regn tangenten fra eksemplet, men denne gang så find den ved at indsætte i tangentens ligning fra formelsamlingen, dvs. formel (39).

Øvelse 2.4.7

Betragt differentialligningen $y' = \frac{8}{x+y}$. Lad f være integralkurven gennem $P(5, -1)$.

a) Bestem en ligning for tangenten til f gennem punktet P.

Øvelse 2.4.8

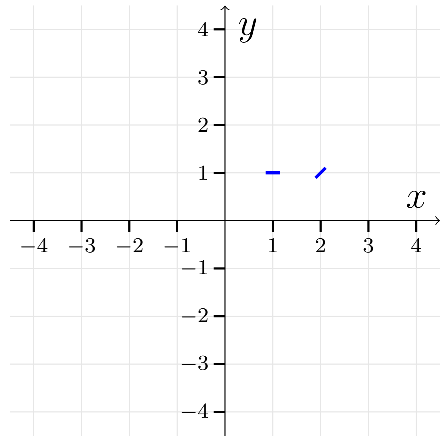
Betragt differentialligningen $y' = 3^{x-3} - y$. Lad f være en løsningskurve til differentialligningen gennem punktet $P(4, f(4))$. Antag at f har en tangent med en hældning på 3 i punktet P.

a) Bestem linjeelementet gennem P.

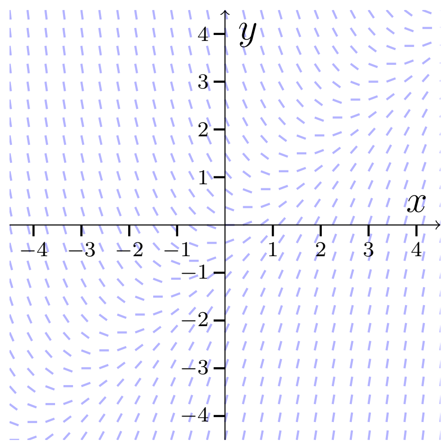
b) Bestem en ligning for tangenten for f i punktet P.

Retningsfelter

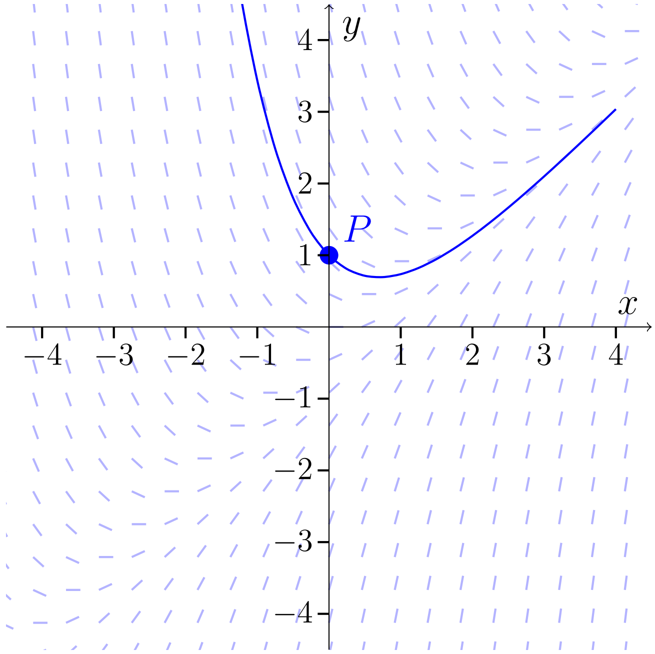
Vi vender nu tilbage til ligningen $y' = x - y$ og vores linjeelement gennem $(1, 1)$. Et enkelt linjeelement kan ikke bruges til ret meget, så vi tegner et til. Denne gang igennem $(2, 1)$:



Sådan bliver vi ved indtil vi har linjeelementer overalt i koordinatsystemet:



Nu har vi det vi kalder for et *retningsfelt*. Ved at følge linjeelementerne i retningsfeltet, kan vi nu se hvordan løsningskurverne ser ud. Vi kan f.eks. tegne en løsningskurve gennem $P(0, 1)$



Fordi løsningskurven typisk ligger mellem linjeelementerne, er det svært at vide præcis, hvor den skal ligge. Man skal prøve at vælge en hældning, der svarer til et kompromis mellem de omgivende linjeelementer. Alternativt kan man tilføje flere linjeelementer tætter på kurven.

Øvelse 2.4.9

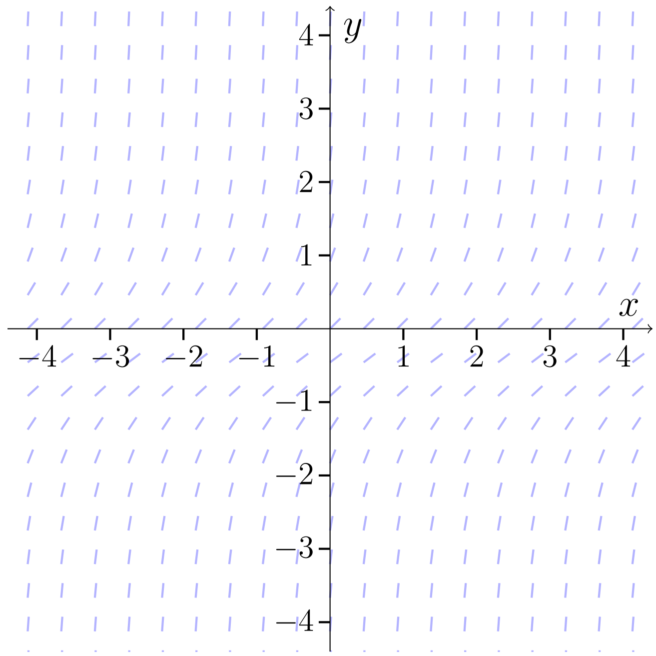
Ligningen $y' = x - y$ (som vi har behandlet ovenover) har en lineær funktion som løsning.

a) Find ud fra retningsfeltet ovenover forskriften for den lineære funktion.

b) Tjek at det er en løsning, du har fundet.

Øvelse 2.4.10

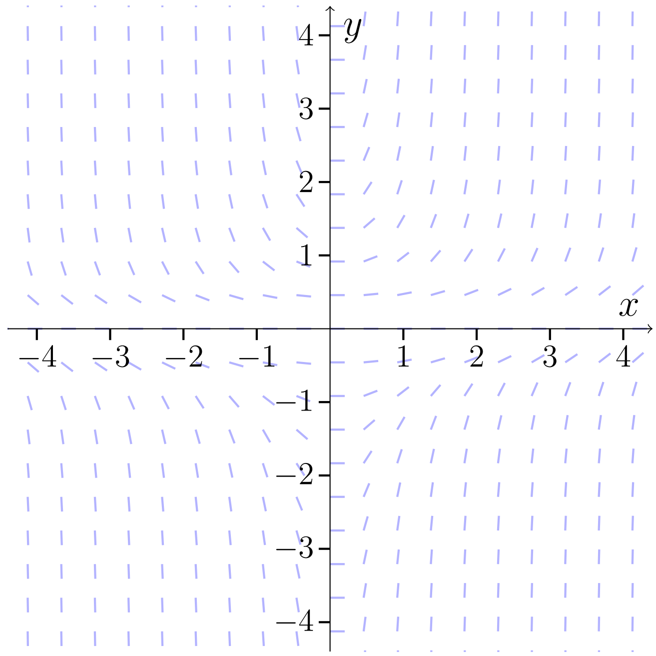
Betragt retningsfeltet for differentialligningen $y' = y^2 + y + 1$:



a) Tegn løsningskurven gennem punktet $P(2, 1)$.

Øvelse 2.4.11

Betragt retningsfeltet:.



Retningsfeltet er retningsfelt for en af følgende differentialligninger.

1. $y' = x$
2. $y' = y$
3. $y' = x \cdot y$
4. $y' = x^2 \cdot y$
5. $y' = x \cdot y^2$

a) Bestem hvilken differentialligning retningsfeltet er lavet ud fra.

2.5 Differentialligninger i GeoGebra

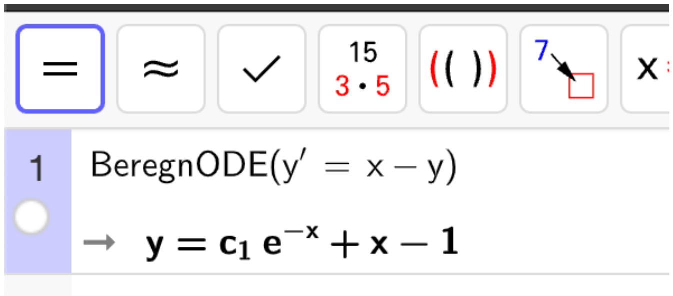
Igennem dette afsnit vil jeg tage udgangspunkt i ligningen $y' = x - y$

Fuldstændige løsninger

Vi finder den fuldstændige løsning i et CAS-vindue med kommandoen

```
BeregnODE(ligning)
```

Som vist her:



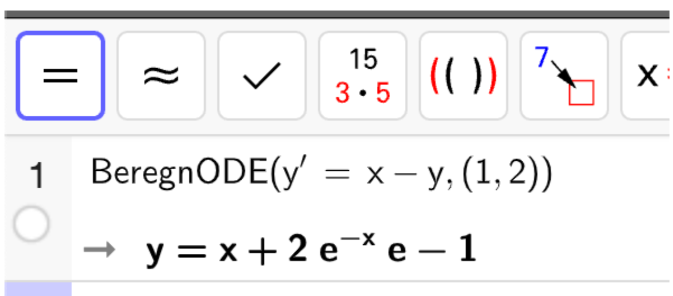
Vi kan se at den fuldstændige løsning til ligningen $y' = x - y$ er givet ved $y = c \cdot e^{-x} + x - 1$. GeoGebra kalder konstanten for c_1, men vi kalder vi den bare for c som vi plejer.

Partikulærer løsninger

Vi finder en partikulær løsning i et CAS-vindue med kommandoen

```
BeregnODE(ligning,Punkter(er) på f)
```

Som vist her:



Vi kan se at den partikulære løsning til ligningen $y' = x - y$ gennem punktet $(1, 2)$ er givet ved $y = x + 2 \cdot e^{-x} \cdot e - 1$.

Retningsfelter og linjeelementer

Vi bruger algebravinduet til at tegne retningsfelter. Vi bruger kommandoen:

```
RetningsFelt(f(x,y))
```

Så retningsfeltet for ligningen $y' = x - y$ kan bestemmes således:

Læg mærke til at at man ikke skal taste ligningen ind, men kun højresiden.

Der er ikke nogen kommando til at beregne linjeelementer, men det er også så nemt at vi ikke behøver nogen kommando.

Øvelse 2.5.1

Betragt differentialligningen $y' = x^2 - y$. I GeoGebra skal du:

a) Bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen.

b) Bestemme den partikulære løsning f til differentialligningen som opfylder $f(3) = 2$.

c) Lave et retningsfelt for ligningen.

2.6 Beviser - Differentialligninger

Sætning 2.6.1

For differentialligningen $y' = b - a \cdot y$, hvor $a \neq 0$, er den fuldstændige løsning givet ved

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

hvor c er en konstant.

Bevis

Vi har ligningen

$$y' = b - a \cdot y$$

Vi lægger $a \cdot y$ til på begge sider

$$y' + a \cdot y = b$$

og ganger med $e^{a\cdot x}$ på begge sider

$$y' \cdot e^{a\cdot x} + a \cdot y \cdot e^{a\cdot x} = b \cdot e^{a\cdot x}$$

Vi ændrer på faktorernes rækkefølge i bageste led på venstresiden

$$y' \cdot e^{a\cdot x} + y \cdot a \cdot e^{a\cdot x} = b \cdot e^{a\cdot x}$$

Vi genkender $a \cdot e^{a\cdot x}$ som værerende differentialkvotienten af $e^{a\cdot x}$

$$y' \cdot e^{a\cdot x} + y \cdot (e^{a\cdot x})' = b \cdot e^{a\cdot x}$$

og vi genkender nu venstresiden som værende differentialkvotienten af $y \cdot e^{a\cdot x}$

$$(y \cdot e^{a\cdot x})' = b \cdot e^{a\cdot x}$$

Vi integrerer på begge sider

$$y \cdot e^{a\cdot x} = \int b \cdot e^{a\cdot x}\, dx$$

og får

$$y \cdot e^{a\cdot x} = b\frac{1}{a} \cdot e^{a\cdot x} + c$$

Til sidst reducerer vi højresiden og ganger vi med $e^{-a\cdot x}$ på begge sider

$$y \cdot e^{a\cdot x} \cdot e^{-a\cdot x} = \frac{b}{a} \cdot e^{a\cdot x} \cdot e^{-a\cdot x} + c \cdot e^{-a\cdot x}$$

Da $e^{a\cdot x} \cdot e^{-a\cdot x} = 1$ får vi

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a\cdot x}$$

Sætning 2.6.2

Antag at $y' = h(x) \cdot g(y)$ og at $g(y) \neq 0$. Så gælder

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dx = \int h(x)\, dy$$

Vi vil lave to beviser for sætningen. Det første er nemt at forstå men problematisk, mens det andet er mere abstrakt men solidt.

Bevis

Antag $y' = h(x) \cdot g(y)$ og at $g(y) \neq 0$. Vi skriver y' som $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

Vi ganger med dx på begge sider:

$$dy = h(x) \cdot g(y)\, dx,$$

og da $g(y) \neq 0$ kan vi dividere med $g(y)$ på begge sider af ligningen:

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)\, dx.$$

Vi omskriver venstresiden

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = h(x)\, dx.$$

og integrere på begge sider

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int h(x)\, dx.$$

Bevis

Antag $y' = h(x) \cdot g(y)$ og at $g(y) \neq 0$. Da $g(y) \neq 0$ kan vi dividere med $g(y)$ på begge sider af ligningen.

$$\frac{y'}{g(y)} = h(x)$$

Vi omskriver venstresiden

$$\frac{1}{g(y)} y' = h(x)$$

og integrere med hensyn til x på begge sider

$$\int \frac{1}{g(y)} y'\, dx = \int h(x)\, dx$$

Afsluttende bruger vi nu substitutionsformlen til at omskrive venstresiden (forklaring følger)

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int h(x)\, dx$$

> Forklaring: Substitutionsformlen kan bruges når integranden har formen: $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Det passer med vores udtryk. Vi har nemlig en indre funktion y i en ydre funktion $f(y) = \frac{1}{g(y)}$, med den indres differentialkvotient y' ganget på. Bemærk at det g som optræder i differentialligningen er et andet g end det fra substitutionsformlen (hvor det betyder den indre funktion). Substitutionsformlen siger nu at $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, hvor t er den indre funktion. I vores tilfælde hedder den indre funktion y, og derfor får vi altså at $\int \frac{1}{g(y)} y'\,dx = \int \frac{1}{g(y)}\,dy$.

2.7 Anvendelse af differentialligninger

Vi slutter kapitlet af med et simpelt eksempel på anvendelse af differentialligninger. Antag at vi har en afgrænset skov hvor der bor elge (yes de der sjove dyr der ligner en blanding mellem en ko og en hest). Vi vil gerne finde ud af, hvor mange elge der er i skoven til et bestemt tidspunkt. Hvis der er rigeligt med plads og føde, så vil elgene kunne formere sig frit. Dvs. at hver enkelt elg bliver til f.eks. 1,5 elg på et år (i gennemsnit - man kan ikke have en halv elg). Sagt på en anden måde: Tilvæksten er $\frac{1}{2}$ elg pr. elg. Kalder vi antallet af elge for y, så er tilvæksten y' og tilvæksten pr. elg må så være $\frac{y'}{y}$. Vi får altså differentialligningen

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2},$$

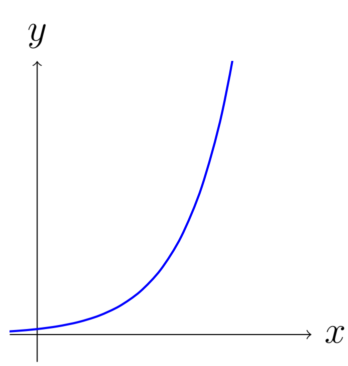
og hvis vi ganger med y får vi

$$y' = \frac{1}{2} \cdot y$$

Sådan en ligning har vi set før og den har ifølge formelsamlingen løsningen

$$y = c \cdot e^{k \cdot x}$$

Ligningen udtrykker eksponentiel vækst:



Figur 2.1: Antal elge y, som funktion af tiden x, når de for lov at formere sig ubegrænset.

I praksis er der grænser for hvor mange elge der er plads til i skoven. På et eller andet tidspunkt er der ikke nok plads/føde til at bestanden kan vokse. Kald nu antallet af elge som skoven kan bære for M. Hvordan vil bestanden udvikle sig? Hvis bestanden er lille, så burde den kunne vokse frit, men kommer tæt på M må tilvæksten blive lav. Den mest simple model for det vil være hvis tilvæksten pr. elg er proportional med antallet af "ledige pladser". Hvis antallet af elge er y og der er plads til M, så må der være $(M - y)$ ledige pladser til nye små elgeunger (kalve?, føl?). Altså får vi ligningen

$$\frac{y'}{y} = a \cdot (M - y)$$

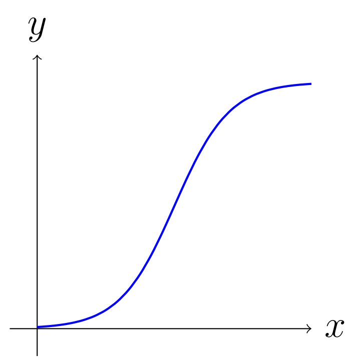
Vi ganger med y

$$y' = a \cdot y(M - y)$$

Vi genkender formlen fra tabellen. Det var den som hed logistisk vækst og den har løsningen:

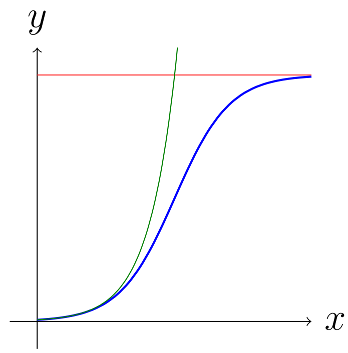
$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$$

Tegner man grafen ser den således ud:



Figur 2.2: Antal elge y, som funktion af tiden x når der er begrænset plads.

Vi kan se at den i starten ligner eksponentiel vækst og til slut flader ud. Faktisk nærmer den sig linjen $y = M$.



Figur 2.3: i starten ligner grafen eksponentiel vækst og til slut nærmer den sig $y = M$.

Ekstra

Øvelse 2.7.1

Betragt differentialligningen for logistisk vækst:

$$y' = a \cdot y(M - y)$$

a) Argumenter (ud fra ligningen) for at y må vokse eksponentielt når y er lille.

b) Argumenter (ud fra ligningen) for at y nærmere sig linjen $y = M$ når y er stor.

Kapitel 3

Kvadratisk programmering

Kvadratisk programmering er lidt som lineær programmering, men i stedet for at optimere lineære funktioner i to variable, vil vi optimere såkaldte kvadratiske funktioner i to variable. Det bliver sjovt med massere at god matematik.

3.1 Introduktion til kvadratisk programmering

I kvadratisk programmering kigger vi på funktioner af typen:

$$f(x,y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e \quad , \quad \text{hvor } a \text{ og } c \text{ ikke begge er nul.}$$

Den slags funktioner kaldes *kvadratiske funktioner i to variable* fordi de indeholder to variable, hvoraf en eller begge indgår i anden potens.

Kvadratisk programmering er lidt som lineære programmering – bare mere besværligt, så lad os da lige starte med at repetere noget lineær programmering.

Repetition af lineær programmering

Øvelse 3.1.1

Betragt ulighederne:

$$y \leq 6 \quad , \quad x + 2y \leq 14 \quad , \quad 2x + y \leq 16, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

a) Tegn polygonområdet givet ved ulighederne (du må gerne bruge GeoGebra). Gem dit polygonområde. Du skal bruge det i næste øvelse.

Vi husker at man regner niveaulinjen $N(t)$ ved at opstille ligningen:

$$f(x,y) = t.$$

Den fremkomne ligning kan så tastes i GeoGebra.

Eksempel 3.1.1

Betragt forskriften for en lineære funktion i to variable:

$$f(x,y) = x + 4y.$$

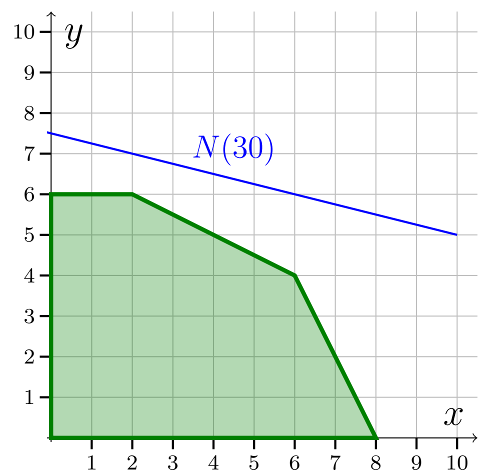
Vi vil tegne niveaulinjen $N(30)$ ind i polygonrådet fra ovenstående øvelse. Vi skal altså opstille ligningen:

$$f(x,y) = 30.$$

Vi indsætter vores forskrift i ligningen:

$$x + 4y = 30.$$

Denne ligning kan vi taste ind i GeoGebra og man får noget i stil med:



Øvelse 3.1.2

Med udgangspunkt i eksemplet ovenover:

a) Opstil ligningen for niveaulinjen $N(40)$

b) Indtegn $N(30)$ og $N(40)$ i dit polygonområde fra øvelse 3.1.1.

c) Bestem ud fra niveaulinjerne maksimumspunktet for f.

d) Bestem maksimumsværdien for f.

Niveaukurver for kvadratiske funktioner i to variable

I forbindelse med kvadratiske funktioner i to variable, kan vi også opstille ligningen:

$$f(x, y) = t.$$

Dette vil dog ikke give os en linje (se nedenstående øvelse). Derfor taler vi om *niveaukurver* i stedet for niveaulinjer.

Eksempel 3.1.2

Lad

$$f(x, y) = x^2 - 10x + y^2 - 8y + 41.$$

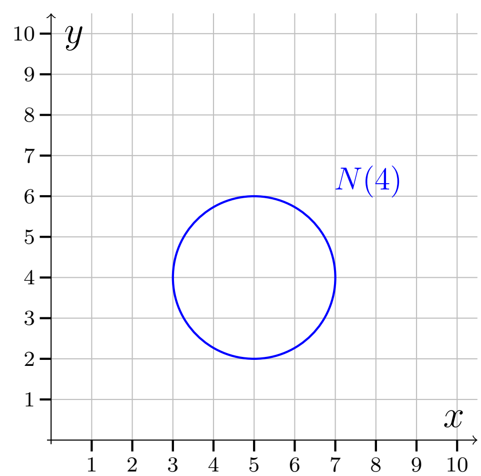
Vi vil nu bestemme en ligning for $N(4)$:

$$f(x, y) = 4$$

Vi indsætter forskriften og får den ønskede ligning.

$$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 41 = 4$$

Hvad mon den ligning udtrykker? Lad os prøve at taste den ind i en graftegner.



Det gav en cirkel. Interessant.

Man kunne nu tro at niveaukurver for kvadratiske funktioner altid er cirkler, men som vi skal se i næste øvelse, er der flere muligheder.

Øvelse 3.1.3

Tegn $N(10)$ i GeoGebra for følgende kvadratiske funktioner, og beskriv hvilken figur niveaukurven danner.

a) $f(x, y) = 2x^2 - 24x - y + 85$

b) $f(x, y) = x^2 - 8x + 9y^2 - 54y + 98$

Det viser sig at formen på niveaukurven afhænger af koefficienterne a og c i forskriften for den kvadratiske funktion:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e.$$

Der gælder følgende resultat som vi vil bevise senere:

Værdi af a og c	Niveaukurverne er
$c = 0$	Parabler
$a = c$	Cirkler
a og c har samme fortegn	Ellipser

Der er selvfølgelig også andre muligheder for a og c, men mulighederne i tabellen udgør dem vi møder her på HHX. Vi bemærker at en cirkel bare er en særligt pæn ellipse, så vi møder kun to grundlæggende situationer her: Enten er $c = 0$ og ellers har a og c samme fortegn.

Øvelse 3.1.4

Bestem ud fra forskriften (ikke noget GeoGebra), hvilken type niveaukurver funktionen har.

a) $f(x) = x^2 + x + y^2 - 3y - 234$

b) $f(x) = -3x^2 + 5x - y^2 + 123$

c) $f(x) = -x^2 - 3x + y$

3.2 Kvadratisk programmering når c er nul

Så en kvadratiske funktion i to variable er altså en funktion på formen:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e.$$

I dette afsnit vil vi begrænse os til kvadratiske funktioner, hvor $c = 0$, $a \neq 0$ og $d \neq 0$. Altså funktioner på formen:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + dy + e.$$

Der er to forskellige situationer, vi kan havne i, når vi laver kvadratisk programmering med funktioner på denne form. Vi skal nu se et eksempel på den første situation.

Eksempel 3.2.1 (Situation 1)

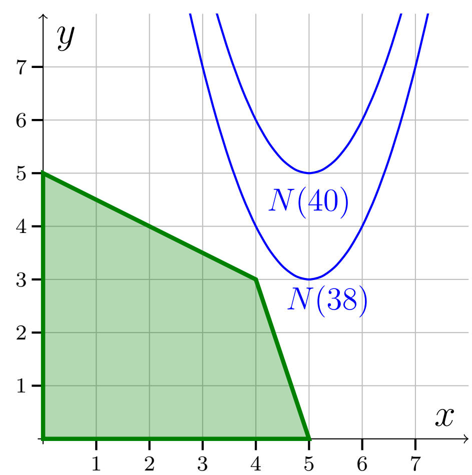
Vi vil finde maksimum for funktionen

$$f(x, y) = -x^2 + 10x + y + 10$$

inden for polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi tegner polygonområdet samt niveaukurverne $N(38)$ og $N(40)$.



Vi ser at niveaukurverne er parabler og at en høj placering af parablen svare til et højt niveau. Nu gælder det bare om at finde den højst mulige placering af parablen som har mindst et punkt til fælles med polygonområdet. Det er tydeligt ud fra tegningen at det sker i hjørnepunktet mellem de to begrænsningslinjer. Altså skæringspunktet mellem linjerne

$$x + 2y = 10 \quad \text{og} \quad 3x + y = 15$$

Regner man skæringspunkt ud får man $(4, 3)$ og sætter vi dem ind i $f(x, y)$ får vi værdien 37. Altså er maksimumsstedet $(4, 3)$ og maksimumsværdien er 37.

Øvelse 3.2.1

Du skal nu regne ovenstående eksempel igennem selv. Dvs.

a) Tegn polygonområdet i GeoGebra.

b) Tegn nogle forskellige niveaukurver som du kan bruge til at afgøre, hvilket punkt der er det optimale. I princippet er du nødt til at prøve dig frem, men nu har du eksemplet at gå ud fra, så du ved at $N(38)$ og $N(40)$ er velegnede.

c) Beregn det relevante hjørnepunkt.

d) Beregn maksimumsværdien.

Øvelse 3.2.2

Med udgangspunkt i det samme polygonområde som sidste øvelse, altså

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0,$$

skal du med metoden fra øvelsen bestemme maksimum og minimum for følgende funktioner.

a) $f(x,y) = x^2 - 18x + y + 76$

b) $f(x,y) = x^2 + 2x - 2y + 1$

Ud fra det vi har set indtil videre, kunne man godt tro, at kvadratisk programmeringsopgaver kan regnes med hjørnepunktsinspektion ligesom lineære programmering. Alle de eksempler, vi har set, har nemlig optimale punkter i hjørnepunkterne af polygonområdet. Men sådan er det ikke... heldigvis, fordi vi elsker jo at lære noget nyt, right?

Eksempel 3.2.2 (Situation 2)

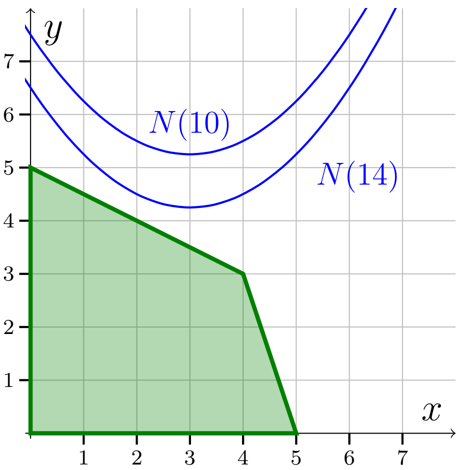
Vi vil finde minimum for funktionen

$$f(x,y) = x^2 - 6x - 4y + 40$$

inden for polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi tegner polygonområdet og niveaukurverne $N(10)$ og $N(14)$:



Vi ser at niveaukurverne er parabler og at en høj placering af parablen svare til lavt niveau. Vi leder efter minimum, så vi skal altså finde den højst mulige placering af parablen som har mindst et punkt til fælles med polygonområdet. Vi ser at punktet denne gang ikke ligger i et hjørne. Åh nej. Vi kan se, at det må ligge et sted på begrænsningslinjen $x + 2y = 10$. Vi finder punktet ved først at isolere y i denne begrænsningslinje. Det giver:

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Da det punkt vi leder efter ligger på den linje, må punktet opfylde ligningen. Altså må y-koordinaten til punktet være bestemt ved $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Vi kan derfor erstatte y med $-\frac{1}{2}x + 5$ i forskriften for f:

$$\begin{aligned} f(x, -\frac{1}{2}x + 5) &= x^2 - 6x - 4\left(-\frac{1}{2}x + 5\right) + 40 \\ &= x^2 - 4x + 20 \end{aligned}$$

Dvs. vores funktion af to variable $f(x, y)$ er nu blevet forvandlet til en funktion af én variabel. Vi kan kalde den $g(x)$. Vi har altså fået reduceret vores problem til at bestemme minimum for funktionen

$$g(x) = x^2 - 4x + 20.$$

Minimum kan bestemmes ved at løse ligning $g'(x) = 0$, hvilket giver løsningen $x = 2$. Vi husker at punktet ligger på linjen $y = -\frac{1}{2}x + 5$, så vi kan regne y-koordinaten ved at sætte $x = 2$ ind i denne ligning, hvilket giver $y = 4$.

Vi kan nu bestemme minimumspunktet ved at sætte punktet $(2, 4)$ ind i $f(x, y)$, hvilket giver 16.

Øvelse 3.2.3

Vi kigger på situationen fra ovenstående eksempel. Altså funktionen

$$f(x,y) = x^2 - 6x - 4y + 40$$

begrænset af

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

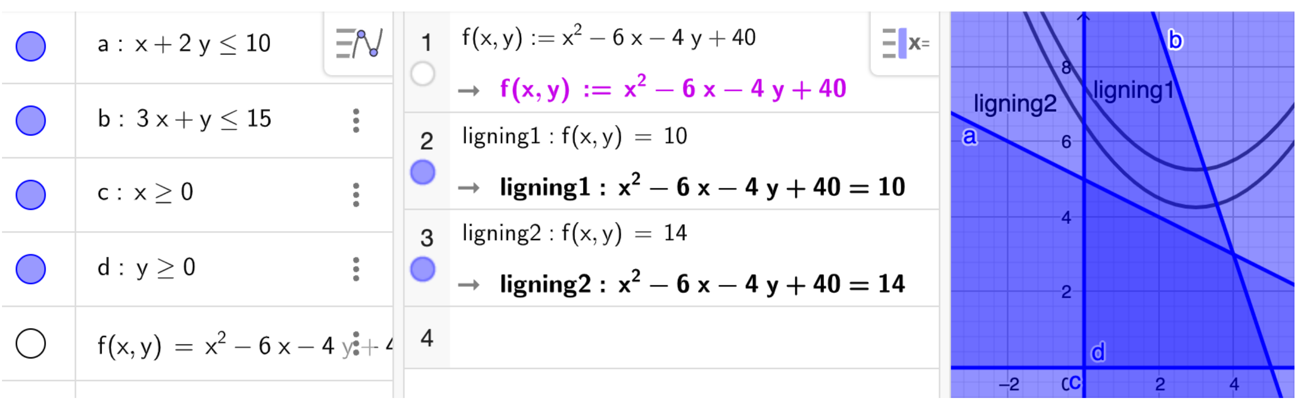
a) Regn minimumspunktet og minimumsværdien for funktionen (indenfor polygonområdet). Jaja det er sådan set gjort i eksemplet, men du skal udfylde de detaljer der mangler i eksemplet.

b) Regn maksimumspunktet og maksimumsværdien for funktionen (indenfor polygonområdet).

Når det optilmale punkt ikke ligger i et hjørnepunkt bliver det hurtigt lidt beregningstungt at bestemme det. Derfor er det en god idé at kunne gøre det helt i GeoGebra.

Eksempel 3.2.3

Vi vil regne spørgsmål a) fra øvelsen ovenover og gøre alt i GeoGebra. Vi tegner først polygonområdet og niveau:



Vi identificerer den relevante begrænsningslinje til at være $x + 2y = 10$. Vi isolere y (hovedregning) og får

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Nu regner vi funktionen $g(x) = f(x, -\frac{1}{2}x + 5)$ og løser ligningen $g'(x) = 0$

4	$g(x) := f\left(x, -\frac{1}{2}x + 5\right)$
	$\rightarrow$ $g(x) := x^2 - 4x + 20$
5	Beregn$(g'(x) = 0)$
	$\rightarrow$ $\{x = 2\}$

Vi finder y-værdien til minimumspunktet og regner minimumsværdien:

6	$-\frac{1}{2} \cdot 2 + 5$
	$\rightarrow$ **4**
7	$f(2, 4)$
	$\rightarrow$ **16**

Det er vigtigt, at man er i stand til at regne opgaver med så lidt brug af GeoGebra som muligt. Men man kan ikke nå igennem opgaverne hvis man vælger at regne i hånden hver gang. Derfor anbefaler jeg, at man skifter til at bruge GeoGebra, så snart man er tryk ved at regne i hånden.

Øvelse 3.2.4

Lad

$$f(x, y) = -x^2 + 10x + y + 86,$$

og lad et polygonområde være givet ved:

$$x + y \leq 7 \quad , \quad 2x + y \leq 10, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

a) Tegn polygonområdet i GeoGebra.

b) Bestem i hvilken retning f vokser, ved at tegne to niveaukurver i GeoGebra.

c) Beregn maksimumsstedet.

d) Bestem maksimumsværdien.

3.3 Kvadratisk programmering når a og c har samme fortegn

Vi ser igen på den kvadratiske funktion:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e.$$

Men nu begrænser vi os til at situationer, hvor a og c har samme fortegn og niveaukurverne dermed er ellipser. I dette tilfælde er der tre forskellige situationer vi skal lære at håndtere. De første to minder meget om det vi allerede har set.

Eksempel 3.3.1 (Situation 1)

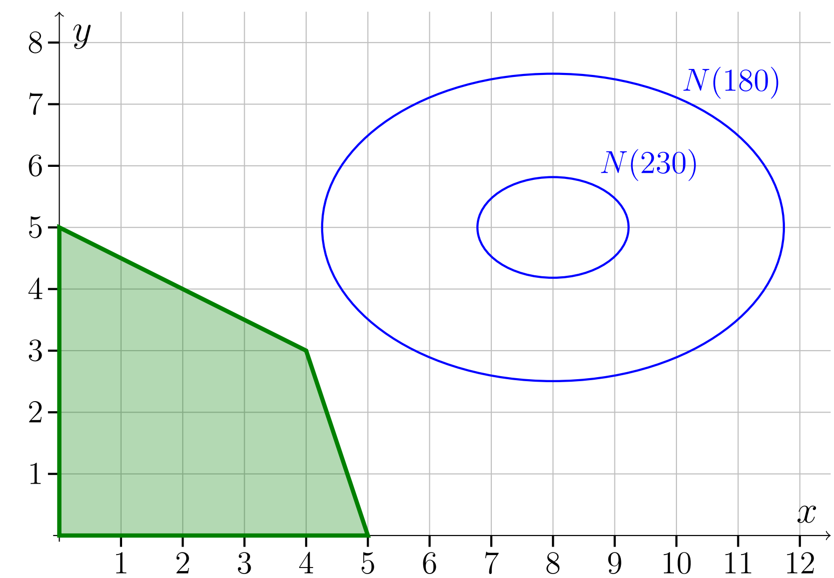
Vi vil finde maksimum for funktionen

$$f(x, y) = -4x^2 - 9y^2 + 64x + 90y - 245$$

inden for polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi tegner polygonområdet samt niveaukurverne $N(180)$ og $N(230)$.



Vi ser at niveaukurverne er ellipser med samme centrum, og at en lille ellipse svarer til et højt niveau. Nu gælder det bare om at finde den mindste ellipse som har et punkt til fælles med polygonområdet. Det er tydeligt ud fra tegningen at det sker i hjørnepunktet mellem de to begrænsningslinjer. Altså skæringspunktet mellem linjerne

$$x + 2y = 10 \quad \text{og} \quad 3x + y = 15$$

Regner man skæringspunkt ud får man $(4,3)$ og sætter vi dem ind i $f(x,y)$ får vi værdien 37. Altså er maksimumsstedet $(4,3)$ og maksimumsværdien er 37.

Vi bemærker at metoden er helt tilsvarende det vi så i sidste afsnit.

Øvelse 3.3.1

Lad $f(x,y) = -x^2 + 12x - y^2 + 10y + 79$ og antag at f er begrænset af polygonområdet givet ved:

$$x + 3y \leq 15 \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

a) Tegn polygonområdet og $N(138)$

b) Bestem maksimumsstedet for f.

c) Bestem maksimumsværdien for f.

Eksempel 3.3.2 (Situation 2)

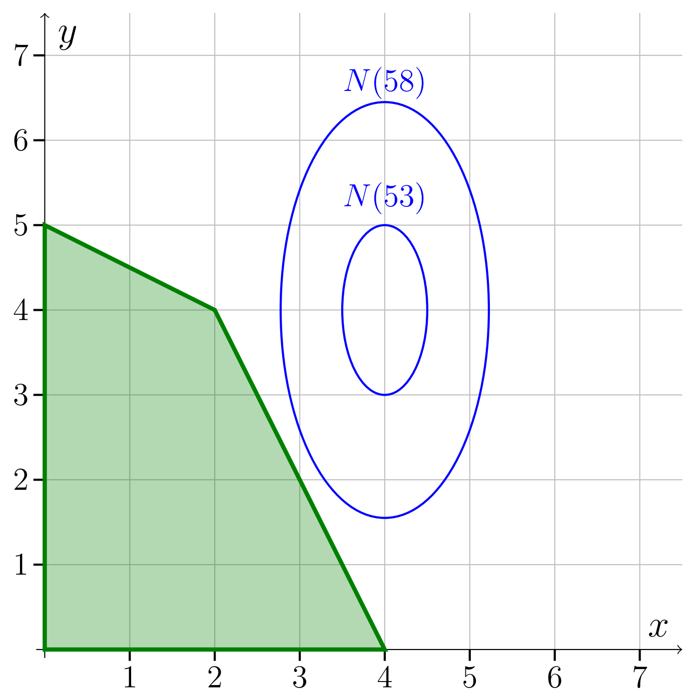
Vi vil finde minimum for funktionen

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 32x - 8y + 132$$

inden for polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 2x + y \leq 8, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi tegner polygonområdet og niveaukurverne $N(53)$ og $N(58)$:



Vi ser at niveaukurverne er ellipser med samme centrum, og at en lille ellipse svarer til et lavt niveau. Da vi leder efter minimum skal vi finde den mindste ellipse som har et punkt til fælles med polygonområdet. Vi ser at punktet ligger på begrænsningslinjen $2x + y = 8$. Vi finder punktet ved først at isolere y i denne begrænsningslinje. Det giver:

$$y = -2x + 8$$

Da det punkt vi leder efter ligger på den linje, må punktet opfylde ligningen. Altså må y-koordinaten til punktet være bestemt ved $y = -2x+8$. Vi kan derfor erstatte y med $-2x + 8$ i forskriften for f:

$$\begin{aligned} f(x, -2x+8) &= 4x^2 + (-2x+8)^2 - 32x - 8(2x+8) + 132 \\ &= 8x^2 - 48x - 132 \end{aligned}$$

Dvs. vores funktion af to variable $f(x, y)$ er nu blevet forvandlet til en funktion af én variabel. Vi kan kalde den $g(x)$. Vi har altså fået reduceret vores problem til at bestemme minimum for funktionen

$$g(x) = 8x^2 - 48x - 132.$$

Vi kan nu bestemme x-værdien til minimumspunktet ved kan bestemmes ved at løse ligningen

$$g'(x) = 0,$$

hvilket giver løsningen $x = 3$. Vi husker at minimumspunktet ligger på linjen $y = -2x + 8$, så vi kan regne y-koordinaten ved at sætte $x = 3$ ind i denne ligning, hvilket giver $y = 2$.

Vi kan nu bestemme maksimum ved at sætte punktet $(3, 2)$ ind i $f(x, y)$, hvilket giver 60.

Igen. . . helt tilsvarende metoden fra sidste afsnit.

Øvelse 3.3.2

Lad $f(x,y) = x^2 - 12x + 2y^2 - 20y + 106$ og antag at f er begrænset af polygonområdet givet ved:

$$x + 3y \leq 18 \quad , \quad x + y \leq 8 \quad \text{og} \quad 2x + y \leq 13 \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

a) Tegn polygonområdet og $N(30)$

b) Bestem minimumsstedet for f.

c) Bestem minimumsværdien for f.

Eksempel 3.3.3 (Situation 3)

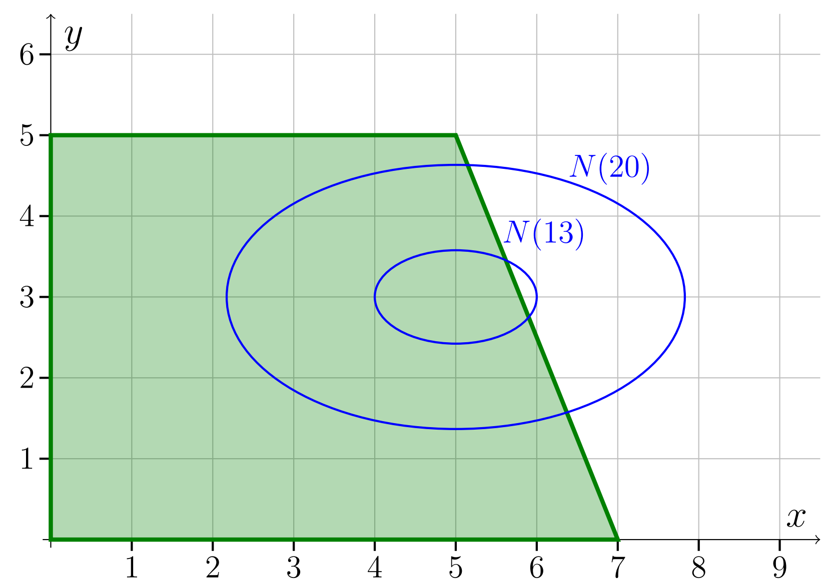
Vi vil finde minimum for funktionen

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 10x - 18y + 64$$

indenfor polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 2x + y \leq 8, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi tegner polygonområdet og niveaukurverne $N(20)$ og $N(13)$:



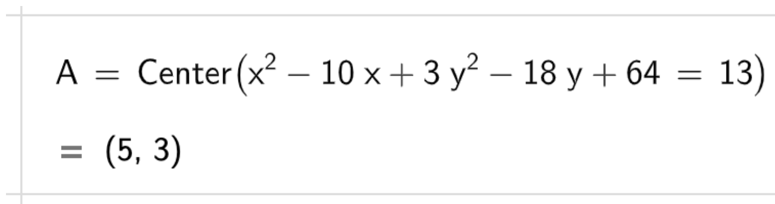
Da vi leder efter minimum skal vi finde den mindste ellipse som har et punkt til fælles med polygonområdet. Men da ellipsernes centrum ligger inden for polygonområdet, er der ingen grænser hvor små ellipserne kan være, og derfor må minimum ligge i ellipsernes centrum. Vi finder ellipsernes centrum i GeoGebra. Det er lige meget hvilken niveaukurve vi tager udgangspunkt i, da de alle har samme centrum. Her jeg brugt $N(13)$ som har ligningen:

$$x^2 + 3y^2 - 10x - 18y + 64 = 13$$

Vi finder centrum i GeoGebra (vi skal senere lærer at regne det selv) med kommandoen

`Center(keglesnit)`

Niveaukurven er vores "keglesnit", så vi får:

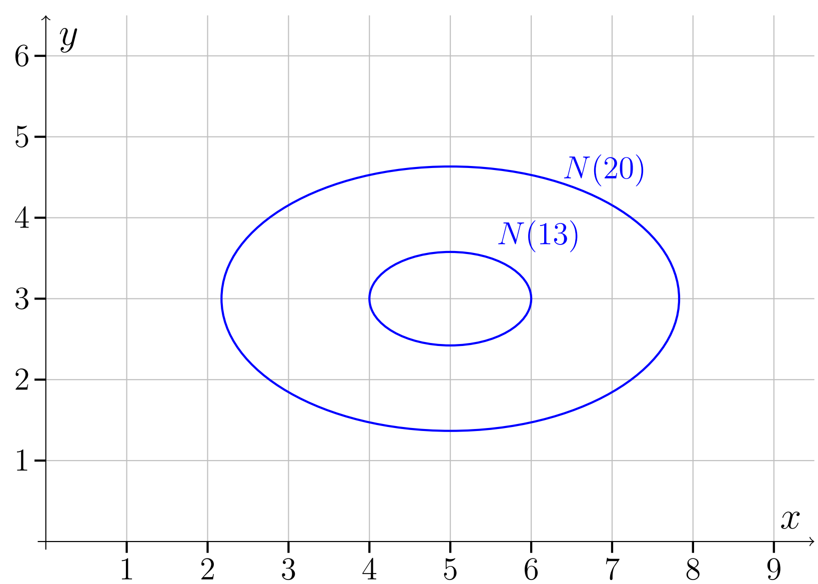


Altså er centrum for niveaukurverne $(5, 3)$, hvilket også er minimumspunktet.

Vi kan nu bestemme minimum ved at sætte punktet $(5, 3)$ ind i $f(x, y)$, hvilket giver 60.

Frie ekstrema

Lad os prøve noget sjovt. Vi fjerner polygonområdet fra sidste eksempel:



Det fremgår at f stadig har samme minimum (ellipsens centrum) som da vi begrænsede den til et polygonområde. Et ekstremum som opstår uafhængigt af et polygonområde kaldes et *frit ekstremum*. Funktionen f har altså frit minimum i $(5, 3)$. Ofte vil det frie ekstremum ligge udenfor polygonområdet, og der er derfor forskel på at spørge efter det frie minimum, eller funktions minimum underlagt begrænsningerne.

Øvelse 3.3.3

Betragt polygonområdet:

$$0 \leq x \leq 6 \quad \text{og} \quad 0 \leq y \leq 4,$$

og lad

$$f(x, y) = -x^2 + 2x - y^2 + 10y + 18.$$

a) Tegn polygonområdet.

b) Tegn $N(40)$.

c) Bestem det frie maksimum for f .

d) Bestem maksimum for f indenfor polygonområdet.

e) Bestem minimum for f indenfor polygonområdet.

Øvelse 3.3.4

Betragt polygonområdet:

$$x + y \leq 12 \quad , \quad x \geq 4 \quad \text{og} \quad y \geq 2,$$

og lad

$$f(x, y) = 27x^2 - 270x + 12y^2 - 144y + 1207$$

a) Tegn polygonområdet og $N(208)$

b) Bestem minimum for f indenfor polygonområdet.

I de næste afsnit skal vi se nærmere på den teoretiske grundlag for det vi har lavet i de 3 første afsnit.

3.4 Kvadratkomplettering

Vi skal nu i gang med at etablere det teoriske grundlag for den kvadratiske programmering. I dette afsnit skal vi lærer en algebraisk teknik kaldet *kvadratkomplettering*. Læg mærke til: kom**plettering** – IKKE noget med at ”komplimentere” – det siger man kun, hvis man har et kvadrat, som trænger til et selvtillidsboost.

Vi husker kvadratsætningerne:

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
2. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Eksempel 3.4.1

Ved hjælp at den første kvadratsætningen kan vi regne:

$$(x+2)^2 = x^2 + 2^2 + 2 \cdot x \cdot 2 = x^2 + 4x + 4$$

Øvelse 3.4.1

Regn ved hjælp af kvadratsætningerne:

a) $(x+3)^2$

b) $(x-1)^2$

c) $(a+2q)^2 - a^2$

Vi skal nu lære en teknik til at omskrive udtryk på formen $x^2 + kx$ til udtryk som kun indholder ét x. Det kaldes *at kvadratkomplettere*. Man kan vise (se øvelse 3.4.2), at der gælder følgende omskrivning:

$$x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \tag{3.1}$$

Selvom udtrykket på højresiden måske ser mere kompliceret ud, vil den i mange tilfælde være nemmere at arbejde med. F.eks. kan man ved hjælp af omskrivningen løse andengradsligninger uden at bruge nulpunktsformlen whaaaaaat?

Øvelse 3.4.2

Vis at omskrivning (3.1) er korrekt. Start med højresiden og brug en kvadratsætning til at regne udtrykket.

Eksempel 3.4.2

Vi vil nu kvadratkomplettere udtrykket $x^2 + 6x$. Vi bruger omskrivning (3.1)

$$x^2 + 6x = \left(x + \frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 = (x+3)^2 - 9$$

Vi vil nu kvadratkomplettere udtrykket $x^2 - 6x$.

$$x^2 - 6x = \left(x + \frac{-6}{2}\right)^2 - \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = (x-3)^2 - 9$$

Man kan kvadratkomplettere uden at huske omskrivning (3.1). Følgende eksempel er måske lidt svært at følge, men den måde man vil kvadratkomplettere på, hvis man er pro. Hvis du ikke forstår det, så bare brug metoden fra de to ovenstående eksempler.

Eksempel 3.4.3

Vi vil vil kvadratkomplettere $x^2 + 6x$. Vi sammenligner med højre side af kvadratsætningen

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Vi kan se at x^2 ligner a^2, så $a = x$, og $6x$ ligner det dobbelte produkt ($2ab$). Men hvis $6x$ skal være $2ab$, og $x = a$, så må b være 3. Altså har vi

$$(x + 3)^2.$$

Men dette udtryk giver ikke $x^2 + 6x$. Det giver $x^2 + 6x + 9$. Vi skal derfra trække 9 fra $(x + 3)^2$ for at ende med $x^2 + 6x$. Altså har vi:

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$$

Øvelse 3.4.3

Kvadratkompletter:

a) $x^2 + 8x$

b) $x^2 - 2x$

c) $x^2 + x$

d) $x^2 - ax$ (svær)

e) $x^2 - \frac{b}{a}x$ (svær)

Nogle gange vil man anvende kvadratkomplettering i udtryk hvor der optræder andre led. Så kvadratkompletterer man bare den relevante del af udtrykket og reducerer til sidst.

Eksempel 3.4.4

Vi vil nu kvadratkomplettere udtrykket $x^2 + 6x + 5$:

$$x^2 + 6x + 5 = \left(x + \frac{6}{2}\right)^2 - \frac{6^2}{4} + 5 = (x + 3)^2 - 4$$

Øvelse 3.4.4

Kvadratkompletter:

a) $x^2 - 10x + 5$

b) $x^2 - 4x + 4$

Eksempel 3.4.5

Vi vil nu kvadratkomplettere $2x^2 + 12x$. Da der står noget foran x^2 må vi faktorisere først:

$$2x^2 + 12x = 2(x^2 + 6x)$$

Det der står inden i parentesen kan vi nu kvadratkomplettere på normal vis:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x &= 2(x^2 + 6x) \\ &= 2((x+3)^2 - 9) \\ &= 2(x+3)^2 - 18 \end{aligned}$$

Øvelse 3.4.5

Kvadratkompletter:

a) $2x^2 - 4x$

b) $\frac{1}{2}x^2 - x$

c) $ax^2 + bx$ (svær)

Eksempel 3.4.6

Vi vil nu kvadratkomplettere $2x^2 + 12x - 4$. Da der står noget foran x^2 må vi faktorisere først. Vi skal kun faktorisere den del, der skal kvadratkompletteres:

$$2x^2 + 12x - 4 = 2(x^2 + 6x) - 4$$

Det der står inden i parentesen kan vi nu kvadratkompletter:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x - 4 &= 2(x^2 + 6x) - 4 \\ &= 2((x+3)^2 - 9) - 4 \\ &= 2(x+3)^2 - 18 - 4 \\ &= 2(x+3)^2 - 22 \end{aligned}$$

Øvelse 3.4.6

Kvadratkompletter:

a) $4x^2 - 24x + 4$

b) $cy^2 + dy + e$ (svær)

3.5 Parabler

I de følgende afsnit skal vi se nærmere på de geometriske figurer der dukker op i forbindelse med kvadratisk programmering. Vi starter med parablen, da I kender den allerede. Vi husker at en parabel er grafen for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

hvor $a \neq 0$. Når man konstruerer en graf, bliver funktions værdier $f(x)$ til y-værdier for grafen, og derfor kan ligningen for parablen skrives som

$$y = ax^2 + bx + c$$

Eksempel 3.5.1

Ligningen $x^2 + y = 3$ er ligning for en parabel. Det kan vi se ved at omskrive den så den får den sædvanlige form. Det gør vi ved at isolere y:

$$y = -x^2 + 3$$

Vi ser at den nu har form som en parabel $y = ax^2 + bx + c$.

Øvelse 3.5.1

Betragt ligningen $2x^2 - 2y + x + 4 = 0$

a) Omskriv ligningen så den har form som en parabel.

Øvelse 3.5.2

Betragt ligningen $2x = 3y - 1$

a) Undersøg om ligningen er ligning for en parabel.

Har vi en parabel og et punkt kan vi afgøre om punktet ligger på parablen.

Eksempel 3.5.2

Vi vil nu undersøge om punktet $(1, 3)$ ligger på parablen $y = 2x^2 - x + 2$. Vi indsætter punktets koordinater i stedet for x og y i ligningen:

$$3 = 2 \cdot 1^2 - 1 + 2,$$

og reducerer

$$3 = 3.$$

Da ligningen passer må punktet ligge på parablen.

Øvelse 3.5.3

a) Undersøg om punktet $(2, 2)$ ligger på parablen $y = x^2 - 1$

Øvelse 3.5.4

I skal opfriske betydningen af koefficienterne a, b og c i forskriften for andengradspolynomiet. Hvilken en betydning har de for grafen?

Det er betydningen af a og især c som vi for brug for at kende til snart. I forhold til a er det vigtigt at kunne bestemme krumningen ud fra a (konveks eller konkav). I forhold til c plejer man at sige at grafen skærer grafen y-aksen i c. Det er også rigtig nok, men vi har brug for at tænke på c på en lidt anden måde. Lad os sammenligne de to grafer $y = 2x^2 - 6x + 5$ og $y = 2x^2 - 6x + 7$. Vi kan se at de er ens bortset fra c-værdien. Men hvad betyder det i forhold til deres form og placering i koordinatsystemet? For en givet x-værdi er y-værdien for den anden graf 2 højere end y-værdierne for den første. Altså er de to grafer ens, bortset fra at den anden graf er forskudt med to opad. Så ændrer man på c-værdien i en parabel vil det forskyde grafen op eller ned alt efter om c bliver højere eller lavere.

Øvelse 3.5.5

a) Beskriv forskelle i form og placering af de to parabler $y = -x^2 + 2x + 1$ og $y = -x^2 + 2x - 4$.

3.6 Cirkler

Vi ved alle hvad en cirkel er, men skal vi regne på cirkler, har brug brug for en matematisk definition af en cirkel.

Definition 3.6.1

En cirkel med *radius* r og *centrum* C består af mængden af punkter med afstand r til C.

Læg mærke til, hvordan definitionen giver en matematisk præcis beskrivelse af det, vi intuitivt forstår som en cirkel. En cirklen er altså en samling af punkter, som har det tilfælles, at de alle har samme afstand ind til centrum. Vi fastlægger en cirkel ved dens ligning:

Sætning 3.6.1

En cirkel med radius r og centrum $C = (x_0, y_0)$ har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Lige som parablens ligning karakteriserer de punkter som ligger på parablen, karakteriserer cirklens ligningen de punkter som ligger på cirklen. Altså, de punkter (x, y) som gør ligningen sand er netop de punkter som ligger på cirklen.

Eksempel 3.6.1

Vi vil bestemme en ligning for cirklen med radius 4 og centrum i $(2, -3)$. Vi indsætter i cirklens ligning:

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2$$

og får vores endelige ligning

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Læg mærke til at fortegnene inde i parenteserne er omvendte i forhold til punktets koordinater.

Øvelse 3.6.1

Opskriv ligningerne for:

a) cirklen med centrum i $(1, 6)$ og radius 3.

b) cirklen med centrum i $(-2, 2)$ og radius 2.

c) cirklen med centrum i $(0, 0)$ og radius 1.

Eksempel 3.6.2

Ligningen

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$$

kan skrives som

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

og ligningen angiver derfor en cirkel med radius 5 og centrum i $(-3, 5)$.

Øvelse 3.6.2

Følgende ligninger beskriver alle cirkler. Bestem centrum og radius:

a) $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 25$

b) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1$

c) $(x-3)^2 + y^2 = 4$

Eksempel 3.6.3

Vi vil afprøve om punktet $(3, -1)$ ligger på cirklen fra eksempel 3.6.1. I eksemplet fandt vi ligningen

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16.$$

Vi indsætter nu punktets koordinater som x og y:

$$(3-2)^2 + (-1-3)^2 = 16$$

og reducerer

$$1 + 16 = 16.$$

Det passer næsten, men vi må konkludere at punktet ikke ligger på cirklen (men tæt på).

Øvelse 3.6.3

a) Tjek ved beregning om punktet $(6, 0)$ ligger på cirklen med centrum i $(-3, -4)$ og radius 10.

Regner man parenteserne i cirklens ligning kommer udtrykket til at se helt anderledes ud.

Eksempel 3.6.4

Vi vil nu regne parenteserne i cirklens ligning fra eksempel 3.6.1.

$$(x-2)^2+(y-3)^2=16$$

Vi bruger kvadratsætningen

$$x^2+4-4x+y^2+9-6y=16$$

og samler konstanter på højreside

$$x^2-4x+y^2-6y=16-4-9$$

og reducerer

$$x^2+y^2-4x-6y=3$$

Øvelse 3.6.4

a) Opskriv en ligning for cirklen med radius 3 og centrum i $(-1,2)$. Skriv resultatet på udfoldet form som resultatet i eksempel 3.6.4.

Når vi fremover støder på cirkler vil det som regel være på udfoldet form (altså uden parenteser).

Eksempel 3.6.5

Vi vil undersøge om ligningen $x^2+y^2+8x-2y=-13$ kan være ligningen for en cirkel. Vi starter med at samle x'erne og y'erne

$$x^2+8x+y^2-2y=-13.$$

Nu kvadratkompletterer vi

$$(x+4)^2-16+(y-1)^2-1=-13.$$

Vi samler konstanterne på højresiden

$$(x+4)^2+(y-1)^2=-13+16+1$$

og får

$$(x+4)^2+(y-1)^2=4,$$

hvilket kan skrives som

$$(x+4)^2+(y-1)^2=2^2.$$

Vi kan altså se at vi har en cirkel med centrum i $(-4,1)$ og radius 2.

Øvelse 3.6.5

Omskriv til cirklens ligning:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y = -8$

b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Øvelse 3.6.6

Bestem centrum og radius for cirklerne med ligningerne:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 11$

b) $x^2 + y^2 - 10x - 75 = 0$

Eksempel 3.6.6

Vi omskrive $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 12$, så den har form som cirklens ligning. Det nye i dette eksempel er, at der står et tal foran x^2 og y^2 (der står 3). Vi starter derfor med at dividerer ligningen igennem med 3. Nu får vi:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4,$$

og denne ligning kan vi omskrive som i Eksempel 3.6.5.

Øvelse 3.6.7

a) Gør eksempel 3.6.6 færdig. Altså omskriv $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ til cirklens ligning

Øvelse 3.6.8

Omskriv til cirklens ligning:

a) $2x^2 + 2y^2 + 20x + 12y = -50$

b) $4x^2 + 4y^2 - 20x - 8y = 115$

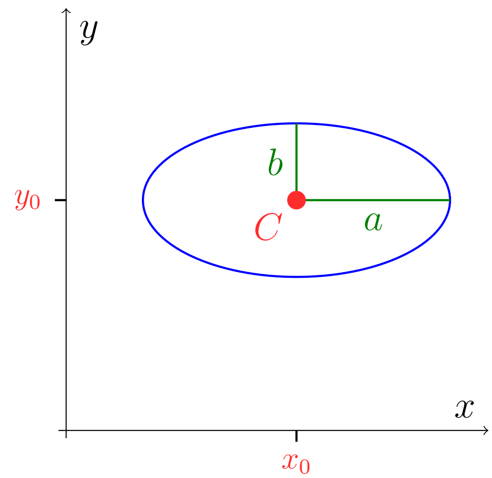
Øvelse 3.6.9

a) Bestem centrum og radius i cirklen med ligningen:

$$9x^2 + 9y^2 + 36x - 6y + 1 = 0$$

3.7 Ellipser

En ellipse er en en cirkel der er "strukket ud". Her er et eksempel:

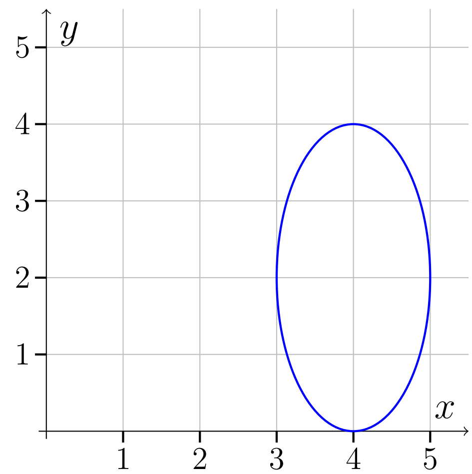


Figur 3.1: Ellipse med centrum i $C(x_0, y_0)$ og halvakser a og b.

Ovenstående figur viser en ellipse med centrum i $C(x_0, y_0)$. Længderne af stykket a kaldes ellipsens vandrette halvakser og længden af stykket b kaldes ellipsens lodrette halvakse. Den største af de to halvakser kaldes også den *halve storakse* mens den mindste kaldes ellipsens *halve lilleakse*. Læg mærke til at a altid måles vandret og b lodret.

Øvelse 3.7.1

Betragt ellipsen:



a) Bestem den vandrette halvakse, den lodrette halvakse og centrum for ellipsen.

b) Bestem den halve storakse og den halve lilleakse.

c) Bestem a, b, x_0 og y_0 for ellipsen.

Ligesom vi har cirklens ligning har vi også ellipsens ligning:

Sætning 3.7.1

En ellipse med centrum i $C = (x_0, y_0)$ og halvakser a og b har ligningen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.2}$$

Øvelse 3.7.2

Angiv centrum og halvakser for følgende ellipserne givet ved ligningerne:

a) $\frac{(x-9)^2}{25} + \frac{(y-14)^2}{16} = 1$

b) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1$

c) $\frac{(x-5)^2}{5} + \frac{y^2}{81} = 1$

d) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

Øvelse 3.7.3

En ellipse har vandret halvakse 4, lodret halvakse 2 og centrum i $(-2, 1)$

a) Opskriv en ligning for ellipsen.

b) Skriv ligningen på formen $ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$.

c) Tjek ved beregning om punktet $(-2, 1)$ ligger på ellipsen.

Øvelse 3.7.4

Betragt ellipsen med ligningen

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

a) Tegn ellipsen med papir og blyant

Øvelse 3.7.5

Antag at vi har en ellipse, hvor de to halvakser er ens.

a) Hvilken figur har vi så?

Øvelse 3.7.6 (Svær)

a) Vis ud fra ellipsens ligning at en ellipse med ens halvakser er en cirkel.

b) Hvilken betydning har halvakserne i dette tilfælde?

Eksempel 3.7.1

Vi vil vise at ligningen $4x^2 + y^2 - 16x + 6y = -9$ er ligning for en ellipse. Vi starter med at samle x'erne og y'erne:

$$4x^2 - 16x + y^2 + 6y = -9.$$

Nu faktorisere vi leddene med x (havde der stået en konstant foran y^2, skulle leddene med y også faktoriseres):

$$4(x^2 - 4x) + y^2 + 6y = -9.$$

Så kvadratkompletterer vi

$$4((x-2)^2 - 4) + (y+3)^2 - 9 = -9.$$

Så ganges parentesen ud:

$$4(x-2)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 = -9,$$

og vi samler konstanterne på højresiden:

$$4(x-2)^2 + (y+3)^2 = -9 + 16 + 9,$$

og regner højresiden:

$$4(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16.$$

Vi kan se på ellipsens ligning (3.2) at højresiden skal være 1, så vi dividerer med 16 på begge sider:

$$\frac{4(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Vi forkorter:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1,$$

og skriver nævnerne som et kvadrat (noget i anden):

$$\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y+3)^2}{4^2} = 1.$$

Ved sammenligning med ellipsens ligning (3.2) ses at vi har en ellipse med centrum i $(2, -3)$ og lille halvakse 2 og store halvakse 4. Puha det var hårdt arbejde, godt det ikke er mig som skal regne de efterfølgende øvelser.

Øvelse 3.7.7

Bestem ellipsens centrum og halvakser. Brug metoden fra ovenstående eksempel.

a) $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y = 3$

b) $25x^2 + 4y^2 + 50x - 24y = 39$

c) $9x^2 + y^2 + 36x + 14y + 76 = 0$

d) $8x^2 + 32y^2 - 32x = 0$ (VINK: du kan forsimple den først, ved at dividere igennem med et passende tal)

3.8 Mere om niveaukurver og frie ekstrema

I dette afsnit skal vi se på flere detaljer i forhold til at bestemme niveaukurver og frie ekstrema.

Når $c = 0$

Det er nemt at bestemme ligninger for niveaukurver når $c = 0$.

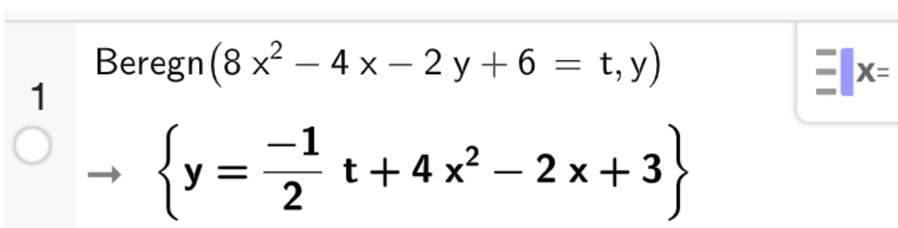
Eksempel 3.8.1

Lad $f(x, y) = 8x^2 - 4x - 2y + 6$. Vi vil bestemme en ligning for $N(40)$. Det gør vi ved at sætte $f(x, y) = 40$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 40 \\ 8x^2 - 4x - 2y + 6 &= 40 \\ -2y &= -8x^2 + 4x + 34 \\ y &= 4x^2 - 2x - 17 \end{aligned}$$

Vi konkluderer at ligningen for $N(40)$ er $y = 4x^2 - 2x - 17$. Vi ser at $N(40)$ er en parabel da ligningen har formen $y = ax^2 + bx + c$.

Vi vil også bestemme den generelle ligning for niveaukurven $N(t)$. Det kan gøres ligesom for $N(40)$, men denne gang vil jeg bruge GeoGebra CAS til at isolere y:



Vi ser at ligningen for $N(t)$ er:

$$y = 4x^2 - 2x + 3 - \frac{1}{2}t.$$

Det kan være lidt svært lige at gennemskue at $N(t)$ er en parabel. Men husk at t er en konstant så udtrykket $3 - \frac{1}{2}t$ er også en konstant og det er det som er konstantleddet c i parablens ligning $y = ax^2 + bx + c$.

Øvelse 3.8.1

Lad $f(x,y) = -9x^2 + 3y + 12$

a) Bestem en ligning for $N(6)$. Brug GeoGebra til at isolere y

b) Bestem en ligning for $N(t)$. Isoler y uden GeoGebra.

c) Gør rede for at $N(t)$ er en parabel.

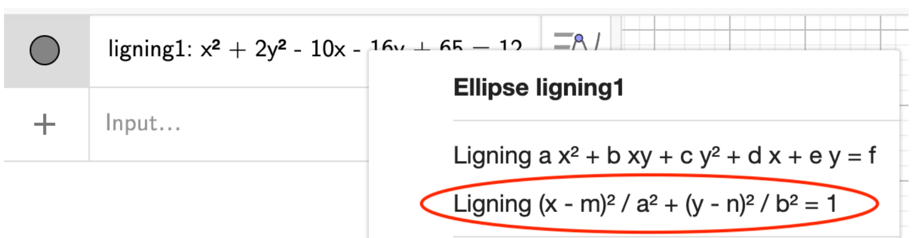
Når a og c har samme fortegn

Eksempel 3.8.2

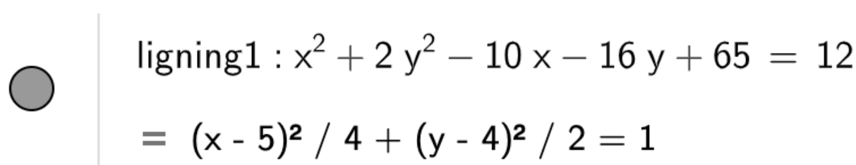
Lad $f(x) = x^2+2y^2-10x-16y+65$ Vi vil gøre rede for at $N(12)$ er en ellipse og vi vil bestemme centrum og halvakser. Vi opstiller ligningen for niveaukurven $N(12)$ ved at sætte $f(x,y) = 12$:

$$x^2 + 2y^2 - 10x - 16y + 65 = 12$$

Vi kunne nu bruge det vi har lært i sidste afsnit og omskrive ligningen til ellipseform. Men det er hårdt arbejde, så vi vælger at ”snyde” lidt. Vi taster den ind i et **algebravindue** i GeoGebra og højreklikker på ligningen. Vi ser at man nu kan vælge ligningen på ellipseform:



Vi får altså:



Vi ser at niveaukurven nu er blevet omskrevet til ellipseform, hvilket må betyde at den er en ellipse. Vi kan også aflæse centrum $(5,4)$ og halakser $a = \sqrt{4} = 2$ og $b = \sqrt{2} \approx 1.41$.

Øvelse 3.8.2

Lad $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 229$

a) Gør rede for at $N(120)$ er en ellipse.

b) Bestem centrum og halvakser for $N(120)$

c) Tegn $N(120)$

Det er ikke for alle værdier af t at $N(t)$ er en ellipse. Antag f.eks. at funktionen har et frit maksimum m. Da funktionen ikke kan blive højere end m kan det ikke lade sig gøre at tegne en niveaukurve, hvis $t > m$. Der er nemlig ingen punkter som vil opfylde ligningen for denne niveaukurve. Skal vi udtale os mere generelt om niveaukurverne når a og c har samme fortegn, har vi brug for følgende sætninger:

Sætning 3.8.1

Lad $f(x,y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$, og antag at a og c har samme fortegn (som ikke er nul selvfølgelig). Da har f frit ekstremum i punktet

$$C = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{2c}\right)$$

med ekstremumsværdi

$$m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Hvis a og c er positive er det frie ekstremum et minimum ellers er det et maksimum.

Ovenstående sætning fortæller os altså hvordan vi finder det frie ekstremum. Når vi har det frie ekstremum kan vi finde ud af hvilke værdier af t som er mulige for niveaukurven $N(t)$:

Sætning 3.8.2

Lad $f(x,y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$ og antag at f har frit ekstremum m.

Hvis $a > 0$, $c > 0$ og $t > m$ så er er niveaukurven $N(t)$ en ellipse. Vælges en højere værdi for t fås en større ellipse. Alle niveaukurverne har samme centrum.

Hvis $a < 0$, $c < 0$ og $t < m$ så er er niveaukurven $N(t)$ en ellipse. Vælges en højere værdi for t fås en mindre ellipse. Alle niveaukurverne har samme centrum.

Hvis $a = c$ i en af de to ovennævnte situationer, så er niveaukurverne tilmed cirkler.

Med de to sætninger kan beskrive niveaukurverne:

Eksempel 3.8.3

Lad $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 16x - 8y + 38$. Vi vil undersøge hvordan niveaukurverne ser ud. Vi regner først det frie ekstremum m:

$$\begin{aligned} m &= e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c} \\ &= 38 - \frac{(-16)^2}{4 \cdot 4} - \frac{(-8)^2}{4 \cdot 1} \\ &= 38 - 16 - 16 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Da $a > 0$ og $c > 0$ kan vi ud fra sætning 3.8.2 konkludere at niveaukurverne $N(t)$ er ellipser for $t > 6$, hvor store ellipser svarer til høje niveauer.

Øvelse 3.8.3

Lad $f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + 10x + 16y - 23$.

a) Gør rede for at niveaukurverne $N(t)$ er ellipser for $t < 18$.

b) Gør rede for at $N(10)$ er en ellipse

c) Tegn $N(10)$

Ekstra

Vi har også en sætning, der fortæller os noget om niveaukurverne for parabler:

Sætning 3.8.3

Lad $f(x,y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$.

Hvis $a \neq 0$, $d \neq 0$ og $c = 0$, så er niveaukurven $N(t)$ en parabel for alle værdier af t. Ændres t vil parablen parallelforskydes i lodret regning. Der gælder:

- Hvis d er positiv vil en højere værdi for t forskyde parablen op.
- Hvis d er negativ vil en højere værdi for t forskyde parablen ned.
- Hvis a og d har samme fortegn er der tale om en konkav parabel, ellers er den konveks.

Sammen med den tilsvarende sætning for ellipser (sætning 3.8.2) er de grundlaget for den teknik vi bruge i starten af kapitlet til at lave kvadratisk programmering. Den gang tegnede vi nemlig kun to niveaukurver, men tillod os at generalisere ud fra de to. Vi konkluderet f.eks. at hvis vi havde en lille ellipse som svarede til et højt niveau og en større ellipse som svarede til et mindre niveau, så ville niveauerne blive ved med at falde i takt med at ellipserne blev større. De to sætninger er argumentet for at dette er rigtigt.

Grafer for kvadratiske funktioner i to variable

Du kunne måske tænkte at du allerede har set grafer for de kvadratiske funktioner i to variable, men niveaukurver er ikke grafer. I det stedet kan man tænke på niveaukurver som vandrette snit igennem en graf (om lidt vil det fremstå mere klart hvad jeg mener med det).

Alle funktioner i to variable har grafer i tre dimensioner i stedet for to som vi er vant til. Lad os tage udgangspunkt i funktionen

$$f(x,y) = 0{,}64x^2 - 6{,}4x + y^2 - 10y + 41$$

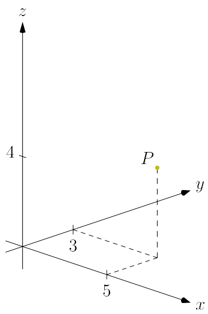
Vi kan tegne grafen ved at vælge et (x,y), regne $f(x,y)$ og tegne punktet ind. Det svarer helt til det vi gjorde for funktioner i to variable. Lad os vælge punktet $(5,3)$:

$$f(5,3) = 0{,}64 \cdot 5^2 - 6{,}4 \cdot 5 + 3^2 - 10 \cdot 3 + 41 = 4$$

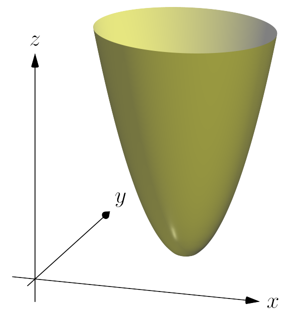
Det giver os punktet:

x	5
y	3
$f(x,y)$	4

Grafen konstrueres nu på følgende måde:

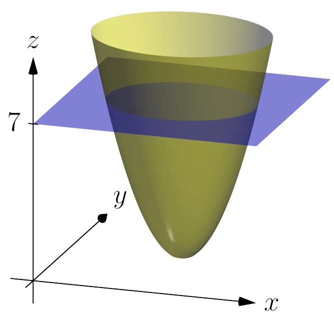


Først tegnes punktet ind.

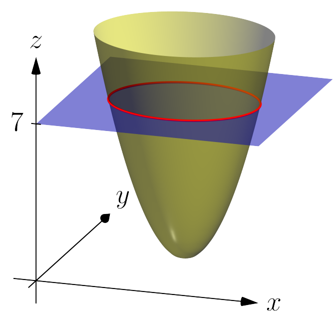


Grafen fremkommer når vi tegner rigtig mange punkter.

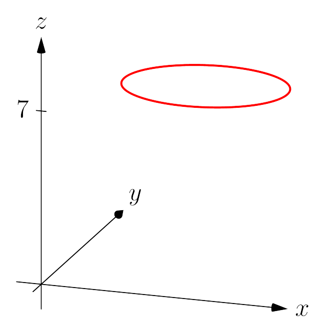
Niveaukurven kan nu konstrueres:



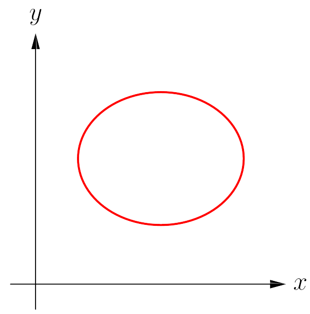
Nu bestemmes $N(7)$. Den består af alle de punkter som har en funktionsværdi på 7 så derfor tegnes en vandret flade ind i koordinatsystem med en højde på 7.



Der hvor fladen skærer grafen for f må være der hvor f har værdier 7. Så vi har tegnet en kurve som følger skæringen mellem f og fladen. Dette er niveaukurven $N7$.



Nu fjernes alt undtagen niveaukurven.



Koordinatsystemet drejes nu, så man ser det fra oven (som om vi står på toppen af z-aksen og kigger ned). Tadaaaa! en helt normal niveaukurve.

Øvelse 3.8.4

Vi kigger på grafen fra konstruktionen oven over.

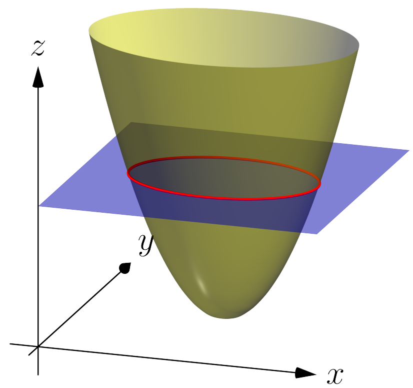
Funktionen f har et frit ekstremum.

a) Er det frie ekstremum et minimum eller maksimum?

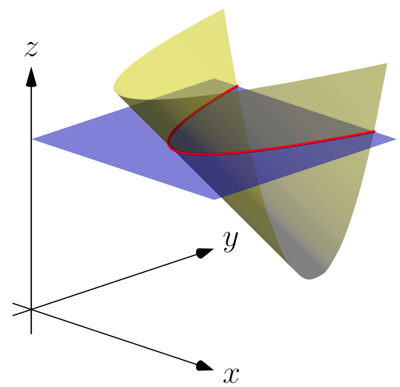
b) Bestem ekstremumsstedet ved aflæsning på grafen (ikke niveaukurven). Jaja, det er svært at gøre ordenligt. Både x og y-aksen er 10 enheder lange.

c) Bestem ekstremumsværdien ved aflæsning på grafen. JAJA JEG VED DET ER SVÆRT.

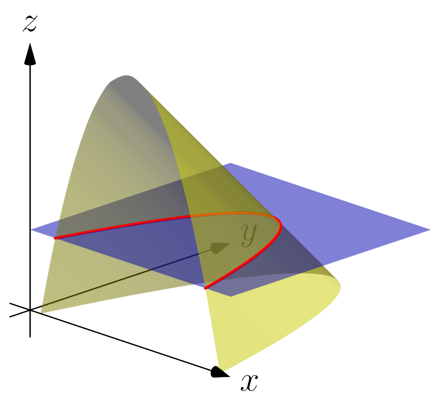
Øvelse 3.8.5



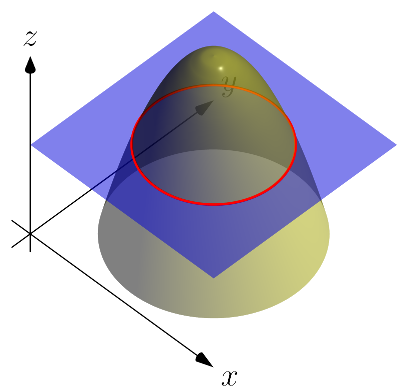
Graf 1



Graf 2



Graf 3



graf 4

a) Afgør, hvad man kan sige om koefficienterne for graf 1.

b) Afgør, hvad man kan sige om koefficienterne for graf 2.

c) Afgør, hvad man kan sige om koefficienterne for graf 3.

d) Afgør, hvad man kan sige om koefficienterne for graf 4.

3.9 Beviser til kvadratisk programmering

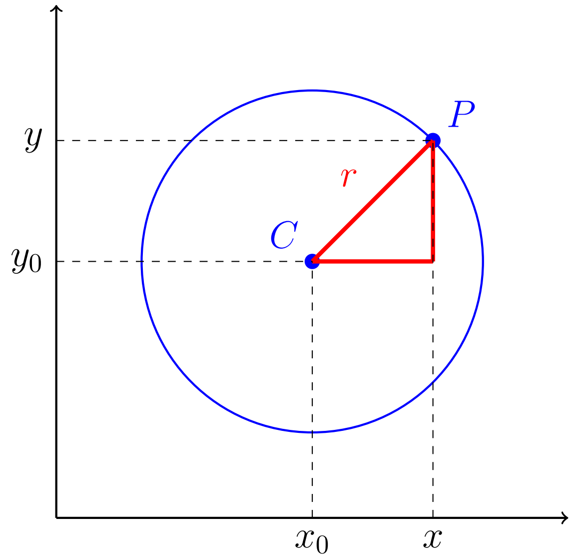
Sætning 3.6.1

En cirkel med radius r og centrum $C = (x_0, y_0)$ har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Bevis

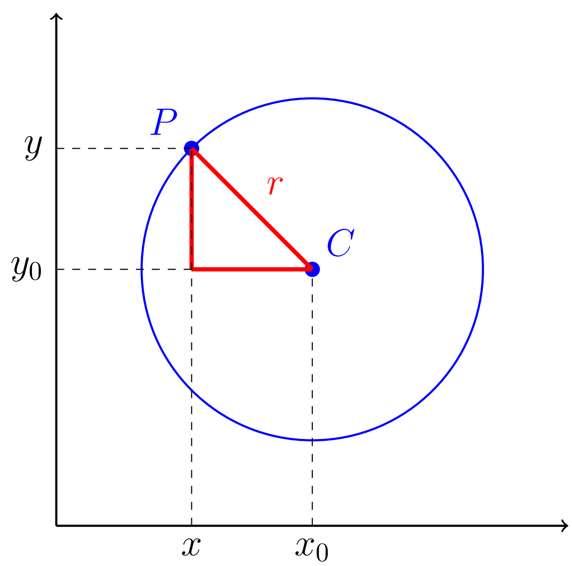
Påstanden bevises nemt vha. Pythagoras. Lad P være et punkt på cirklen:



Vi bruger Pythagoras på den røde trekanten på tegningen og får det ønskede resultat:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Men nu tænker du nok: "Benjamin: Hvad nu hvis punktet ligger et andet sted på cirklen?". Vi kunne f.eks. have:



Hvilket giver

$$(x_0 - x)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Vi kan se at der er byttet om på x og x_0 i forhold til den ligning vi gerne ville frem til. Men det er ligemeget om der står $x - x_0$ eller $x_0 - x$ i parentesen i cirklens ligning. Det giver det samme, fordi det bliver sat i anden. Vi har hermed bevist at cirklens ligning er bestemt ved:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Sætning 3.8.3

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$.

Hvis $a \neq 0$, $d \neq 0$ og $c = 0$, så er niveaukurven $N(t)$ en parabel for alle værdier af t. Ændres t vil parablen parallelforskydes i lodret regning. Der gælder:

- Hvis d er positiv vil en højere værdi for t forskyde parablen op.
- Hvis d er negativ vil en højere værdi for t forskyde parablen ned.
- Hvis a og d har samme fortegn er der tale om en konkav parabel, ellers er den konveks.

Bevis

Niveaukurven $N(t)$ er givet ved.

$$f(x, y) = t.$$

Vi indsætter forskriften.

$$ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = t.$$

Da $c = 0$ går cy^2-ledet ud:

$$ax^2 + bx + dy + e = t.$$

Vi vil gerne vise at vi kan skrive det på form som en parabel. Så vi isolerer y. Vi trækker ax^2, bx og e fra på begge sider.

$$dy = t - ax^2 - bx - e,$$

og dividerer med d:

$$y = \frac{t - ax^2 - bx - e}{d}.$$

Vi deler brøken op og omarrangerer leddene

$$y = \frac{-ax^2}{d} + \frac{-bx}{d} + \frac{t - e}{d},$$

hvorefter vi sætter x^2 og x ned bagved brøkerne.

$$y = \frac{-a}{d}x^2 + \frac{-b}{d}x + \frac{t-e}{d}$$

Vi kan se at udtrykket nu har form som en parabel, så $N(t)$ er altså en parabel. Vi kan se at det eneste led som indeholder t er konstantleddet $\frac{t-e}{d}$. Dvs. en ændring i t vil betyde end lodret parallelforskydning af parablen. Hvis d er positiv vil konstantleddet vokse når t vælges større, hvilket igen betyder at parablen forskydes op. Hvis d er negativ vil konstantleddet aftage da nævnerne i brøken bliver negativ, så når brøkens tæller vokser, så vil hele brøken blive mindre. Altså vil en negativ d-værdi betyde at parablen forskydes ned når t vælges større.

Vi kan se at koefficienten til x^2 er $\frac{-a}{d}$. Hvis a og d har samme fortegn vil brøken være negativ og parablen dermed konkav. Hvis a og d har forskelligt fortegn vil brøken være positiv og parablen vil dermed være konveks.

Vi vil nu bevise en sætning som ikke er så interessant i sig selv, men som skal bruges i de efterfølgende beviser. Derfor er den kaldt en "hjælpesætning".

Sætning 3.9.1 (Hjælpesætning)

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$ og antag at $a \neq 0$ og $c \neq 0$. Da kan f skrives på formen:

$$f(x, y) = a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + m,$$

hvor

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{d}{2c} \quad \text{og} \quad m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Bevis

Vi har funktionen

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e.$$

Vi faktoriserer:

$$f(x, y) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c\left(y^2 + \frac{d}{c}y\right) + e,$$

og vi vil nu kvadratkompletterer det der står i parenteserne. Da halvdelen af $\frac{b}{a}$

er $\frac{b}{2a}$ får vi:

$$f(x,y) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c\left(\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 - \left(\frac{d}{2c}\right)^2\right) + e.$$

Vi reducerer

$$f(x,y) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c\left(\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 - \frac{d^2}{4c^2}\right) + e,$$

ganger parenteserne ud

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 - c\frac{d^2}{4c^2} + e,$$

reducerer igen

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 - \frac{d^2}{4c} + e,$$

og bytter nu om på rækkefølgen:

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 + e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Vi ser at f har formen:

$$f(x,y) = a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + m,$$

hvor

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{d}{2c} \quad \text{og} \quad m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Sætning 3.8.1

Lad $f(x,y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$, og antag at a og c har samme fortegn (som ikke er nul selvfølgelig). Da har f frit ekstremum i punktet

$$C = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{2c}\right)$$

med ekstremumsværdi

$$m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Hvis a og c er positive er det frie ekstremum et minimum ellers er det et maksimum.

Bevis

Først omskrives $f(x,y)$ ifølge sætning 3.9.1. Vi har altså:

$$f(x,y) = a(x-x_0)^2 + c(y-y_0)^2 + m,$$

hvor

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{d}{2c} \quad \text{og} \quad m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Antag først at $a > 0$ og $c > 0$.
Vi vi nu undersøge, hvad der sker når vi variere x og y. Hvad sker der med funktionsværdien? Vi bemærker at m er en konstant og derfor forbliver det samme, når x og y ændrer sig. Så det er kun de to første led, der varierer, når vi ændre x og y. Vi ved at $(x-x_0)^2$ og $(y-y_0)^2$ ikke kan blive mindre end nul, da de har form som noget i anden. Vi har altså:

$$f(x,y) = \underbrace{a}_{+} \cdot \underbrace{(x-x_0)^2}_{+\text{ eller }0} + \underbrace{c}_{+} \cdot \underbrace{(y-y_0)^2}_{+\text{ eller }0} + \underbrace{m}_{?},$$

hvilket må betyde at:

$$f(x,y) = \underbrace{a(x-x_0)^2}_{+\text{ eller }0} + \underbrace{c(y-y_0)^2}_{+\text{ eller }0} + \underbrace{m}_{?}.$$

Vi kan se at de to første led altid er positive eller nul, så vi får den mindste funktionsværdi når de begge to er nul (m er en konstant, så den vil være det samme uanset hvad x og y er). De to første led er nul når $x = x_0$ og $y = y_0$. Den tilhørende funktionsværdi bliver:

$$f(x_0, y_0) = a(x_0 - x_0)^2 + c(y_0 - y_0)^2 + m = 0 + 0 + m = m$$

Altså har funktionen minimum i (x_0, y_0) og vi ser samtidigt, at minimumsværdien er m.

Antag nu at $a < 0$ og $c < 0$. Se næste øvelse.

Øvelse 3.9.1

a) Gør ovenstående bevis færdigt. Det fungerer tilsvarende som når $a > 0$ og $c > 0$.

Sætning 3.8.2

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$ og antag at f har frit ekstremum m.

Hvis $a > 0$, $c > 0$ og $t > m$ så er er niveaukurven $N(t)$ en ellipse. Vælges en højere værdi for t fås en større ellipse. Alle niveaukurverne har samme centrum.

Hvis $a < 0$, $c < 0$ og $t < m$ så er er niveaukurven $N(t)$ en ellipse. Vælges en højere værdi for t fås en mindre ellipse. Alle niveaukurverne har samme centrum.

Hvis $a = c$ i en af de to ovennævnte situationer, så er niveaukurverne tilmed cirkler.

Bevis

Antag først at $a > 0$, $c > 0$ og $t > m$:

Niveaukurven $N(t)$ er givet ved.

$$f(x, y) = t.$$

Forskriften for f kan ifølge sætning 3.9.1 skrives som:

$$a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + m = t.$$

Vi trækker m fra på begge sider

$$a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 = t - m.$$

Vi deler nu med $t - m$. Det kan vi gøre fordi vi ved at $t > m$ og dermed kan $t - m$ ikke være nul.

$$\frac{a(x - x_0)^2}{t - m} + \frac{c(y - y_0)^2}{t - m} = 1.$$

Vi forkorter den første brøk med a og den anden med c. Det kan vi gøre fordi ved ved at a og c ikke er nul (vi har antaget at de er større end nul):

$$\frac{(x - x_0)^2}{\frac{t-m}{a}} + \frac{(y - y_0)^2}{\frac{t-m}{c}} = 1.$$

Da $t > m$ er $t - m > 0$ og da også $a > 0$ og $c > 0$ er brøkerne $\frac{t-m}{a}$ og $\frac{t-m}{c}$ også positive. De kan derfor skrives som kvadratrødder i anden:

$$\frac{(x-x_0)^2}{\left(\sqrt{\frac{t-m}{a}}\right)^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\left(\sqrt{\frac{t-m}{c}}\right)^2} = 1.$$

Og der har vi den. Ellipsens ligning. Niveaukurven $N(t)$ er altså en ellipse med centrum i $(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{2c}\right) = C$, vandret halvakse $\sqrt{\frac{t-m}{a}}$ og lodret halvakse $\sqrt{\frac{t-m}{c}}$.

Når der vælges en højere værdi af t bliver $t-m$ større, og dermed bliver halvakserne $\sqrt{\frac{t-m}{a}}$ og $\sqrt{\frac{t-m}{c}}$ også større. Ud fra udtrykkene for halvaksene ses også at halvakserne bliver ens hvis $a = c$ og vi har allerede set (se øvelse 3.7.6) at en ellipse med ens halvakser er en cirkel.

Antag nu at $a < 0$, $c < 0$ og $t < m$: Se næste øvelse.

Øvelse 3.9.2

a) Gør ovenstående bevis færdigt. Det fungerer tilsvarende som når $a > 0$ og $c > 0$.

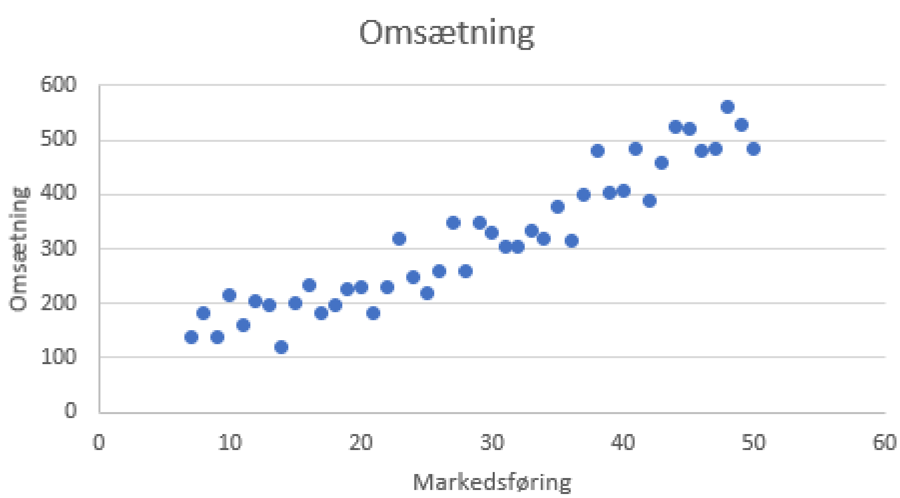
Kapitel 4

Regressionsanalyse

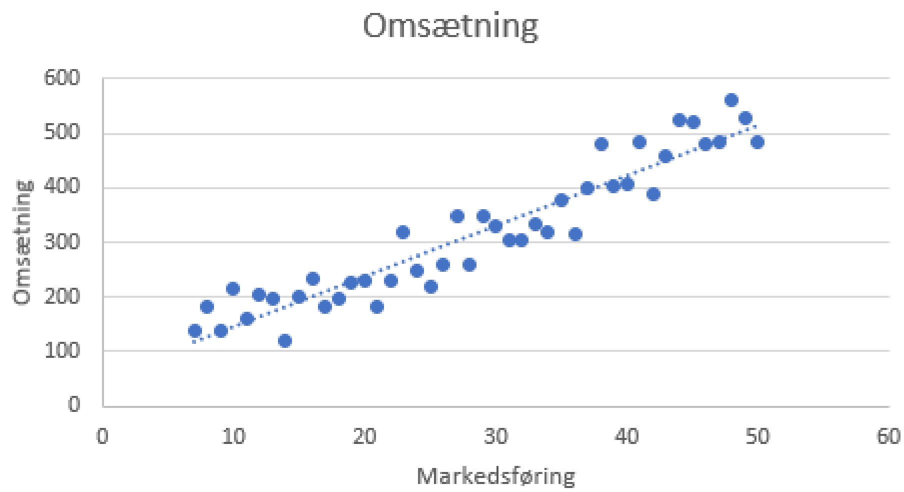
I dette kapitel skal vi først blive klogere på teorien bag lineær regression. Derefter skal vi se på multipel regression som kan bruges når vores y-værdier afhænger af mere end én variabel. Efter dette vil vi se på "modelkontrol", som går ud på at undersøge validiteten af ens model. Til sidst skal vi lære at lave lineær regression uden computer.

4.1 Lineære modeller

Lad os sige at vi vil bestemme sammenhængen mellem penge brugt på markedsføring og omsætning for virksomheder. Vi spørger nogle virksomheder og laver et xy-plot:



Det ser ud til at punkterne følger en lineær funktion, men med tilfældige afvigelser (op og ned) fra linjen:



I afsnittet om lineære regression (mat-b) ignorerede vi afvigelserne, og beskæftiget os kun med den lineære funktion. Nu skal vi se på en model, som også beskriver afvigelserne. Den ser således ud:

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

Bogstaverne α, β og ε, er de græske bogstaver alfa, beta og epsilon. Vi kan se at y har form som en lineær funktion bortset fra ε. Størrelsen ε er en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 0. Denne stokastiske variabel giver afvigelserne fra linjen og derfor kaldes den også *fejlleddet*.

Estimeret lineær model

Når vi laver lineær regression, så antager vi først at data kan beskrives med den lineære model

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

hvorefter vi estimere α og β. Estimaterne for α og β kalder vi for a og b, og ud fra dem kan vi opskrive den *estimerede* model:

$$y = ax + b + \varepsilon$$

Det er vigtigt at forstå, at vi egentligt er interesseret i α og β, men at det er umuligt at bestemme dem eksakt, fordi vores data er "forurenet" med de tilfældige ε'er (afvigelser). Dvs. laver vi en ny undersøgelse af sammenhæng mellem markedsføringsbudget og omsætning, hvor vi spørger andre virksomheder, vil sandsynligvis finde en anden model, fordi de tilfældige afvigelser ε falder anderledes ud. Selvom vi ikke kan sige præcis, hvad α og β er, kan vi dog bestemme konfidensintervaller for dem, hvilket vi kommer til at gøre i næste afsnit. Når vi skal bruge den estimerede model i praksis, dropper vi ε og skriver blot:

$$y = ax + b$$

... og så er vi tilbage til den goe gamle regressionsmodel fra mat-b. Grunden til at vi dropper ε er, at det er en stokastisk variabel som har middelværdi 0. Dvs. at vores bedste bud på dens værdi (for et konkret punkt på grafen) er 0. Vil vil i nogle sammenhænge skrive modellen som

$$\hat{y} = ax + b$$

Her skriver vi $\hat{y}$, for at understrege, at der er tale om vores bedste bud på y, og ikke den virkelige y-værdi (som svinger tilfældigt omkring linjen).

4.2 Regression i Analysis Toolpak

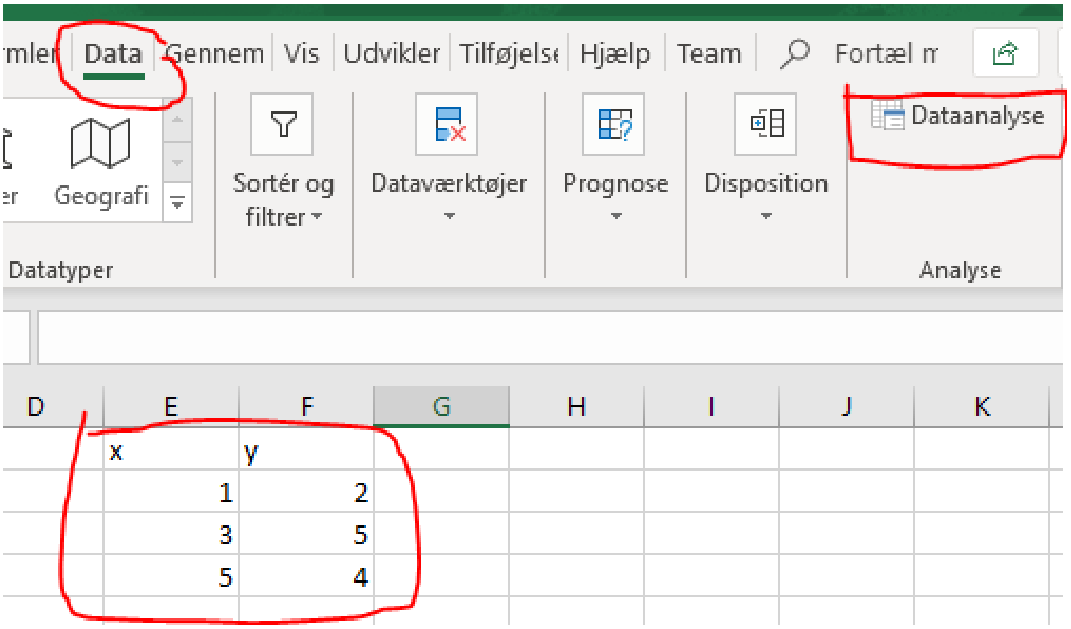
Analysis Toolpak er en udvidelse til Excel. Man kan bruge den til at lave almindelig lineær regression, men man kan få flere informationer, end med den metode vi kender fra Mat-B.

Start med at installer Analysis Toolpak, hvis du ikke allerede har den. Du kan se hvordan her: https://support.office.com/en-us/article/load-the-analysis-toolpak-in-excel-6a63e598-cd6d-42e3-9317-6b40ba1a66b4.

Vi vil tage udgangspunkt i datasættet:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Vi skriver tabellen ind i Excel og finder "Dataanalyse"(Under båndet "Data"):

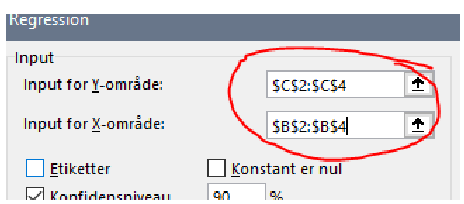


Nu kommer der en dialogboks frem og alt efter hvilke bokse vi tjekker, kan vi få Analysis Toolpak til at bestemme forskellige relevante størrelser. Vi skal se på hvordan man bestemmer nogle af disse størrelser, men også hvad de betyder. Vi vil kigge på følgende

- Forskrift for regressionslinjen og R^2
- Residualer og residualplot
- Konfidensintervaller

Forskrift for regressionslinjen

I dialogboksen vælger vi "Regression"og i den efterfølgende dialogbox vælger vi vores x og y-værdier:



Vi finder nu tabellen:

	Koefficiente	tandardfe	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	2,166667	1,972027	1,098701	0,470082	-22,8903	27,22364	-22,8903	27,22364
X-variabel	0,5	0,57735	0,866025	0,545629	-6,83593	7,835931	-6,83593	7,835931

Vi aflæser resultatet i kolonnen "Koefficienter". Det øverste tal ("Skæring") er b og det nederste ("X-variabel") er a. I alt får vi

$$y = 0{,}5x + 2{,}17.$$

Denne forskrift er præcis magen til den vi ville finde hvis vi brugte den sædvanlige metode til at lave regression. Vi finder også vores R^2:

Regressionsstatistik	
Multipel F	0,654654
R-kvadrer	0,428571
Justeret R	-0,14286
Standardf	1,632993
Observati	3

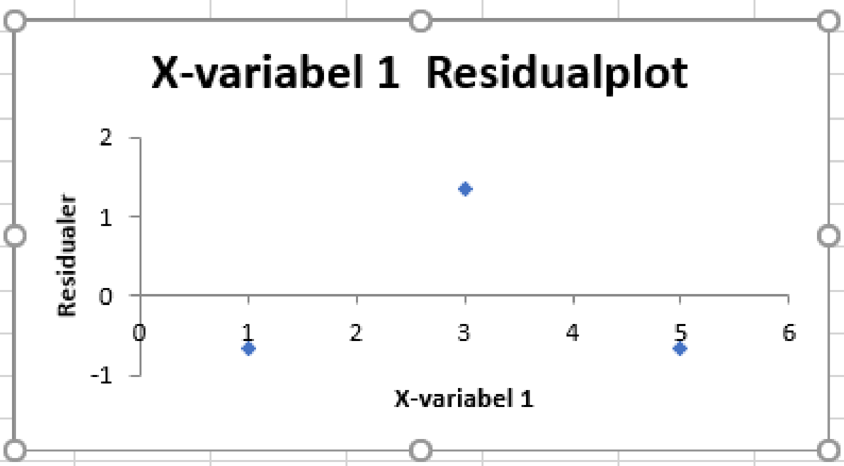
Også her er der ikke noget nyt. Det er bare den goe gamle R^2 vi har fundet. Altså $R^2 = 0{,}43$.

Residualer og residualplot

Residualerne viser afvigelsen fra modellen til de faktiske data. Vi får følgende når vi sætter flueben i "residualer" og "residualplot".

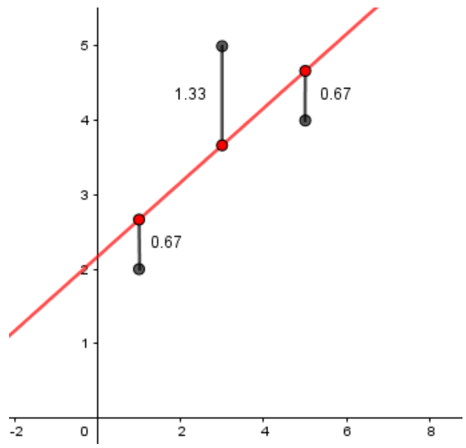
RESIDUALOUTPUT

bservatio	*orudsagt*	*Residualer*
1	2,666667	-0,66667
2	3,666667	1,333333
3	4,666667	-0,66667



I tabellen til venstre ser vi residualerne og til højre er residualerne illustret med et *residualplot*. Læg mærke til at vi har x-værdierne fra data på x-aksen og residualerne ud ad y-aksen.

Betydningen af residualerne ses her:



De sorte punkter er vores data og de lodrette streger viser forskellen mellem model og data. Sammenligner vi tallene på tegningen med dem i tabellen ser vi at to af dem i tabellen har et minus foran. Det er fordi de ligger under grafen og derfor er der en negativ afvigelse.

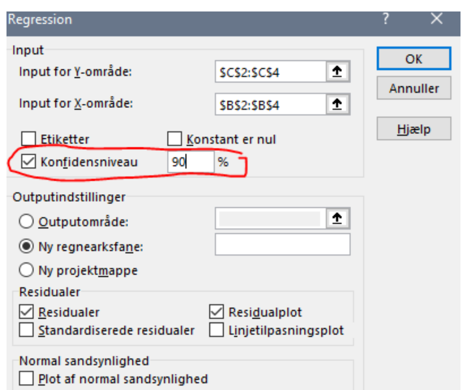
Vi skal se nærmere på residualerne i afsnit 4.4 om modelkontrol.

Konfidensintervaller

Vi skal nu se hvordan man bestemmer et konfidensinterval for α i regressionsmodellen

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

Helt konkret vil vi bestemme et 90%-konfidensinterval for α. Vi er desværre nødt til at starte forfra, da vi skal bruge andre indstillinger.



Vi finder grænserne for vores konfidensinterval her:

	Koefficienter	Standardfe	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 90,0%	Øvre 90,0%
Skæring	2,166667	1,972027	1,098701	0,470082	-22,8903	27,22364	-10,2842	14,61755
X-variabel	0,5	0,57735	0,866025	0,545629	-6,83593	7,835931	-3,14525	4,145246

Vi får vores 90%-konfidensinterval til at være [-3,14;4,15]. Men hvad har vi fundet? Jo, vi har fundet ud af, at α med 90% sandsynlighed ligger i intervallet [-3,14;4,15]. Som vi lærte i afsnit 4.1, er det jo ikke den rigtige hældning α vi finder, når vi laver lineær regression, men bare vores bedste bud a.

Vi bemærker at vores konfidensinterval indeholder 0. Det betyder, at selv om vi har bestemt a til at være positiv, og vi dermed har en voksende funktion, så kan vi ikke være sikre på, det forholder sig sådan i virkeligheden. For hvis $\alpha = 0$, så er y-værdierne slet ikke afhængige af x-værdierne, og så er der jo ingen sammenhæng mellem x og y. Så når vi har et konfidensinterval som indeholder nul, skal vi være forsigtige med at konkludere noget ud fra modellen.

I eksamensopgaverne på hhx optræder tit formuleringen ”konfidensinterval for a”. Med det menes konfidensinterval for α.

Øvelse 4.2.1

Betragt data:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4
6	7

Bestem følgende ved hjælp af Analysis Toolpak

a) En lineær model for data

b) R^2

c) Residualer og residualplot

d) Et 99%-konfidensinterval for hældningen i den lineære model

4.3 Multipel lineær regression

Multipel lineær regression er lineær regression, hvor vi har mere end én forklarende variabel. Dvs. hvor y-værdierne afhænger af mere end én variabel.

Vi vil tage udgangspunkt i et fiktivt dataset, som viser en klasses årskarakterer (gennemsnit af alle fag):

Lektier	Fravær	Skærm	Karaktersnit
18	0,02	11	8,5
10	0,08	15	4,6
5	0,04	1	3,2
27	0,06	14	10,7
30	0,05	7	11,7
25	0,03	4	11,1

I skemaet ses også hvor lang tid eleven bruger på lektier om ugen, fraværsprocenten (som decimaltal) og hvor lang tid eleven ellers bruger på computerspil/sociale medier (skærm) om ugen. Vi må formode at tid brugt på lektier og fravær har betydning for karaktererne, men hvad med tiden brugt på computerspil/sociale medier? Vi kunne lave tre forskellige regressioner og se hvilken betydning de har hver for sig, men vi kan faktisk gøre noget endnu bedre. Med multipel regression kan vi lave en samlet model som giver den forventede karakter på baggrund af de tre variable. Med udgangspunkt i en almindelig lineær model

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

tilføjer vi bare et ekstra led for hver variable, så modellen kommer til at se således ud:

$$y = \alpha_1 x_{\text{lektier}} + \alpha_2 x_{\text{fravær}} + \alpha_3 x_{\text{skærm}} + \beta + \varepsilon.$$

Der er dog tradition for at skrive den type modeller på en lidt anden måde, så det vil vi også gøre. Vi vil skrive:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

hvor Y er karaktersnit, X_1 er lektier, X_2 fravær og X_3 skærm. Vi kalder X_i'erne for de *forklarende variable*. Bemærk at vi med denne skriveform skriver konstantleddet først (og at det nu hedder β_0 i stedet for β).

Forskrift for modellen

Det er nemt at finde den multiple lineære model med Analysis Toolpak. Vi gør det på tilsvarende måde som da vi lavede simpel lineær regression tidligere (Dataanalyse $\rightarrow$ regression). Den eneste forskel er at vi nu skal ramme alle x'erne ind, når vi vælger vores x-værdier:

Lektier	Fravær	Skærm	Karaktersnit
18	0,02	11	8,5
10	0,08	15	4,6
5	0,04	1	3,2
27	0,06	14	10,7
30	0,05	7	11,7
25	0,03	4	11,1

Regression

$E$5:$G$16

Vi får nu følgende output:

	Koefficienter	Standardfejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,9962061	0,4393869	4,5431622	0,0002879	1,0691807	2,9232314	1,0691807	2,9232314
X-variabel 1	0,3526365	0,015836	22,267957	5,137E-14	0,3192253	0,3860476	0,3192253	0,3860476
X-variabel 2	-13,93671	3,6138141	-3,856509	0,0012657	-21,56119	-6,312225	-21,56119	-6,312225
X-variabel 3	-0,001552	0,0309452	-0,05014	0,9605954	-0,06684	0,0637371	-0,06684	0,0637371

Vi aflæser nu koefficienterne til vores model i søjlen "Koefficienter"og får

$$Y = 2 + 0{,}352X_1 - 13{,}9X_2 - 0{,}00155X_3 + \varepsilon$$

Nemt!

Konfidensintervaller og korrigeret model

I forbindelse med simpel lineær regression har vi argumenteret for at hvis konfidensintervallet for hældningen indeholdte nul, så betød det at vi ikke kunne være sikre på, at der var en sammenhæng mellem x og y. Dette gælder også for multipel regression. Vi ser nu på tabellen igen:

	Koefficienter	Standardfejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,9962061	0,4393869	4,5431622	0,0002879	1,0691807	2,9232314	1,0691807	2,9232314
X-variabel 1	0,3526365	0,015836	22,267957	5,137E-14	0,3192253	0,3860476	0,3192253	0,3860476
X-variabel 2	-13,93671	3,6138141	-3,856509	0,0012657	-21,56119	-6,312225	-21,56119	-6,312225
X-variabel 3	-0,001552	0,0309452	-0,05014	0,9605954	-0,06684	0,0637371	-0,06684	0,0637371

Vi kan se at konfidensintervallet for "X-variabel 3"(skærm) indeholder nul. Det betyder at vi ikke kan være sikker på at skærmtiden har nogen betydning. En hurtigere (og bedre) måde vi kan afgøre det samme på, er at kigge på kolonnen "P-værdi".

	Koefficienter	Standardfejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,9962061	0,4393869	4,5431622	0,0002879	1,0691807	2,9232314	1,0691807	2,9232314
X-variabel 1	0,3526365	0,015836	22,267957	5,137E-14	0,3192253	0,3860476	0,3192253	0,3860476
X-variabel 2	-13,93671	3,6138141	-3,856509	0,0012657	-21,56119	-6,312225	-21,56119	-6,312225
X-variabel 3	-0,001552	0,0309452	-0,05014	0,9605954	-0,06684	0,0637371	-0,06684	0,0637371

Hvis p-værdien er stor, kan vi ikke være sikker på at variablen har betydning. Vi kan se at P-værdien er på hele 96%, og da vi ikke har noget godt argument for at skærmtiden har betydning for karakteren, vælger vi at opstille modellen uden skærmtiden som variabel. Vi starter nu forfra og laver en ny model hvor vi kun bruger de to søjler med lektier og fravær. Det giver os følgende:

	Koefficienter	Standardfejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,9869801	0,3877897	5,1238601	7,106E-05	1,1722642	2,8016961	1,1722642	2,8016961
X-variabel 1	0,3524599	0,0150058	23,488219	5,905E-15	0,3209339	0,383986	0,3209339	0,383986
X-variabel 2	-13,959336	3,4847557	-4,0058292	0,000829	-21,280536	-6,6381359	-21,280536	-6,6381359

Vi kan se at de nu har alle variable lave p-værdier (under 5%), så vi er nået frem til vores korrigerede model. Vi aflæser koefficienterne i tabellen og opskriver modellen:

$$Y = 2 + 0{,}352X_1 - 14X_2 + \varepsilon$$

hvor Y er den forventede karakter, X_1 er tiden brugt på lektier og X_2 er fraværet.

Er der flere variable som har en p-værdi på over 5%, fjerner man først den variabel med den højeste p-værdi. Derefter laver man en ny model, og hvis der i den nye model stadig er variable med en p-værdi på over 5%, så fjerner man den variabel med den højeste p-værdi, laver en ny model, og sådan bliver man ved indtil alle værdier er under 5%.

For mere info om, hvornår man bør opstille en korrigeret model i stedet for den fulde model se afsnit 4.5.

Forklaring af p-værdi

Vi har tidligere set på p-værdier. Det var i forbindelse med χ^2-test. I forbindelse med regression er der også tale om hypotesetest, men det er ikke en χ^2-test som vi kender. Det er derimod en *F-test for individuel signifikans*. Det betyder at vi for hver parameter *beta* tester hypotesen:

$$H_0: \quad \beta_i = 0$$
$$H_1: \quad \beta_i \neq 0$$

Det betyder altså, at vi tester hver β_i, og ser om der en mulighed for at den er nul. Det fungere ligesom med χ^2-test. Er p-værdien mindre en signifikansniveauet forkaster vi H_0. Forkaster vi **ikke**, svarer betyder det at det pågældende β_i godt kan være nul (og dermed også omkring nul). Det betyder at det er usikkert, hvilken betydning den tilhørende variabel har, og derfor kan vi sorterer den fra.

Vi vil ikke gå i mere i detaljer med matematikken bag en F-test, men blot stole på de p-værdier som Excel giver.

Justeret determinationskoefficient

Ved multipel regression bliver determinationskoefficenten R^2 større jo flere variable man tager med - også selvom det er variable der ikke er relevante. Derfor benytter man ofte den *justerede determinationskoefficent* i stedet. Den justerede R^2 har den egenskab, at den falder når man medtager irrelevante variable. Vi vil ikke gå mere i detaljer med at hvad den helt præcist udtrykker, men når den er tæt på 1 er det udtryk for at modellen passer godt med data (ligesom med den almindelig R^2). Vi får den justerede R^2 foræret når vi laver modellen:

Regressionsstatistik	
Multipel R	0,9878464
R-kvadreret	0,9758404
Justeret R-kvadreret	0,973156
Standardfejl	0,6371993
Observationer	21

Vi kan se at den justerede R^2 for vores endelige model er 0,97.

4.4 Modelkontrol

Inden vi nåede til dette kapitel om regressionsanalyse, var lineær regression noget med at finde den linje, der bedst passede med data. Det var Excel (eller GeoGebra), som klarede den del for os, og vi tænke ikke mere over det. Problemet med denne tilgang er, at vi risikerer, at Excel/GeoGebra giver os en model, der ikke er optimal, og at vi får ugyldige konfidensintervaller, p-værdier osv. Skal vi være sikker på, at modellen er optimal, og at konfidensintervaller, p-værdier osv. er korrekte, skal de teoretiske forudsætninger være opfyldt. Vi skal nu se nærmere på, hvordan man tjekker dette. Vi kalder det *modelkontrol*, idet vi kontrollerer forudsætningerne for modellen.

Simpel (almindelig) lineær regression

Ved almindelig lineær regression antager vi at der er følgende sammenhæng mellem x og y

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

Vi antager at fejlleddet ε følger den samme normalfordeling gennem hele ens data og, at de forskellige fejl ikke er afhænge af hinanden. I praksis undersøger vi fejlleddet ved at betragte residualerne. Det er fordi det jo netop er fejlleddet der giver anledning til residualerne - hvis der ikke var fejl, så ville alle punkterne ligge på linjen. En undersøgelse af residualerne kaldes også en *residualanalyse*. Der skal gælde:

1. Residualerne skal have en middelværdi på 0.
2. Residualerne skal være normalfordelte.
3. Residualerne skal have en konstant varians.
4. Residualerne skal være uafhængige.

Vi vil nu se nærmere på de enkelte krav

Residualerne skal have et middelværdi på 0

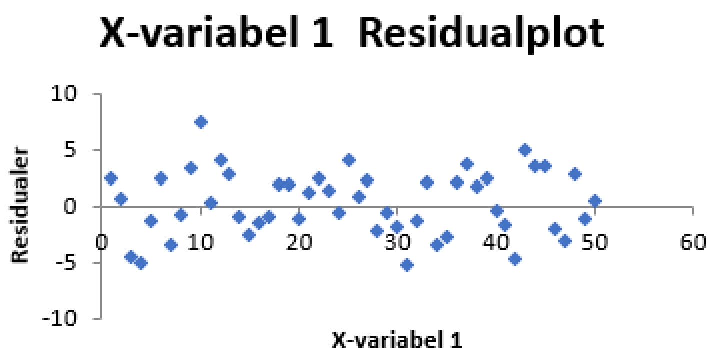
Dette kan nemt undersøges ved at tage gennemsnittet af residualerne. Det burde være automatisk opfyldt, når man bruger mindste kvadraters metode (hvilket både Excel og GeoGebra gør).

Residualerne skal være normalfordelte

Dette undersøges ved at lave et histogram med residualerne som observationer, og teste om de ser normalfordelte ud (har histogrammet klokkeform som en normalfordeling?). Man kan også lave et normal-plot i Word-mat (se afsnit om normalfordelte observationssæt).

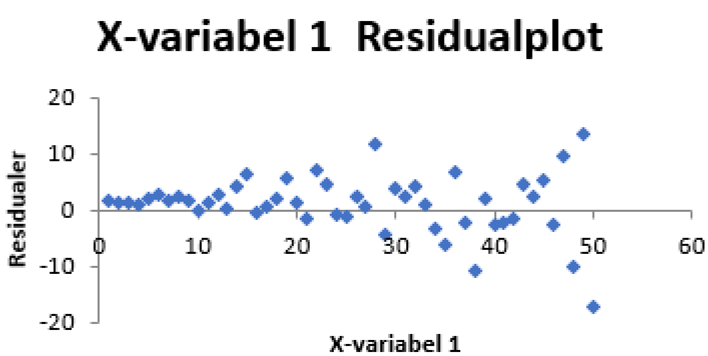
Residualerne skal have en konstant varians og være uafhængige

Disse to krav vil vi tjekke med residualplot. Et residualplot skal se nogenlunde således ud:



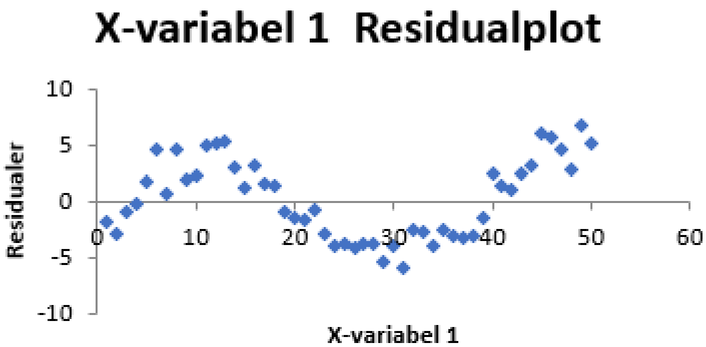
Vi ser at residualerne ligger tilfældigt fordelt omkring 0.

Her er et residualplot som ikke opfylder kravet om konstant varians.



Vi kan se at variansen starter med at være lille og derefter vokser.

Her er et residualplot som ikke opfylder kravet om uafhængighed:



Vi kan se at der en tendens til at de enkelte residualer ligger tæt på de omkringliggende residualer. Altså hvis f.eks. et residual er højt er der en tendens til at det efterfølgende residual også er højt. Afhængige residualer ser man ofte i forbindelse med tidsserier - dvs. regressionsmodeller hvor x-værdierne er tid. Hvis f.eks. en aktiekurs er meget høj, så er der også en tendens til at aktiekursen dagen efter også er meget høj. Men afhængige residualer kan også skyldes at modellen har den forkerte form. Det kunne være at der slet ikke er tale om en lineær sammenhæng, men at data i virkeligheden var bedre beskrevet med en eksponentiel funktion f.eks.

Multipel lineær regression

De fire krav til residualerne skal også være opfyldt ved multipel regression, men måden man tjekker dem på kan være lidt anderledes, og der er også et ekstra krav. Alt i alt skal vi tjekke:

1. Residualerne skal have en middelværdi på 0.
2. Residualerne skal være normalfordelte.
3. Residualerne skal have en konstant varians.
4. Residualerne skal være uafhængige.
5. Der må ikke være nogen perfekt lineær korrelation mellem de forklarende variable.

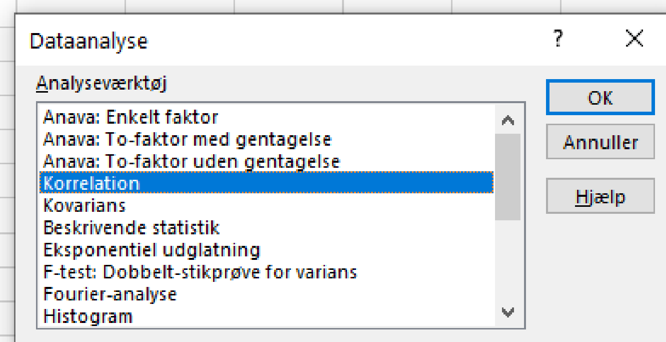
Krav 1-4

De to første krav tjekkes på samme måde som ved almindelig lineær regression. Konstant varians tjekkes ved at lave et xy-plot med residualerne som funktion af y-værdierne (de y-værdier modellen giver - ikke dem fra datasættet). Plottet inspiceres på samme måde som ved simpel regression. Uafhængighed er lidt tricky, og eftersom det mest er noget man kan have problemer med i forbindelse med tidsserier, vil vi kun undersøge for uafhængighed, hvis en af de forklarende variable er tid, eller hvis vi ved at data er indsamlet i en bestemt rækkefølge. I så fald kan man lave et xy-plot med tiden/rækkefølgen som x-værdier og residualerne som y-værdier, og se om der er et mønster.

Korrelation mellem de forklarende variable

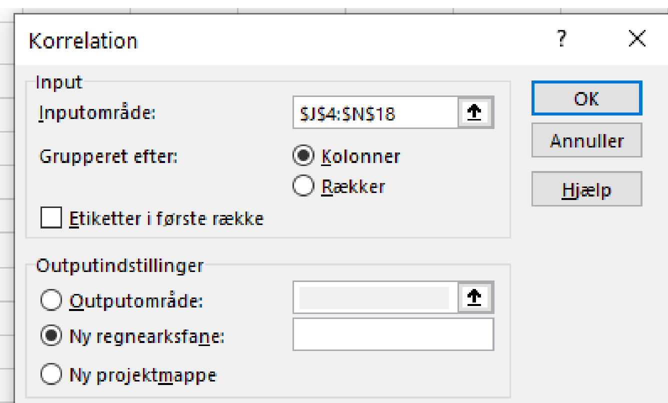
Det sidste krav betyder at de forklarende variable ikke må afhænge lineært af hinanden. Det kan man tjekke ved hjælp af en *korrelationsmatrix*. Den laves i Analysis Toolpak på følgende måde. Lad os sige at vi 5 forklarende variable som vist nedenunder. Vi vælger "Dataanalyse"og så "Korrelation":

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
9,511601	18,15197	59,55502	23,68819	5,579551
10,02877	17,65388	60,15521	7,6676	13,26808
7,494405	18,28659	58,67567	18,04086	13,17899
10,40121	20,79807	60,283	15,48323	21,60321
6,315634	20,40168	58,08284	27,27822	11,91678
9,362619	18,94857	59,80845	20,38057	20,19421
8,907261	21,63235	59,4329	33,65405	13,20955
9,722397	20,54595	59,82296	14,78023	18,03321
11,3745	17,29377	60,87899	6,761259	15,55082
11,95415	20,81971	61,13512	-6,41246	14,3566
7,415084	15,99586	58,81582	3,375045	10,15099
11,46746	20,81076	60,93664	34,28412	17,56603
9,62591	15,48968	59,63477	1,564799	20,22961
5,246721	16,10323	57,69016	30,05967	16,72947
11,64884	19,35326	60,90938	-4,42667	12,07228



I "Inputområde"rammer vi vores data ind og trykker "OK":

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
9,511601	18,15197	59,55502	23,68819	5,579551
10,02877	17,65388	60,15521	7,6676	13,26808
7,494405	18,28659	58,67567	18,04086	13,17899
10,40121	20,79807	60,283	15,48323	21,60321
6,315634	20,40168	58,08284	27,27822	11,91678
9,362619	18,94857	59,80845	20,38057	20,19421
8,907261	21,63235	59,4329	33,65405	13,20955
9,722397	20,54595	59,82296	14,78023	18,03321
11,3745	17,29377	60,87899	6,761259	15,55082
11,95415	20,81971	61,13512	-6,41246	14,3566
7,415084	15,99586	58,81582	3,375045	10,15099
11,46746	20,81076	60,93664	34,28412	17,56603
9,62591	15,48968	59,63477	1,564799	20,22961
5,246721	16,10323	57,69016	30,05967	16,72947
11,64884	19,35326	60,90938	-4,42667	12,07228



Det giver os følgende tabel:

	Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3	Kolonne 4	Kolonne 5
Kolonne 1	1				
Kolonne 2	0,356544	1			
Kolonne 3	0,993665	0,355158	1		
Kolonne 4	-0,46573	0,29036	-0,46206	1	
Kolonne 5	0,174	0,094089	0,198211	0,015501	1

Vi kigger nu efter tal som er tæt på 1 eller -1. Vi bemærker at der står 0,99 ud fra kolonne 1 under kolonne 3. Det betyder at hvis man laver lineær regression med x_1 som x-værdier og x_3 som y-værdier ville man få en korrelationskoefficient på $r = 0,99$. Vi husker at korrelationskoefficienten r er det samme som kvadratroden af R^2 (men med minus hvis udviklingen er aftagende). Så når $r = 0,99$ betyder det der er en sammenhæng mellem x_1 og x_3 og derfor må man overveje at fjerne en af de to variable fra modellen. Million-dollar-spørgsmålet er så hvor stor/lille r må være? Her må jeg skuffe med et ikke-svar. Kravet hedder ingen "perfekt"lineær korrelation, og det fortolker vi her som at være meget tæt på 1 (eller -1), men der er ingen magisk grænse. Jo tættere på 1 (eller -1) jo større problem har vi.

Øvelse 4.4.1

Tag udgangspunkt i datasættet her.

a) Lav en korrelationsmatrix for de 3 forklarende variable i datasættet med karaktererne

b) Er der korrelation mellem nogle af de forklarende variable?

Outliers

Der kan forekomme observationer som afviger meget for modellen. Dem kan man spotte når man kigger på residualerne. Der er ikke nogen fast regel for hvornår man fjerner outliers. Det kan gøres efter forskellige principper. Jeg vil anbefale at man bruger sin fornuft, og fjerner observationer som vurderes som fejl. Måler man f.eks. temperaturen af vand i en gryde under opvarmning, og en af temperaturene er registreret som $478°C$, så er det nok fordi at der er skrevet forkert, og derfor bør observationen fjernes fra data.

Determinationskoefficenten (justereret determinationskoefficient)

I forbindelse med modelkontrol er det også en god ide at kommentere på R^2. Er R^2 lav betyder det er generelt er stor forskel på det modellen siger og de faktiske data, men det behøver ikke at betyde at modellen er dårlig. Hvis der er tale om data med et stort tilfældigt element, så kan man ikke undgå at få en lav R^2 uanset hvilken model man laver. Modellen kan stadig være det bedst mulige måde at beskrive data på. Tilsvarende kan man godt have en høj R^2, men en dårlig model (hvis den ikke opfylder de andre krav nævnt i dette afsnit).

4.5 Guide til fancy lineær regression

Vi slutter af med en oversigt over hvordan man laver lineær regression på et højere niveau end vi kender fra B-niveau. Det bemærkes at det er en lidt omstændelig proces, så i forbindelse med skriftlige prøver og eksamen anbefaler jeg, at man dropper modelkontrollen (eller i hvert fald begrænser den) medmindre opgaven ligger op til at man laver modelkontrol.

Simpel lineær regression

1. Lav regression med Analysis Toolpak. Sørg for at du har sat flueben ved residualer og residualplot.
2. Lav modelkontrol. Dvs. undersøg om residualerne er normalfordelte med middelværdi nul, har konstant varians og er uafhængige. I praksis vil modelkontrollen ofte give et lidt mudret billede, da det tit ser ud til at kravene ikke helt er opfyldt. Det betyder dog ikke at modellen ikke kan bruges, men det gør den mindre pålidelig - så du skal tage forbehold. Husk også at overveje om du vil fjerne outliers (hvorefter du så må lave en ny model).
3. Opskriv den endelige model, skriv hvad de forskellige variable står for, og kommenter på modellens kvalitet ud fra din modelkontrol (inkl. R^2).

Multipel lineær regression

1. Lav først en regression med alle variable med Analysis Toolpak.
2. Du kan nu vælge om du opstille den fulde model eller en korrigeret model. Du skal altså beslutte om du vil vælge ikke signifikante variable fra. Der er ikke nogen fast regel der siger om du skal gøre det eller ej. Vi husker at

en høj p-værdi ikke betyder, at variablen er irrelevant - det betyder, at vi ikke kan være sikre på den er relevant ud fra de data vi har. Måske har vi på forhånd en formodning om at den er relevant? Summa summarum, man skal tænke sig om inden man fjerner variable fra modellen. Så tænker I nu... åhhh hvad gør jeg til eksamen? Ja vi må håbe det fremgår af opgaven om det forventes at I fjerner dem. Hvis ikke, kan I evt. opstille både en fuld og en reduceret model. I den virkelige verden vil man typisk bruge en mere raffineret metode til variabelselektion end den som er præsenteret her. Hvis du beslutter, at du vil fjerne ikke-signifikante variable, så se om der er nogle variable som har en p-værdi på over 5% (eller hvad du nu har valgt som signifikansniveau). Hvis ja, så fjern den variabel som har den største p-værdi og lav en ny model. Dette gentager du, indtil alle p-værdierne er under signifikansniveauet. Overvej også om du vil fjerne outliers.

3. Lav modelkontrol som ved simpel lineær regression. Men her skal du huske også at tjekke for korrelation mellem de forklarende variable med en korrelationsmatrix. Hvis der er korrelation, så overvej at fjerne variable. Hvis en variabel både er korreleret og ikke-signifikant, er der endnu mere grund til at fjerne den.

4. Opskriv den endelige model, skriv hvad de forskellige variable står for, og kommenter på modellens kvalitet ud fra din modelkontrol (inkl. justeret R^2).

Øvelse 4.5.1

Du skal nu tage udgangspunkt i det samme datasæt som jeg har brugt som eksempel igennem sidste afsnit. Det er vedlagt her

a) Gennemføre grundig multipel regression efter opskriften ovenover.

4.6 Ekstrema for funktioner af to variable

I dette afsnit skal vi supplere vores differentialregningsværktøjskasse (sejt ord), så vi er rustet til de udfordringer vi møder i næste afsnit. Afsnittet har i sig selv ikke noget med lineær regression at gøre, men det gør det jo kun mere interessant.

Partielle afledede

Ligesom man kan differentiere funktioner af én variable, kan man også differentiere funktioner af to variable. Det gør man ved at betragte den ene variabel som en konstant. På den måde får man en funktion af én variabel, som man kan differentiere på sædvanlig vis. Det er nemmest at forklare ved et eksempel.

Eksempel 4.6.1

Lad $f(x,y) = y^2 + x$. Vi vil nu finde det som kaldes den *partielle afledede med hensyn til* y og betegnes $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$. Det gør vi ved at opfatte x som en konstant, og differentiere f som funktion af y. Vi ved at y^2 bliver $2y$ når man differentierer, og x skulle betragtes som en konstant, så den bliver til 0. Altså får vi

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2y + 0 = 2y$$

Vi kan også finde den *partielle afledede med hensyn til* x. Det gøres selvfølgelig ved at holde y konstant, og differentiere funktionen som en funktion af x. Hvis y er en konstant er y^2 også en konstant, og den bliver derfor 0 når vi differentiere. Når vi differentiere x får vi 1 og altså har vi:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 + 1 = 1.$$

Øvelse 4.6.1

Bestem både $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ for følgende funktioner

a) $f(x,y) = x - y + 2$

b) $f(x,y) = x^3 y^2$

Det er ikke altid at funktions variable hedder x og y.

Eksempel 4.6.2

Lad $f(v,w) = 2w^2 - \ln(v) + 0$. Vi kan se at f en funktion af v og w. Vi finder:

$$\frac{\partial}{\partial v} f(v,w) = 0 - \frac{1}{v} - 0 = -\frac{1}{v}$$

og

$$\frac{\partial}{\partial w} f(v,w) = 2 \cdot 2w - 0 + 0 = 4w$$

Øvelse 4.6.2

Bestem:

a) $\frac{\partial}{\partial a} f(a,b)$ og $\frac{\partial}{\partial b} f(a,b)$ for $f(a,b) = 2a + ab^2 - 4$

b) $\frac{\partial}{\partial p} f(p,q)$ og $\frac{\partial}{\partial q} f(p,q)$ for $f(p,q) = e^q + b^2 - 3p$

Stationære punkter

Vi husker følgende sætning for funktioner af én variabel:

Sætning (Fra Mat-B)

Lad f være en differentialbel funktion som er defineret på et åbent interval I.

Hvis f har et ekstremum i $x_0 \in I$, så er $f'(x_0) = 0$.

Der gælder noget tilsvarende for funktionerne af to variable:

Sætning 4.6.1

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable defineret på en åben mængde O og antag at begge de partielle afledede $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ eksisterer.

Hvis f har et ekstremum i $(x_0, y_0) \in O$, så er $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 0$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 0$.

Hvad en "åben mængde" betyder i denne sammenhæng, vil vi ikke gå i detaljer med, vi vil blot hæfte os ved, at hvis vi skal finde ekstrema for en funktion af to variable, så skal vi kigge efter de punkter hvor begge partielle afledede er nul. Et sådan punkt kaldes et *stationært punkt*. Vi ved altså at evt. ekstrema vil ligge i de stationære punkter. Vi kan dog ikke være sikker på, at bare fordi en funktion har et stationært punkt, så har den også ekstremum i punktet. Det er ligesom med $f(x) = x^3$. Her er $f'(0) = 0$, men f har ikke ekstremum i $x = 0$.

Eksempel 4.6.3

Vi vil bestemme de stationære punkter for funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 14x$$

Vi bestemmer først de to partielle afledede:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x - y + 14$$

og

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 4y - x$$

De partielle afledede skal begge være nul så:

$$2x - y + 14 = 0 \quad \text{og} \quad 4y - x = 0$$

Vi isolerer x i den anden ligning:

$$x = 4y$$

og sætter værdien for x ind i den første

$$\begin{aligned} 2 \cdot (4y) - y + 14 &= 0 \\ 7y + 14 &= 0 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Vi indsætter nu værdien for y i den anden ligning $4y - x = 0$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-2) - x &= 0 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Vi konkluderer at f har et stationærtpunkt i $(-8, -2)$

Øvelse 4.6.3

Bestem stationære punkter for følgende funktioner.

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 10y$

b) $f(x, y) = xy - y$

c) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$

Øvelse 4.6.4

Betragt funktionen $f(a, b) = (2a - b - 1)^2 + (a - 2b + 13)^2$

a) Regn de partielle aflede $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b)$ og $\frac{\partial}{\partial b} f(a, b)$. I stedet for at hæve parenteserne skal du bruge reglen om differentiation af sammensatte funktioner.

b) Bestem de stationære punkter for f.

Det store spørgsmål er nu, hvordan man afgør om et stationært punkt er et ekstremum og i givet fald, hvilket slags ekstremum. Det er selvfølgeligt vældigt interessant, men i forhold til lineær regression er det nok for os, at kunne identificere de stationære punkter.

4.7 Regression ved beregning

Beregning af residualer

Vi vender tilbage til vores datasæt:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Tidligere fandt vi ved lineær regression følgende model:

$$y = 0{,}5x + 2{,}17.$$

Ud fra vores model, kan vi nemt beregne residualerne. Vi husker at residualerne er afvigelsen mellem data og modellen. Altså kan vi finde det i'te residual ved:

$$e_i = y_i - \hat{y_i}$$

Her er:
e_i det i'te residual,
y_i den i'te y-værdi i data,
$\hat{y_i}$ den i'te estimerede y-værdi ifølge modellen (altså den y-værdi man beregner med den estimerede model).

Eksempel 4.7.1

Vi vil nu kigge på hvordan vi kan beregne residualerne vores data:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Vi starter med at beregne $\hat{y_1}$. Den første x-værdi er 1, så vi sætter 1 ind i forskriften.

$$\hat{y_1} = 0{,}5 \cdot 1 + 2{,}166667 = 2,666667$$

Tilsvarende regner vi resten af $\hat{y}_i$'erne

x_i	y_i	$\hat{y}_i$
1	2	2,666667
3	5	3,666667
5	4	4,666667

Vi regner så det første residual

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = (2 - 2{,}666667) = -0,666667,$$

og på tilsvarende måde regner vi resten af residualerne:

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i
1	2	2,666667	-0,666667
3	5	3,666667	1,333333
5	4	4,666667	-0,666667

Vi har hermed beregnet residualerne som altså ses i kolonnen til højre.

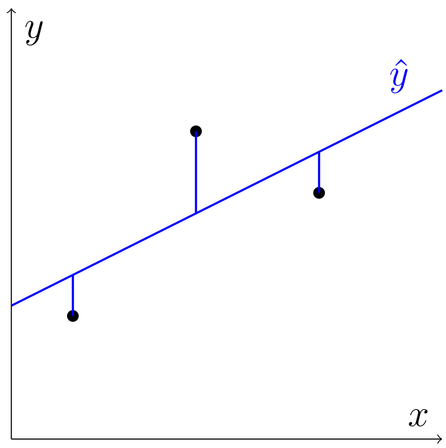
Mindste kvadraters metode

Der findes flere metoder til at beregne regressionsmodeller. Her skal vi se på en metode som hedder ”mindste kvadraters metode”.

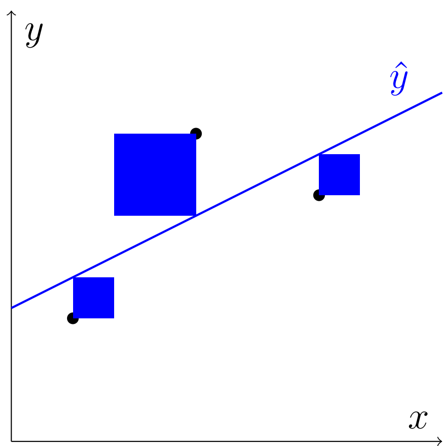
Vi vil igen tage udgangspunkt i datasættet:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Vi vil først se på ideen i metoden, og derefter hvordan man rent beregningsteknisk finder modellen. Vi starter med at tegne vores punkter ind sammen med en mulig regressionslinje (det er den vi skal bestemme) og residualerne (tegnet med blåt):



Vi tegner nu kvadrater ud fra residualerne:



Mindste kvadraters metode går ud på at bestemme den forskrift $y = ax + b$, som gør de blå kvadrater mindst mulige. Da kvadraterne har sidelængde e_i, og dermed areal e_i^2, skal vi altså bestemme a og b så

$$\Sigma_{i=1}^{n} e_i^2 \tag{4.1}$$

bliver mindst muligt.

Vi vil beregne residualerne r på tilsvarende måde som i eksempel 4.7.1, men denne gang er a og b ubekendte i forskriften $\hat{y} = ax + b$. I vores første punkt er $x_1 = 1$ og derfor sætter vi 1 ind på x'ets plads i forskriften:

$$\hat{y}_1 = a \cdot 1 + b = a + b$$

Tilsvarende sætter regner vi resten af $\hat{y}_i$'erne

x_i	y_i	$\hat{y}_i$
1	2	$a+b$
3	5	$3a+b$
5	4	$5a+b$

Vi regner så de kvadratiske residualer:

$$e_1^2 = (y_1 - \hat{y}_1)^2 = (2-(a+b))^2 = (-a-b+2)^2$$

og tilsvarende for alle de andre punkter.

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i^2
1	2	$a+b$	$(-a-b+2)^2$
3	5	$3a+b$	$(-3a-b+5)^2$
5	4	$5a+b$	$(-5a-b+4)^2$

Vi finder summen af alle de kvadratiske residualer

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=1}^3 e_i^2 &= e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \\ &= (-a-b+2)^2 + (-3a-b+5)^2 + (-5a-b+4)^2\end{aligned}$$

Vi ser nu at summen af kvadratiske residualer afhænger af a og b, og vi kan derfor se den som en funktion af a og b:

$$f(a,b) = (-a-b+2)^2 + (-3a-b+5)^2 + (-5a-b+4)^2,$$

hvor $f(a,b)$ altså betegner summen af de kvadratiske residualer. Åhhh bare vi dog havde en metode til at minimere en funktion i to variable... nej hov vent... Det har vi jo!!! Den lærte vi i afsnittet om ekstrema for partielle afledede. Ifølge sætning 4.6.1 skal vi sætte de partielle aflede lig nul. Vi starter med at bestemme de partielle afledede (og vi husker at bruge reglen for sammensatte funktioner).

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} f(a,b) &= 2(-a-b+2)(-1) + 2(-3a-b+5)(-3) + 2(-5a-b+4)(-5) \\ &= 2a + 2b - 4 + 18a + 6b - 30 + 50a + 10b - 40 \\ &= 70a + 18b - 74\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b}f(a,b) &= 2(-a-b+2)(-1)+2(-3a-b+5)(-1)+2(-5a-b+4)(-1)\\
&= 2a+2b-4+6a+2b-10+10a+2b-8\\
&= 18a+6b-22
\end{aligned}$$

Vi sætter nu de partielle afledede lig med nul:

$$70a+18b-74=0 \quad 18a+6b-22=0$$

Vi mangler altså bare at løse to ligninger med to ubekendte. Vi isolerer b i den første ligning:

$$\begin{aligned}
70a+18b-74 &= 0\\
b &= -3{,}88889a+4{,}111111
\end{aligned}$$

og sætter ind på b's plads i den anden ligning

$$\begin{aligned}
18a+6b-22 &= 0\\
18a+6(-3{,}88889a+4{,}111111)-22 &= 0\\
a &= 0{,}5.
\end{aligned}$$

Vi kan nu finde b:

$$\begin{aligned}
b &= -3{,}88889a+4{,}111111\\
&= -3{,}88889\cdot 0{,}5+4{,}111111\\
&= 2{,}17.
\end{aligned}$$

Vi har nu fundet både a og b og derfor har vi fundet forskriften

$$y=0{,}5x+2{,}17.$$

Den kritiske læser vil måske være bekymret over, om vi kan være sikker på, at vi har minimeret de kvadratiske afvigelser. At de partielle afledede giver nul, er ikke nogen garanti for et minimum. Vi ved dog at hvis en funktion har et minimum, så er de partielle afledede nul. Da det er oplagt at de kvadratiske afvigelser må have et minimum (hvorfor er det oplagt?), og da der kun en løsning, hvor de partielle afledede er nul, må det være minimum vi har fundet.

Øvelse 4.7.1

Betragt data

x_i	y_i
1	4
2	2
4	5

Du skal nu bestemme en lineær model for data. Jeg har delt det op i 3 bidder, så det bliver nemmere at identificere, hvad der er gået galt, når det er gået galt (for det gør det).

a) Bestem funktionen $f(a,b)$ som beskriver summen af de kvadratiske residualer.

b) Bestem de partielle afledte for f

c) Bestem den lineære model.

Øvelse 4.7.2

Betragt data:

x_i	y_i
0	0
1	1
2	4
3	5

Bestem ved beregning:

a) funktionen $f(a,b)$ som beskriver summen af de kvadratiske residualer.

b) de partielle afledte for f

c) en lineær model for data

d) residualerne

4.8 Determinationskoefficienten

Determinationskoefficienten R^2 viser løst sagt, hvor langt data ligger fra modellen. Er R^2 tæt på 1, betyder det at data ligger tæt på modellen. Vi skal i det følgende se hvordan R^2 beregnes, hvorefter vi skal kigge mere præcist på dens betydning.

Formlen for R^2 er

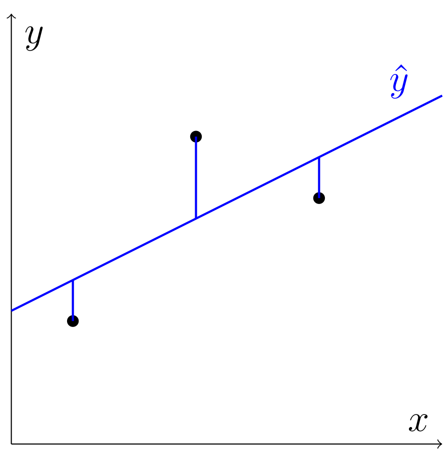
$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma_{i=1}^{n} e_i^2}{\Sigma_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$$

Her er:
e_i det i'te residual,
y_i den i'te y-værdi,
$\overline{y}$ gennemsnittet af y-værdierne.

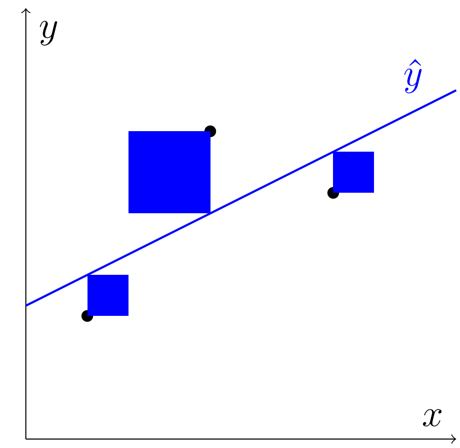
Vi vender tilbage til vores datasæt for at forstå hvad formlen udtrykker:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Vi starter med at forklare $\Sigma_{i=1}^{n} e_i^2$ i formlen. Vi tegner først data, model og residualer:



I udtrykket $\Sigma_{i=1}^{n} e_i^2$ står residualerne i anden. Størrelserne af e_i^2 kan derfor vises med kvadrater som her:

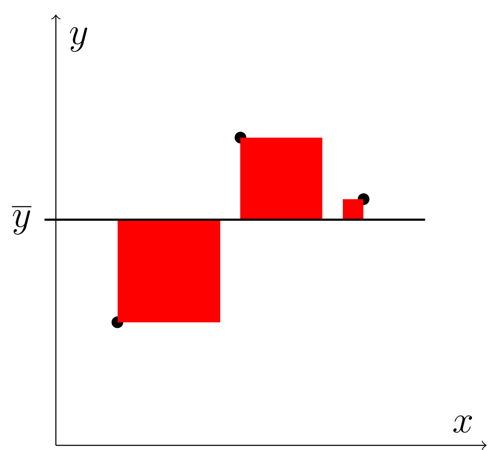


Udtrykket $\Sigma_{i=1}^{n} e_i^2$ viser altså det samlede areal af de blå kvadrater. Vi kan se, at jo mindre residualer, jo mindre kvadrater, og derfor er $\Sigma_{i=1}^{n} e_i^2$ tæt på nul når punkterne ligger tæt på linjen.

Vi vender nu blikket mod nævneren i brøken i formlen for R^2:

$$\Sigma_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

Vi kan se at dette udtryk også er en sum af kvadratiske afvigelser. Men denne gang er det afvigelserne fra y-værdierne til **gennemsnittet** af y-værdierne $\overline{y}$. Vi kan tegne dem på tilsvarende måde som vi tegnede de kvadratiske residualer (blå kvadrater), bortset fra at vi skal tage udgangspunkt i linjen $y = \overline{y}$ i stedet for regressionslinjen.



Denne sum af kvadratiske afvigelser er lille, når punkterne ligger tæt på linjen gennem $\overline{y}$. Dvs. når alle y-værdierne ligger tæt på hinanden.

Vi kan nu forklare hvorfor R^2 er tæt på 1 når punkterne ligger tæt på linjen. Formlen var:

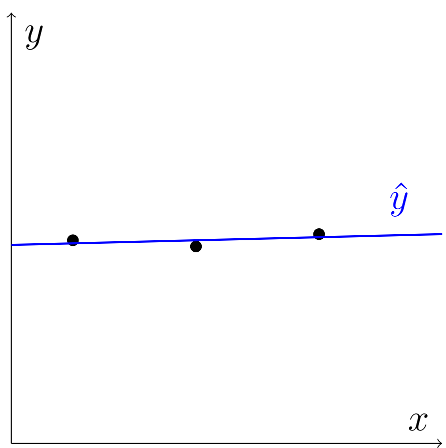
$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma_{i=1}^{n} e_i^2}{\Sigma_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$$

Hvis punkterne ligger tæt på linjen bliver tælleren i brøken tæt på nul, hvilket gør brøken tæt på nul (medmindre nævnerne er tæt på nul også, hvilket jeg kommer tilbage til) og derfor bliver hele udtrykket tæt på 1.

Vi kan også forklare, hvorfor $0 \leq R^2 \leq 1$. Da både tælleren og nævneren i brøken er ikke-negative, må selve brøken være ikke-negativ. Trækker man noget ikke-negativt fra 1, er det højeste man kan få 1. Så $R^2 \leq 1$. At $R^2 \geq 0$, skyldes at regressionslinjen er den linje, som giver de mindste kvadratiske afvigelser, og derfor må tælleren i brøken være mindre end eller lig med nævneren (som jo er de kvadratiske afvigelser fra linjen $y = \hat{y}$). Dvs. brøken er mindre end eller lig med 1. Altså konkluderer vi:

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

Nåh, men vi mangler lige at kigge på situationen, hvor nævneren også er tæt på nul. Det vil den være, hvis punkterne ligger tæt på linjen gennen gennemsnittet, altså hvis alle y-værdierne er næste ens. I det tilfælde vil der typisk ikke være så meget forskel på tæller og nævner i brøken (relativt set), og derfor vil R^2 være lille. Her er et eksempel:



Ovenstående regressionslinje har $R^2 = 0{,}25$ på trods af at punkterne ligger super tæt på linjen. Så det med at R^2 er tæt på 1 når punkterne er tæt på linjen er lidt upræcist. I stedet kunne man sige at R^2 er tæt på 1, når punkterne ligger meget tættere på regressionsmodellen end på gennemsnittet af y-værdierne.

Eksempel 4.8.1

Antag at vi har et xy-plot der beskriver udviklingen i arbejdsløshed over en periode. Den simpleste beskrivelse af arbejdsløsheden gennem perioden fås ved at beregne den gennemsnitlige arbejdsløshed. Vil man have en bedre beskrivelse, kunne man regne en lineær model for udviklingen. Antag nu at $R^2 = 0{,}1$ for sådan en model. Fordi R^2 er så lav, er der noget der tyder på, at modellen ikke giver en væsentlig bedre beskrivelse af udviklingen end gennemsnittet.

Man kunne godt blive fristet til at tro R^2 udtrykker, om man har fat i den rigtige model for ens data. Har man f.eks. $R^2 = 0{,}97$ kunne man tænke at ens data var rigtigt godt beskrevet med en lineær model. Som vi skal se i den efterfølgende øvelse er dette dog ikke korrekt.

Øvelse 4.8.1

Læs følgende Wikipedia-artikel:

https://en.wikipedia.org/wiki/Anscombe's_quartet.

a) Forklar, hvor det er problematisk at bruge R^2 til at afgøre om data beskrives godt med den lineære model.

b) Forklar, hvorfor man I nogle tilfælde vil acceptere modeller med en lav R^2 værdi.

Øvelse 4.8.2

I øvelse 4.7.1 regnede du modellen $y = 0{,}5x + 2{,}5$ for følgende data.

x_i	y_i
1	4
2	2
4	5

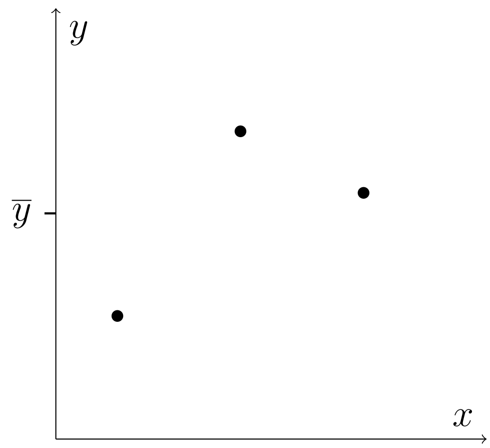
a) Beregn (i hånden) R^2 og fortolk den.

Ekstra

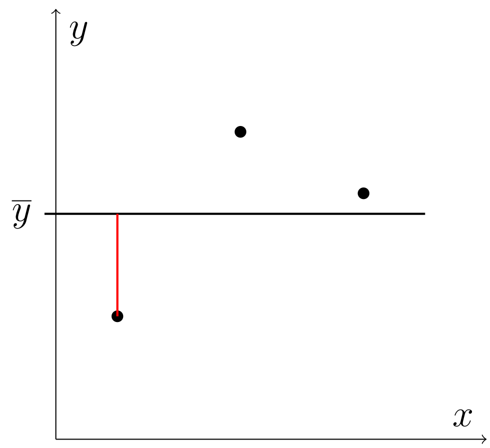
En almindelig fortolkning af R^2 er:

> Andelen af den totale variation i y-værdier som er forklaret af modellen.

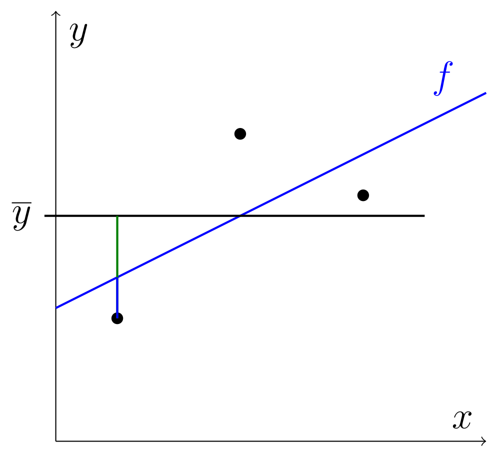
Vi skal nu se hvad det betyder. Vi starter med vores xy-plot:



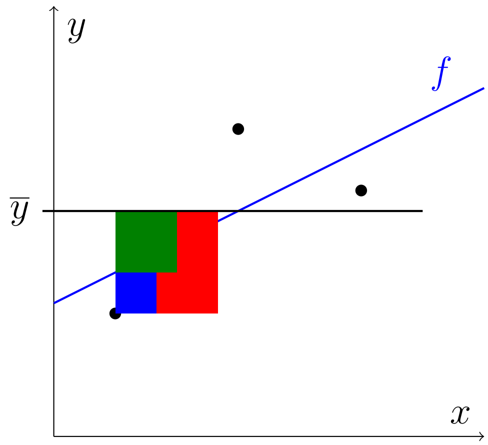
Vi vil nu regne den totale variation i y-værdierne. Der er flere måde at udtrykke variationen, men vi regner den som de kvadratiske afvigelser fra gennemsnittet. I første omgang tegner vi dog kun selve afvigelse ind:



Vi vil nu se om vi kan slippe af med noget af den variation ved at tegne en regressionslinje:



Vi kan se at vi med modellen kommer tætter på punktet og vi er sluppet af med noget af variationen. Den grønne streg viser hvor stor en del af variationen, som modellen har forklaret og den blå viser den variation der stadig er tilbage. Som sagt regner vi variationen som kvadratiske afvigelser, så vi skal tegne kvadrater:



Vi forstiller os nu at vi tegner tilsvarende kvadrater for de andre punkter og indfører følgende betegnelser.

SS_{tot}: Summen af de røde kvadrater, som udtrykker den totale variation.

SS_{reg}: Summen af de grønne kvadrater, som udtrykker den forklarede variation.

SS_{res}: Summen af blå kvadrater, som udtrykker den variation modellen ikke kan forklare.

Med de betegnelser får vi at

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}}$$

Man kan bevise (vil vil ikke gøre det), at når man bruger mindste kvadraters metode til at finde modellen, så er

$$SS_{\text{tot}} = SS_{\text{reg}} + SS_{\text{res}}$$

Vi vi dividere med SS_{tot} på begge sider.

$$\frac{SS_{\text{tot}}}{SS_{\text{tot}}} = \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}} + \frac{SS_{\text{reg}}}{SS_{\text{tot}}}$$

Vi forkorter og omskriver:

$$1 - \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}} = \frac{SS_{\text{reg}}}{SS_{\text{tot}}}$$

Vi genkender venstresiden som R^2. Vi husker at SS_{reg} udtrykker den del af den totale variation som modellen kan forklare og dermed er $\frac{SS_{\text{reg}}}{SS_{\text{tot}}}$ andelen af den totale variation som modellen kan forklare. Vi har altså:

$$R^2 = \text{"andelen af den totale variation, som modellen kan forklare"}$$

På grund af dette kaldes R^2 også for forklaringsgraden, da R^2 udtrykker i hvilken grad regressionslinjen forklarer variationen.

Kapitel 5

Potensfunktioner

Potensfunktioner er den sidste grundlæggende funktionstype vi skal igennem. Vi har dog allerede set på en del potensfunktioner, fordi visse lineære funktioner, polynomier osv. er også potensfunktioner.

5.1 Forskrift og graf

Definition 5.1.1

En potensfunktion er en funktion med forskriften

$$f(x) = b \cdot x^a$$

hvor $b > 0$ og $x > 0$.

Bemærk at der ud over at være et krav til b også er et krav til x. Det er første gang vi ser det i en definition af en funktionstype.

Øvelse 5.1.1

Man kunne godt komme til at forveksle forskriften for en potensfunktion med forskriften for en eksponentiel funktion.

a) Hvad er forskellen?

Eksempel 5.1.1

En funktion med forskriften... lad os sige... $f(x) = 2 \cdot x^4$ er selvfølgelig en potensfunktion, men nogle gange er det knap så tydeligt, at man har med en potensfunktion at gøre. Her ses nogle mindre oplagte eksempler:

- $f(x) = \sqrt{x}$ er en potensfunktion da $\sqrt{x} = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ er en potensfunktion da $\frac{1}{x} = 1 \cdot x^{-1}$

I eksemplet ser vi at $f(x) = \sqrt{x}$ og $f(x) = \frac{1}{x}$ begge er eksempler på potensfunktionsfunktioner. Man kan ikke tage kvadratroden af et negativt tal, og man kan ikke dele med nul, og det er grunden til, at vi kræver at $x > 0$ i definition 5.1.1. Så er vi nemlig sikre på, at $f(x) = b \cdot x^a$ er defineret uanset, hvad a er. Men mange potensfunktioner kunne defineres for en større mængde af tal. F.eks. funktionen $f(x) = x^2$. Opfatter vi denne funktion som et andengradspolynomium, er den pludselig defineret for alle reelle tal. Medmindre man specifikt angiver, at funktionen skal opfattes som en potensfunktion, så er definitionsmængden altid den størst mulige. I dette kapitel er det implicit at alle funktionerne skal opfattes som potensfunktioner.

Øvelse 5.1.2

Afgør hvilke af følgende funktioner der er potensfunktioner og bestem a og b:

a) $f(x) = 2 \cdot x^5$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = 7 \cdot 2^x$

d) $f(x) = x$

e) $f(x) = -x$

f) $f(x) = 2x^3 + 1$

g) $f(x) = 4$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

i) $f(x) = \frac{7}{x^4}$

Øvelse 5.1.3

Af sidste øvelsen fremgår det at der er mange velkendte funktioner som også kan opfattes som potensfunktioner, hvis definitionsmængden begrænses til $]0;\infty[$.

a) Hvilke lineære funktioner kan opfattes som potensfunktioner?

b) Hvilke polynomier kan opfattes som potensfunktioner?

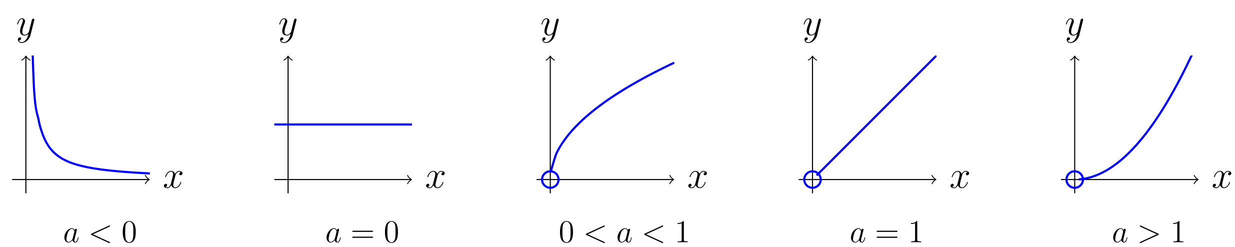
c) Hvilke konstante funktioner kan opfattes som potensfunktioner.

Graf

For potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ er grafens form er bestemt af konstanterne a og b. Her er det især a som er spændende at se på, da det er den som bestemmer, hvilken type graf der er tale om.

Betydning af a

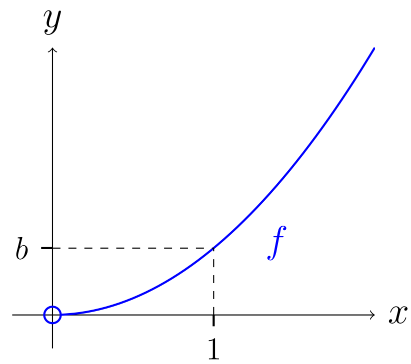
Det er a som bestemmer potensfunktions vækst. Alt efter værdien af a får vi forskellig form på grafen for funktionen:



Figur 5.1: Grafen for potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ for forskellige værdier af konstanten a

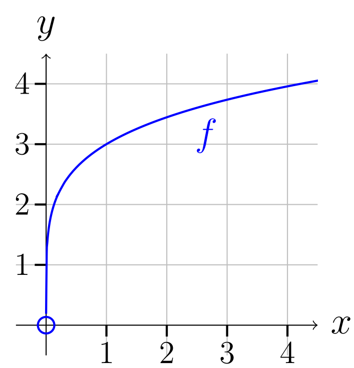
Betydning af b

Konstanten b har selvfølgelig også en betydning for grafen. Det er nemlig andenkoordinaten til punktet med førstekoordinat 1, som vist her:



Øvelse 5.1.4

Her ses grafen for en potensfunktion.



a) Hvad kan man sige om a?

b) Aflæs værdien af b.

Øvelse 5.1.5

Definitions og værdimængden for potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ afhænger af konstanterne a og b.

Ud fra graferne i figur 5.1 skal du bestemme definitions og værdimængden for f når

a) $a \neq 0$

b) $a = 0$

Øvelse 5.1.6

Potensfunktioner som f.eks. $f(x) = 3x$ og $f(x) = x^2$ er ikke så interessante da vi har studeret dem i de foregående kapitler. Så lad os se nærmere på nogle af de mere eksotiske potensfunktioner.

a) Lav en skitse af $f(x) = \sqrt{x}$. Hvis du er sej, gør du det i hånden uden GeoGebra.

b) Lav en skitse af $f(x) = \frac{1}{x}$. Hvis du er sej, gør du det i hånden uden GeoGebra.

Ligninger med potenser

I forbindelse med potensfunktioner optræder også ligninger med potenser.

Eksempel 5.1.2

Vi vil løse ligningen $5x^{3,5} = 30$. Vi starter med at dividere med 5 på begge sider, da det vil bringe os lidt tættere på at få x til at stå alene:

$$x^{3,5} = \frac{30}{5}$$

Dvs.

$$x^{3,5} = 6$$

Nu tager vi den 3,5'te rod af 6 for at finde x:

$$x = \sqrt[3,5]{6}$$

Vi taster roden i GeoGebra. Man kan få rodtegnet frem ved at skrive `nroot` i et algebravindue.

$$x = 1{,}67$$

Øvelse 5.1.7

Løs ligningerne

a) $3x^{1,7} = 20$

b) $0{,}23 = x^{-1}$

Ekstra

Ligesom for lineære og eksponentielle funktioner, er der også en formel for forskriften for en potensfunktion gennem to punkter.

Sætning 5.1.1

Antag at grafen for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ går igennem punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1). Da kan a og b bestemmes ved formlerne:

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)}{\ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_0}{x_0^a}$$

Øvelse 5.1.8

a) Bestem forskriften for den potensfunktion som går igennem punkterne $(2, 12)$ og $(3, 27)$.

Øvelse 5.1.9

Nedenstående tabel viser sammenhæng mellem kropsvægt og hjernevægt for to mennesker.

Kropsvægt (kg)	60	80
Hjernevægt (kg)	1,268	1,533

Sammenhængen kan beskrives med en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$, hvor $f(x)$ er hjernevægten og x er kropsvægten.

a) Bestem a og b i forskriften.

b) Bestem hjernevægten for en person der vejer 110 kg. Kan du gøre det både ved aflæsning og ved beregning?

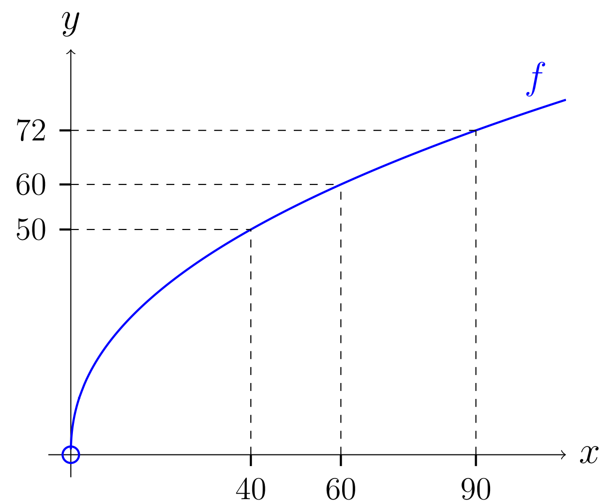
c) En mand har en hjerne på 1,4 kg. Hvad vejer han? Kan du finde ud af det både ved aflæsning og ved beregning?

5.2 Potensfunktioners vækst

Indtil videre har vi set på følgende former for vækst:

Lineær	y vokser med en fast værdi, når x vokser med en fast værdi
Eksponentiel	y vokser med en fast procent, når x vokser med en fast værdi

Potensfunktioner vokser med en fast procent, når x vokser med en fast procent. Altså en procent-procent vækst. Det er nemmest at illustrere med et eksempel:



Vi har valgt at markere $x = 40$ og lade x vokse med 50%. Vi ser at de tilsvarende y-værdier vokser med 20%. Den procentvise vækst i y afhænger ikke at det valgte udgangspunkt for x, men den afhænger af det valgte procentvise spring i x-værdierne.

Øvelse 5.2.1

Med udgangspunkt i grafen ovenover.

a) Tjek at jeg har ret. Altså der er et spring på 50% mellem de markerede x-værdier og et spring på 20% mellem de markerede y-værdier.

b) Hvad ville der ske hvis jeg havde valgt en anden start værdi til x, men samme procentvise vækst. Ville y så stadig vokse med 20%?

c) Hvad ville der ske hvis jeg havde valgt en anden procentvis vækst til x, men samme startværdi. Ville y så stadig vokse med 20%?

Vi kan udvide nu skemaet med vækstegenskaber:

Lineær	y vokser med en fast værdi, når x vokser med en fast værdi
Eksponentiel	y vokser med en fast procent, når x vokser med en fast værdi
Potens	y vokser med en fast procent, når x vokser med en fast procent

Bemærk forskellen mellem eksponentiel og potens.

Øvelse 5.2.2 (Svær)

Antag at en potensfunktion $f(x)$ vokser fra 200 til 220 når x vokser fra 30 til 60.

a) Hvor stor er den procentvise vækst fra 200 til 220?

b) Hvor stor er den procentvise vækst fra 30 til 60?

c) Benyt de netop fundne resultater til at bestemme $f(120)$

VINK: I sidste spørgsmål får du brug for at udnytte hvad du ved om potensvækst fra skemaet oven over

Regression med potensfunktioner

Ligesom vi kan lave lineær og eksponentiel regression kan vi også lave regression med potensfunktioner. Der er ikke noget nyt her, andet end at man selvfølgelig vælger "potens" i Excel.

Øvelse 5.2.3

I dette Excel-ark ses en oversigt over indtægter for kunstnere på Spotify i år 2021. I arket fremgår det f.eks. at kun 16500 af kunstnerne tjente mere end \$50.000. Og det er beløbet Spotify udbetalte. Kunstneres pladeselskab snupper en stor del, medmindre kunstneren selv udgiver musikken, så reelt er indtjeningen mindre. Jeg kan ikke anbefale at blive musiker.

a) Bestem en potensmodel for sammenhængen mellem indtægt x og antallet af kunstnere $n(x)$, som har minimum denne indtægt.

b) Bestem ved hjælp af modellen hvor mange kunstnere som tjente mere end \$2.000.

c) Bestem ved hjælp af modellen hvor meget de bedst tjenende 1000 kunstnere tjente.

Spotify er ikke det eneste eksempel på, at få mennesker får en stor del af kagen, og I mange tilfælde vil potensfunktioner give en god beskrivelse af uligheden. Heldigvis kan vi også bruge potensfunktioner i fysik, og det er jo mere opmuntrende end ulighed. Så luk mathhx og lav noget fysik. Jaja nu tænker du nok at jeg er sådan en enhedslisten-agtig type, og at man fortjener at tjene alle pengene, hvis man er dygtig osv...men kom ikke og fortæl mig at den musik, som er mest spillet på Spotify, er den bedste!

Ekstra

Vi kan også skrive skemaet med vækstegenskaber således:

	y-vækst: fast værdi	y-vækst: fast procent
x-vækst: fast værdi	Lineær	Eksponentiel
x-vækst: fast procent		Potens

Vi kan se at skemaet indeholder et tomt felt.

Øvelse 5.2.4 (Svær)

Du kan faktisk tænke dig til hvad der skal stå i det tomme felt. Det er svært, men du skal have gang i noget med omvendte funktioner kan jeg afsløre.

a) Gør skemaet færdigt. Dvs. find ud af hvad der skal stå i det tomme felt

5.3 Beviser til potensfunktioner

Vi har lært at b er andenkoordinaten til $x = 1$ og at potensfunktioner er karakteriseret ved en procent-procent vækst. Det kan formuleres mere konkret i følgende sætning:

Sætning 5.3.1

Grafen for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ går igennem punktet $(1, b)$ og funktionen vokser med $((1 + r)^a - 1) \cdot 100\%$ når x vokser med $r \cdot 100\%$

Vi bemærker at $((1+r)^a - 1) \cdot 100\%$ ikke afhænger af x så det er en fast procentvis vækst.

Øvelse 5.3.1

Med inspiration fra beviset til den tilsvarende sætning for eksponentielle funktioner (se afsnit 6.6 i b-bogen)

a) Bevis ovenstående sætning

VINK: Du får brug for potensregnereglen $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$.

Funktion igennem to punkter

Sætning 5.1.1

Antag at grafen for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ går igennem punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1). Da kan a og b bestemmes ved formlerne:

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)}{\ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_0}{x_0^a}$$

Øvelse 5.3.2

I denne øvelse skal du igen søge inspiration i beviset for den tilsvarende sætning for eksponentielle funktioner (se afsnit 6.6 i b-bogen)

a) Bevis ovenstående sætning.

VINK: Du får brug for følgende regler $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ og $\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$.

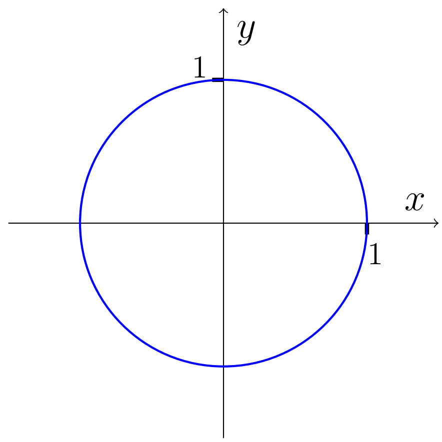
Kapitel 6

Trigonometriske funktioner

Trigonometri er et emne som handler om at bestemme vinkler og sider i trekanter. I trigonometrien møder man de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og tangens. Men dette kapitel handler ikke om trekanter. Det viser sig, at de trigonometriske funktioner har en mere grundlæggende rolle i matematikken, og derfor vil vi springe trekantsberegningerne over, og i stedet gå direkte til de trigonometriske funktioner og deres egenskaber. Den mest interessante egenskab for trigonometriske funktioner er at de er periodiske, hvilket betyder at de efter et stykke tid begynder at gentage sig selv. Derfor kan de bruges til at modellere periodiske bevægelser indenfor f.eks. økonomi. Det kan f.eks. være en virksomhed som sælger en sæsonbetonet vare. Her kan de trigonometriske funktioner bruges til at modellere hvordan virksomhedens omsætning følger årets måneder. Det er sådan vi vil se dem i eksamensopgaverne i hvert fald. Om det fungere på den måde i de virkelige liv er jeg lidt mere i tvivl om, men da de er fundamentale for matematikken, er det bestemt en god ide at lære om dem.

6.1 Enhedscirklen

En *enhedscirkel* er en cirkel i et koordinatsystem med centrum i $(0, 0)$ og radius $r = 1$:



Øvelse 6.1.1

a) Hvad er en enhedscirkel?

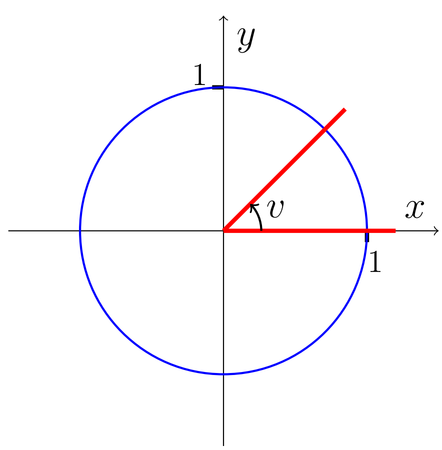
Vi får brug for at kende omkredsen af enhedscirklen. Den er 2π.

Øvelse 6.1.2

a) Argumenter at omkredsen af enhedscirklen er 2π.

Vinkler i enhedscirklen

Har man en vinkel v, tegner man den ind i enhedscirklen som vist her:



Øvelse 6.1.3

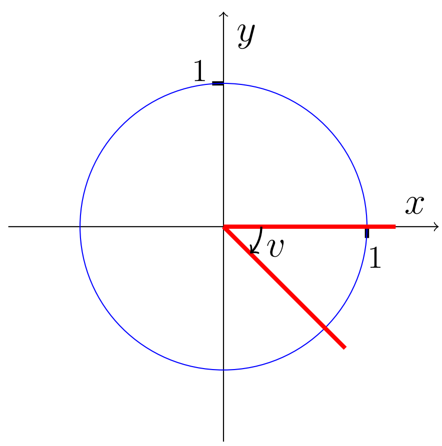
Find papir og blyant frem.

a) Tegn en enhedscirkel.

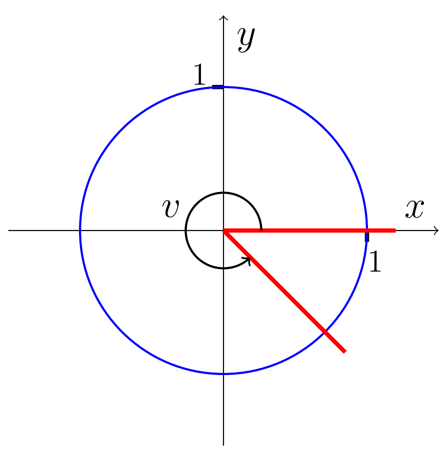
b) Tegn vinklen $v = 135°$ ind i enhedscirklen, og inden du siger: "Jeg har jo ikke nogen vinkelmåler med", så siger jeg: "Det er ikke nødvendigt, du kan godt gøre det præcist nok uden".

Negative vinkler

Vi er vandt til vinkler er positive. Vinkler er jo noget, vi måler med vores vinkelmåler, right? Men man kan faktisk godt have negative vinkler. Har vi en vinkel på $v = -45°$, betyder det at den skal se ud som en vinkel på $45°$, men at den skal "rotere den anden vej" i enhedscirklen som vist her:



Man kunne tænke at en vinkel på $-45°$ er det samme som en vinkel på $315°$ som vist her:



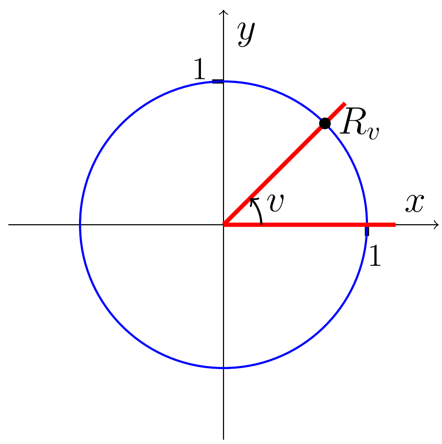
Selvom vinklernes ben ligger samme sted i de to enhedscirkler, kan vi se at den sorte buede pil der markerer rotationen er forskellig for de to vinkler. Spørger man mig, ja så vil jeg hellere roteres med $-45°$ end $315°$, da $315°$ ville gøre mig helt rundtosset (det er et større rotation). De to vinkler har dog en noget til fælles. De skærer enhedscirklen i det samme punkt, og netop skæringspunktet med enhedscirklen kommer vi til at interessere os for senere.

Øvelse 6.1.4

a) Tegn vinklen på $-180°$ ind i en enhedscirkel.

Retningspunkter

Når man tegner en vinkel ind i enhedscirklen, ligger man altid vinklens ene ben langs x-aksen. Det punkt hvor vinklens andet ben skærer cirklen kaldes *retningspunktet*. Hedder vinklen v, betegner vi retningspunktet med R_v.



Øvelse 6.1.5

Bestem koordinaterne til retningspunkterne for følgende vinkler.

a) $v = 90°$

b) $v = 180°$

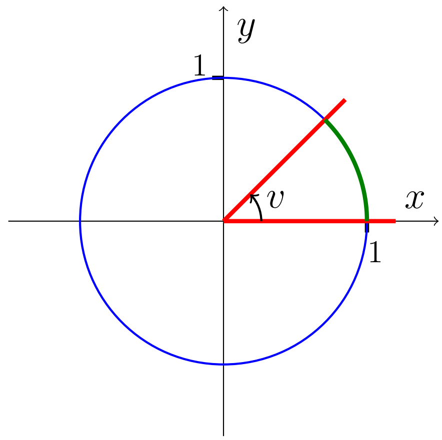
c) $v = 270°$

d) $v = 0°$

e) $v = -90°$

Vinkler målt i radianer

I stedet for at måle vinkler i grader, kan man måle dem i noget som hedder *radianer*. Når man måler en vinkel i radianer, måler man længden langs cirklens periferi (kant) som vist her:



Vinklen v målt i radianer er altså længden af den grønne bue. Størrelsen på en vinkel målt i radianer kaldes radiantallet.

Eksempel 6.1.1

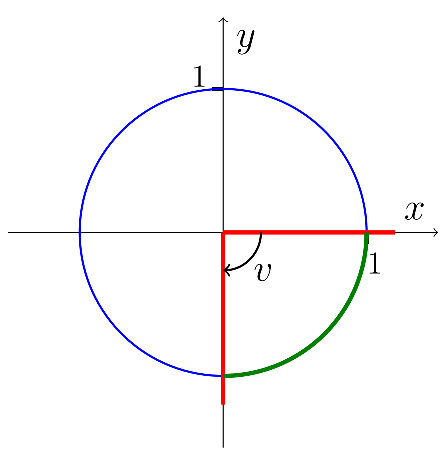
Vi vil nu bestemme radiantallet for vinklen ovenover: Da der er 2π hele vejen rundt, og vi kan se at den grønne bue fylder $\frac{1}{8}$ af cirklen, må vinklen v være $v = \frac{1}{8} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$. Altså $v = \frac{\pi}{4}$.

Læg mærke til der ikke er nogen enhed på. Det er den måde vi kan se forskel på grader og radianer. Står der $v = 20$, betyder det 20 radianer, mens $v = 20°$ betyder 20 grader.

Vil man finde radiantallet for negative vinkler, fungerer det helt som man skulle tro. Man finder stadig buelængden, men hvis vinklen er negativ, så er radiantallet også negativt.

Eksempel 6.1.2

Vi vil nu bestemme radiantallet for en vinkel på $-90°$. Vi indtegner først vinklen og derefter indtegner vi buen langs enhedscirklen (igen markeret med grøn):



Da der er 2π hele vejen rundt, og vi kan se at den grønne bue fylder $\frac{1}{4}$ af cirklen, må buelængden være $v = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$. Da v er en negativ vinklen skal der et negativt fortegn på buelængen. Altså $v = -\frac{\pi}{2}$.

Øvelse 6.1.6

Bestem radiantallet for følgende vinker:

a) $v = 90°$

b) $v = 180°$

c) $v = 0°$

d) $v = -45°$

Øvelse 6.1.7

Bestem koordinaterne til retningspunktet for følgende vinkler. Pas på! Jeg har blandet grader og radianer.

a) $v = 90°$

b) $v = -\pi$

c) $v = 450°$

d) $v = -2$ Her kan du ikke gøre det præcist (endnu). Så et ca. punkt er ok.

Øvelse 6.1.8

a) Udfyld de tomme pladser.

x	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$		$225°$	$270°$		
x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	π			$\frac{7\pi}{4}$	2π

6.2 Cosinus, sinus og tangens

Definition 6.2.1

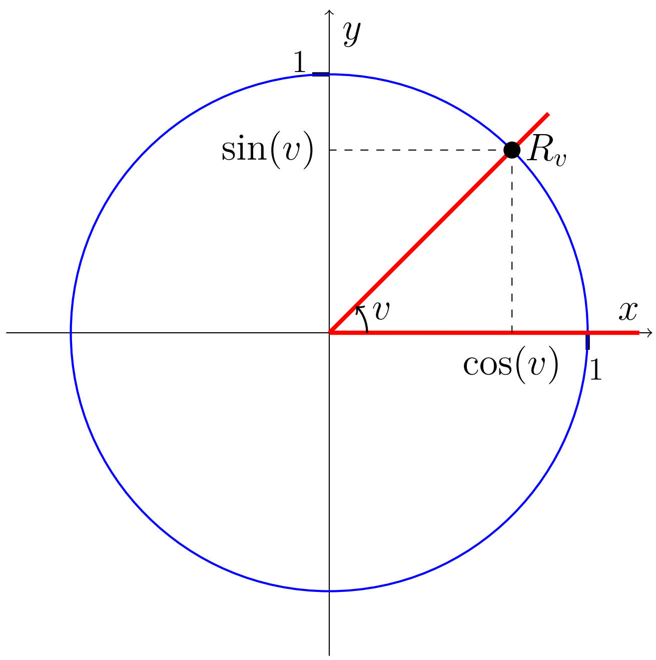
Lad v være en vinkel med retningspunkt R_v.

Cosinus til v defineres som førstekoordinaten til R_v og betegnes $\cos(v)$.

Sinus til v defineres som andenkoordinaten til R_v og betegnes $\sin(v)$.

Tangens til v defineres som forholdet $\frac{\sin(v)}{\cos(v)}$ og betegnes $\tan(v)$. Dette gælder selvfølgelig kun hvis $\cos(v) \neq 0$. Ellers er tangens udefineret.

Cosinus og sinus kan illustreres således:



Eksempel 6.2.1

Vi vil bestemme cosinus, sinus og tangens til vinklen på tegningen oven over. Det er svært at se de præcise koordinater til retningspunktet ud fra tegningen, men det ser ud til at cosinus og sinus har samme værdi og at den værdi ligger mellem $\frac{1}{2}$ og 1. Skal vi sige 0,7? Altså

$$\cos(v) = 0{,}7 \quad \text{og} \quad \sin(v) = 0{,}7$$

Tangens bliver så

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{0{,}7}{0{,}7} = 1$$

Der findes selvfølgelig metoder til at få præcise værdier for cosinus, sinus og tangens, men til at starte med, er det fint at aflæse for at få forståelse på plads

Øvelse 6.2.1

Bestem cosinus, sinus og tangens til følgende vinkler.

a) $v = \pi$

b) $v = -2\pi$

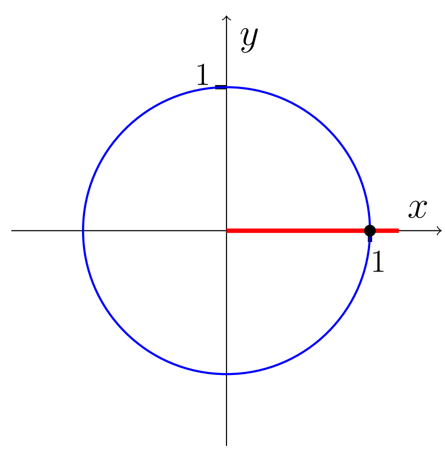
c) $v = 135°$ (bare sådan ca.)

d) $v = -2$ (bare sådan ca.)

e) $v = 90°$

Cosinus, sinus og tangens som funktioner

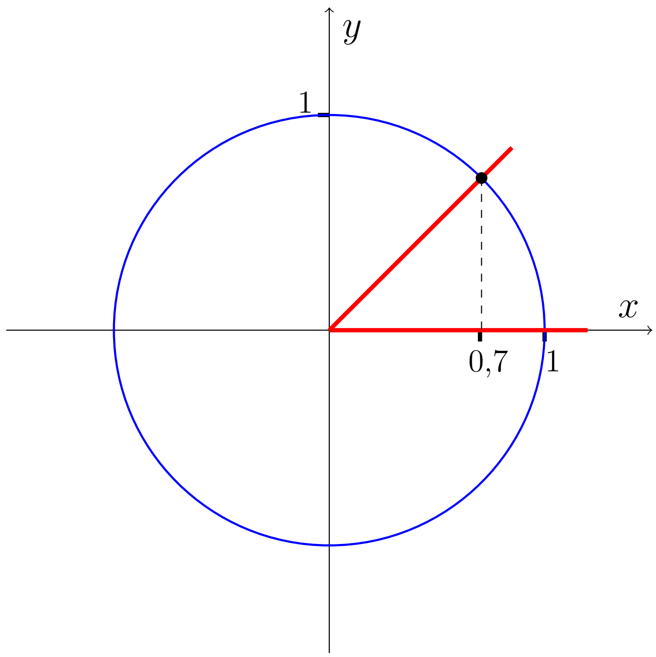
Til enhver vinkel v kan vi bestemme cosinus til v. Vi kan derfor tænke på cosinus som en funktion, nemlig den funktion som til ethvert x knytter $\cos(x)$, dvs. funktionen med forskriften $f(x) = \cos(x)$. Grunden til vi skriver x i stedet for v er at vi gerne vil tænke på cosinus som en almindelig funktion og her plejer vi at kalde variablen for x. Lad os undersøge hvordan grafen ser ud. Vi tegner grafen ved at lave et sildeben. Vi finder funktionsværdierne ud fra enhedscirklen. Vi starter med $x = 0$. Altså en vinkel på 0.



Vi kan se at retningspunktet for vinklen $x = 0$ har en førstekoordinat på 1. Altså er $\cos(0) = 1$ og dermed er $f(0) = 1$ (husk at vi tegner grafen for $f(x) = cos(x)$). Der er ikke noget nyt her. Det er præcis som den øvelse I lige har regnet. Det skriver vi ind i et sildeben:

x	0
$f(x)$	1

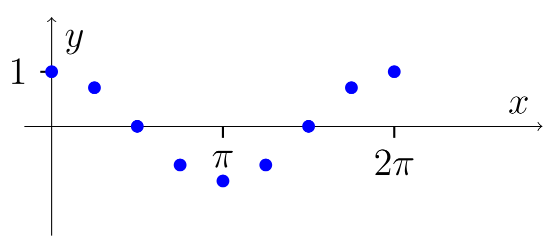
Vi tager lige en til. Vi vælger vinklen på $x = \frac{\pi}{4}$:



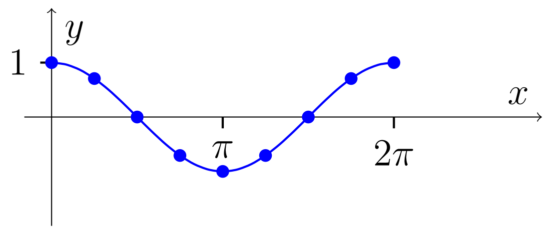
Vi aflæser førstekoordinaten til retningspunkt for vinklen $x = \frac{\pi}{4}$ til at være $x = 0{,}7$, hvilket vi sætter ind i sildebenet. Sådan forsætter vi rundt i enhedscirklen, hvilket giver os:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	$0{,}7$	0	$-0{,}7$	-1	$-0{,}7$	0	$0{,}7$	1

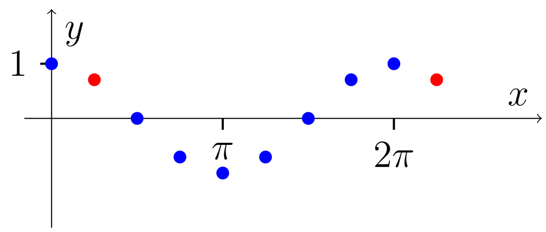
Vi tegner punkterne ind i et koordinatsystem



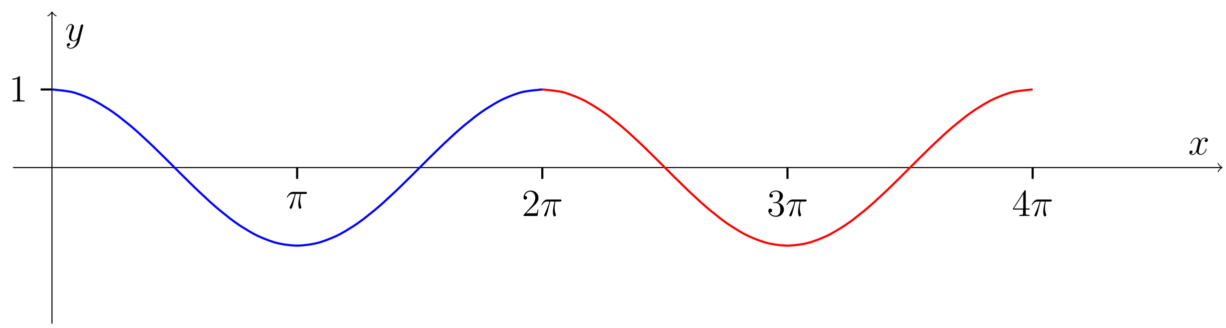
og vi tegner en graf gennem alle punkterne:



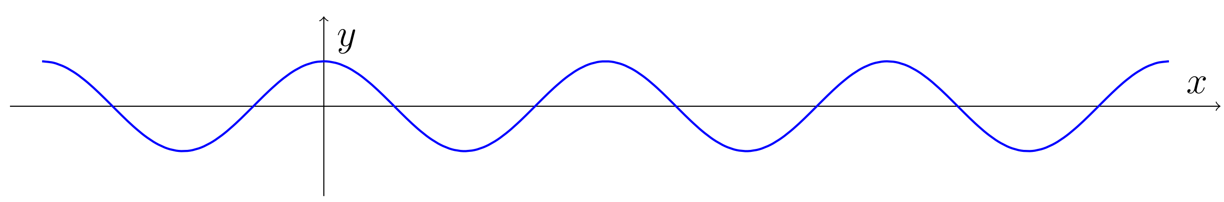
Vi ser at det sidste punkt ligger med samme funktionsværdi (y-værdi) som det første. Det er fordi at vi ved $x = 2\pi$ er nået en helt gang rundt i cirklen og defor starter vi forfra med de samme funktionsværdier. Tegner vi endnu et punkt ind, ved $x = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$, får vi:



Vi kan se at dette punkt har samme funktionsværdi som det andet punkt. Sådan kan vi blive ved:



Vi kan se at den røde del af grafen er en nøjagtig kopi af den sorte del. En funktion, som gentager sig selv på den måde, siges at være *periodisk*. Det stykke, man skal gå ud, før at funktion gentager sig selv, kaldes *perioden*. Vi kan se at cosinus er periodisk med periode $T = 2\pi$. Grafen kan selvfølgelig udvides mere – også i negativ retning:



Øvelse 6.2.2

Nu er det din tur til at tegne grafer med papir og blyant som beskrevet ovenover.

a) Tegn grafen for sinus i intervallet $[0; 2\pi]$.

b) Tegn grafen tangens i intervallet $[0; 2\pi]$. Den her er lidt svær. Du får brug for mange støttepunkter. Det kan være en hjælpe at overveje, hvordan grafen må opfører sig, når x er tæt på $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$.

Øvelse 6.2.3

a) Argumenter for at sinus er periodisk og kom med et bud for perioden. Få hjælp fra din tegning af grafen.

b) Argumenter for at tangens er periodisk og kom med et bud for perioden. Få hjælp fra din tegning af grafen.

6.3 Regning med trigonometriske funktioner

De trigonometiske funktioner i Geogebra

Indtil videre har vi bestemt funktionsværdier for de trigonometriske funktioner ved at aflæse i enhedscirklen. Vi kan selvfølgelig finde de præcise værdier i GeoGebra. Det gør vi med kommandoerne

`cos(x)` , `sin(x)` og `tan(x)`

Her skal vi være opmærksom på en ting. Hvis vi skriver cos(5), tror GeoGebra så at 5 er i grader eller radianer? Det er et problem man står med uanset hvilket værktøj man bruger. Skriver man i Algebravinduet, så vil GeoGebra gætte om du mener grader eller radianer, mens at CASvinduet vil opfattte vinklen som værende i radianer. Man kan også regne i grader i CAS, men så skal man skrive det ekspicit, f.eks.: $\cos(5°)$. Jeg vil anbefale at bruge CAS.

Øvelse 6.3.1

Bestem følgende værdier i Geogebra

a) $\cos(45°)$

b) $\sin(90°)$

c) $\sin(90)$

d) $\tan(-2)$

Funktionsundersølgelse med trigonometriske funktioner i GeoGebra

I vil møde funktioner hvis forskrift indeholder trigonometriske funktioner. Typisk er I nødt til at anvende GeoGebra for at kunne regne på dem. Her er der ikke noget nyt, men husk at det ikke er polynomier, og derfor vil I være nødt til at bruge de kommandoer som tager udgangspunkt i et interval. Skal man finde nulpunkter f.eks., så kan man ikke bruge kommandoen `Rod(Polynomium)`. I stedet bruger man

```
Rødder(Funktion, Start x-Værdi, Slut x-Værdi)
```

Det kræver så at man har et interval, så det må man håbe at der opgivet i opgaven.

Øvelse 6.3.2

Ved hjælp af GeoGebra skal du lave en funktionsundersøgelse af funktionen

$$f(x) = 4\sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2, \quad x \in [0; 20[$$

Dvs. du skal bestemme:

a) Definitionsmængde

b) Værdimængde

c) Nulpunkter

d) Fortegnsvariation

e) Monotoniforhold

f) Ekstrema

g) Krumningsforhold (springes over hvis du ikke har lært om krumningsforhold endnu).

h) Vendetangenter (springes over hvis du ikke har lært om vendetangenter endnu).

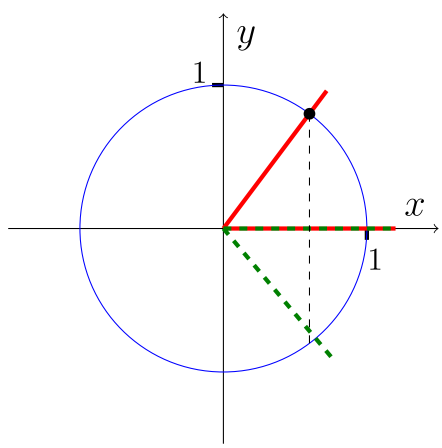
Løsning af trigonometriske ligninger

Vi mangler ikke så meget, før vi kan lave ovenstående funktionsundersøgelse i hånden. Det kræver bare lidt viden om hvordan man løser ligninger med trigonometriske funktioner. Så lad os se på nogle eksempler.

Eksempel 6.3.1

Vi vil løse ligningen $\cos(x) = 0{,}6$. Vi skal have fat i den omvendte funktion til cosinus så vi kan komme ind til x'et. Der er bare et problem. Cosinus har ikke nogen omvendt funktion, fordi der findes flere x'er til hver cosinusværdi. Men vi kan dog finde et enkelt x som løser ligningen med funktionen $\cos^{-1}(x)$. I GeoGebra hedder den `acos(x)`:

Så $x = 0{,}93$ er en løsning til ligningen. Men der er flere, og for at finde dem, har vi brug for en enhedscirkel:



Den røde vinkel på tegningen er den som GeoGebra har fundet. Men vi kan se at der er en anden vinkel (den grønne) med samme cosinusværdi. Vi kan se ud af symmetrien at den må være ligeså stor som den røde, men med negativt fortegn. Altså har den værdien $x = -0{,}93$. Vi har altså i alt to løsninger til ligningen $\cos(x) = 0{,}6$ nemlig.

$$x = 0{,}93 \vee x = -0{,}93$$

MEN, vi er ikke færdige. Der er godt nok ikke flere retningspunkter på cirklen som har en førstekoordinat på 0,6, men for hver løsning vi har fundet, kan vi finde en ny løsning ved at snurre en hel gang rundt i cirklen (så lander vi jo i samme retningspunkt). Snurre vi en enkelt gang rundt får vi løsningerne

$$x = 0{,}93 + 2\pi \vee x = -0{,}93 + 2\pi$$

Men vi kan snurre i begge veje og flere gange rundt, hvilket giver os vores endelige løsninger:

$$x = 0{,}93 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -0{,}93 + p \cdot 2\pi,$$

hvor p er et helt tal.

Øvelse 6.3.3

Betragt ligningen $\cos(x) = 0{,}3$

a) Tegn en enhedscirkel og marker en positiv løsning til ligningen i cirklen.

b) Aflæs en omtrentlig værdi for løsningen.

c) Tjek din løsning i GeoGebra. Hvad var løsningen med to decimaler?

d) Ligningen har en til løsning i intervallet $[-\pi; 0]$. Marker denne løsning i enhedscirklen og bestem værdien.

e) Opskriv samtlige løsninger til ligningen.

Øvelse 6.3.4

Betragt ligningen $\cos(x) = -0{,}4$

a) Tegn en enhedscirkel og marker en positiv løsning til ligningen.

b) Aflæs en omtrentlig værdi for løsningen.

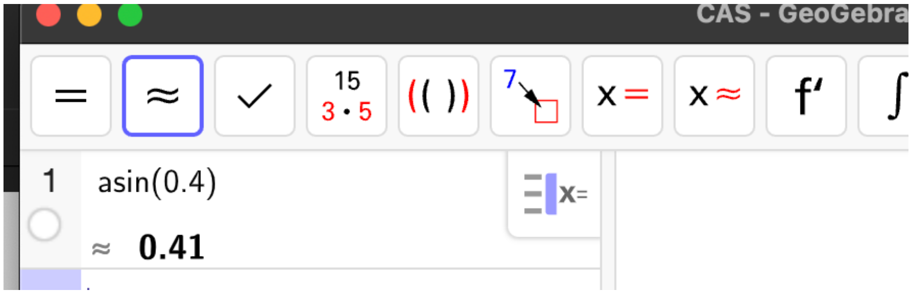
c) Tjek din løsning i GeoGebra. Hvad var løsningen med to decimaler?

d) Ligningen har en til løsning i intervallet $[-\pi; \pi]$. Marker denne løsning i enhedscirklen og bestem værdien.

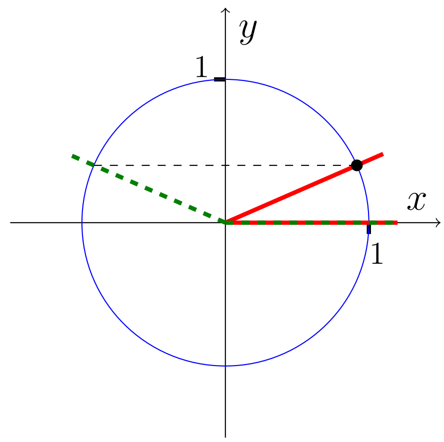
e) Opskriv samtlige løsninger til ligningen.

Eksempel 6.3.2

Vi vil løse ligningen $\sin(x) = 0{,}4$. Vi bruger først GeoGebra:



Så $x = 0{,}41$ er en løsning til ligningen. Vi tegner enhedscirkel



Den røde vinkel på tegningen er den som GeoGebra har fundet (dvs. den er 0,41)., men vi kan se at der er en anden vinkel (den grønne) med samme sinusværdi. Denne vinkel får vi ved at sige

$$\pi - 0{,}41 = 2{,}73$$

Det er fordi vi går en halv gang rundt i cirklen (π) og så tilbage et stykke der svarer til den røde vinkel (0,41). Vi husker at sinus også er periodisk med periode $2 \cdot \pi$, så vi får i alt løsningerne.

$$x = 0{,}41 + p \cdot 2\pi \vee x = 2{,}73 + p \cdot 2\pi,$$

hvor p er et helt tal.

Øvelse 6.3.5

Betragt ligningen $\sin(x) = 0{,}7$

a) Tegn en enhedscirkel og marker en løsning til ligningen i cirklen.

b) Aflæs en omtrentlig værdi for løsningen.

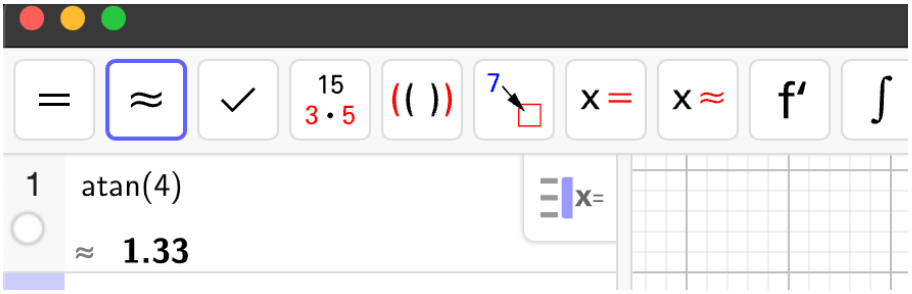
c) Tjek din løsning i GeoGebra. Hvad var løsningen med to decimaler?

d) Ligningen har en til løsning i intervallet $[-\pi; \pi]$. Marker denne løsning i enhedscirklen og bestem værdien.

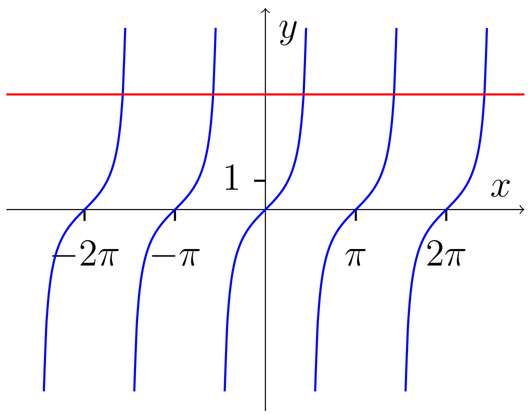
e) Opskriv samtlige løsninger til ligningen.

Eksempel 6.3.3

Vi vil løse ligningen $\tan(x) = 4$. Vi starter i GeoGebra:



Vi ser at $x = 1{,}33$ er en løsning til ligningen. Vi laver nu en skitse af grafen for tangens og indsætter linjen $y = 4$



Vi ved allerede at tangens er periodisk med periode π og det fremgår af skitsen at der ikke er andre løsninger end dem vi får ved at gå et helt antal perioder ud til begge sider. Altså har vi alt løsningerne.

$$x = 1{,}33 + p \cdot \pi,$$

hvor p er et helt tal.

Øvelse 6.3.6

Løs ligningerne

a) $\cos(x) = 0{,}8$

b) $\cos(x) = -0{,}4$

c) $\sin(x) = 0{,}6$

d) $\sin(x) = 2$

e) $\tan(x) = 2$

Eksempel 6.3.4

Vi vil nu, ved beregning, finde nulpunkter for funktionen:

$$f(x) = 4\sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2, \quad x \in [0;20[$$

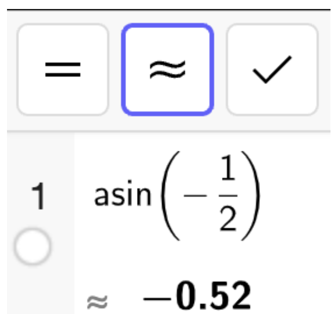
Vi sætter $f(x) = 0$:

$$4\sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2 = 0$$

Vi isolerer sinusdelen:

$$\sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) = -\frac{1}{2}$$

Vi er noget dertil hvor vi gerne vil slippe af med vores sinus. Ligesom i de ovenstående eksempler, starter vi med at finde en enkelt løsning ved hjælp af GeoGebra. Vi regner $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ for at finde den vinkel som har en sinusværdi på $-\frac{1}{2}$:



Vi ser at $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -0{,}52$. Men, det er ikke x vi har fundet. Der stod ikke $\sin(x)$ i ligningen. Der stod $\sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right)$. Så det er $\frac{1}{2}x - 6$ der skal være $-0{,}52$. Vi har altså.

$$\frac{1}{2}x - 6 = -0{,}52$$

Ved at tegne i enhedscirklen som i de ovenstående eksempler, finder vi samtlige løsninger ved.

$$\frac{1}{2}x - 6 = -0{,}52 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{1}{2}x - 6 = \pi - (-0{,}52) + p \cdot 2\pi$$

Vi isolerer x i de to ligninger

$$x = 10{,}95 + p \cdot 4\pi \quad \vee \quad x = 19{,}33 + p \cdot 4\pi$$

Vi skal så bare finde ud af hvilke af løsninger der ligger inden for intervallet $[0;20[$. Vi starter med $x = 10{,}95$ trækker vi 4π fra det ryger vi ud af intervallet. Lægger vi 4π til ryger vi også ud af intervallet. Vi prøver den anden løsning $x = 19{,}33$. Lægger vi 4π til ryger vi ud af intervallet, men trækker vi 4π fra, ja så lander vi på 6,76 og det er jo inden for intervallet. Kan vi trække yderligere 4π fra? Nej så ryger vi ud af intervallet. I alt har vi altså løsningerne:

$$x = 6{,}76 \quad \vee \quad x = 10{,}95 \quad \vee \quad x = 19{,}33,$$

hvilket er vores 3 nulpunkter.

Man kunne sige vi snød en lille smule ved at bruge GeoGebra til at finde $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, men vi kan ikke regne den værdi i hånden. I gamle dage brugte man sinustabeller til at slå tallet op. Den slags tabeller er selvfølgeligt forældet og derfor er det helt fint at bruge GeoGebra.

Øvelse 6.3.7

Lad $f(x) = 2\cos(2x+1) - 1 \quad , \quad -2 \leq x \leq 2$

a) Bestem nulpunkter for f. Hvis du ikke kan finde ud af metoden for ovenstående eksempel, så kan du få hjælp fra GeoGebra.

Differentialregning og trigonometriske funktioner

Graferne for de trigonometriske funktioner er uden knæk og spring og derfor kan de differentieres – jaja der er huller i definitionsmængden for tangens, og i de huller har tangens selvfølgelig ikke nogen differentialkvotient (klart, når den ikke defineret der).

Øvelse 6.3.8

Slå differentialkvotienterne for cosinus og sinus op i formelsamlingen og regn følgende differentialkvotienter.

a) $f(x) = \cos(x)$

b) $f(x) = \sin(x)$

c) $f(x) = \sin(x) \cdot x$

d) $f(x) = 5\cos(2x-1) + 3$

Øvelse 6.3.9 (Svær)

a) Gennemfør, ved beregning, funktionsundersøgelsen for

$$f(x) = 4\sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2, \quad x \in [0;20[$$

6.4 Beviser - Trigonometriske funktioner

I dette afsnit vil vi gerne bevise at tangens er periodisk med periode π. Til det har vi brug for følgende sætning.

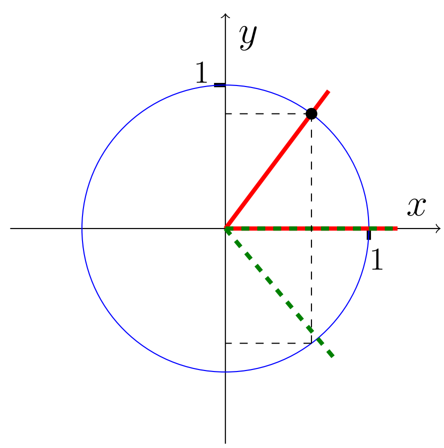
Sætning 6.4.1

For en vilkårlig vinkel x gælder følgende *overgangsformler*:

1. $\cos(-x) = \cos(x)$
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$
3. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
4. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

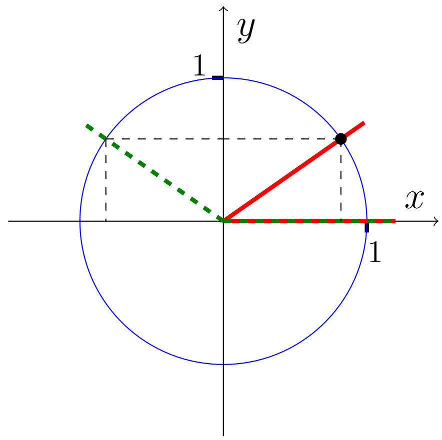
Bevis

Vi starter med vinklerne fra de to første formler:



På ovenstående tegning ses vinklen x tegnet med rød og vinklen $-x$ tegnet med grøn. Det er tydeligt at de har samme cosinusværdi, og at deres sinusværdier er lige store men med omvendt fortegn.

Lad os se på vinklerne i de to sidste formler:



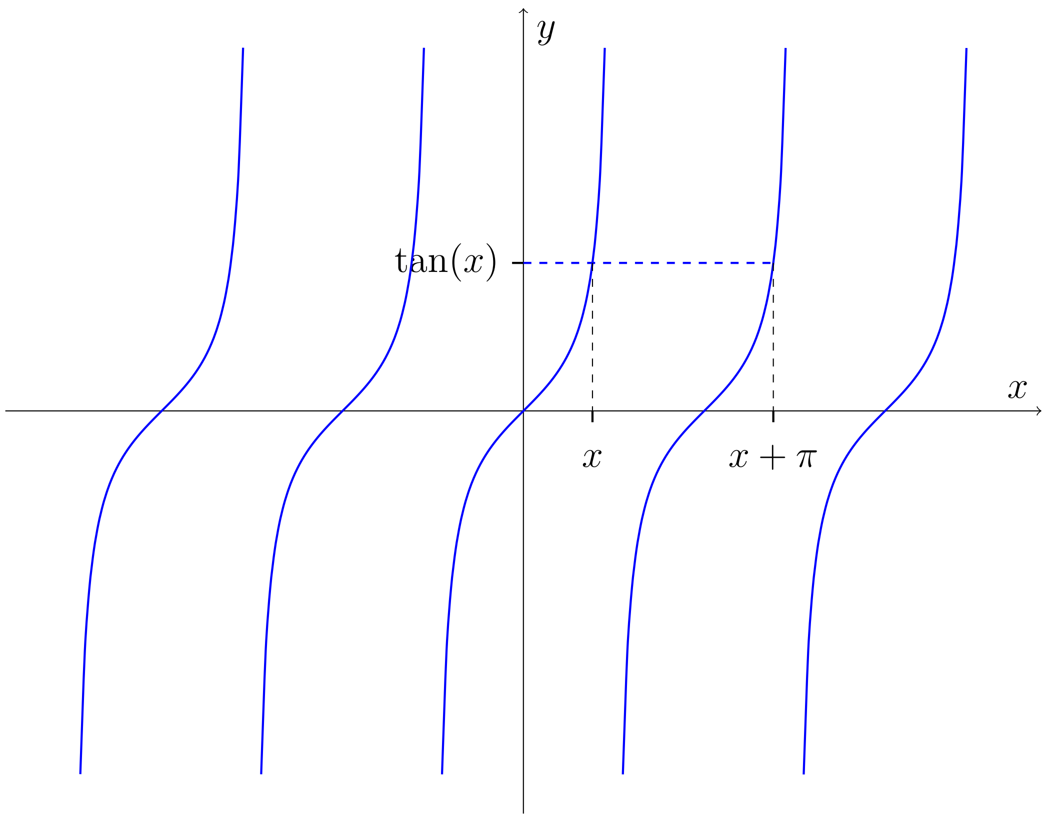
På ovenstående tegning ses vinklen x tegnet med rød og vinklen $\pi - x$ tegnet med grøn. Vinklen $\pi - x$ er selvfølgelig tegnet ved at starte med en vinkel på π og så gå x baglæns. Det er tydeligt at de to vinkler har samme sinusværdi, og at deres cosinusværdier er lige store, men med omvendt fortegn.

Sætning 6.4.2

Tangens er periodisk med periode π.

Bevis

At tagens er periodiske med π betyder at den begynder at gentage sig selv, efter vi er gået π ud af x-aksen. Det må være det samme som at funktionsværdien i et vilkårligt x er den samme som funktionsværdien i $x + \pi$:



Vi skal altså vise at $\tan(x) = \tan(x + \pi)$.

$$
\begin{aligned}
\tan(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} && \text{pr. definition af tangens} \\
&= \frac{\sin(\pi-(-x))}{\cos(\pi-(-x))} && \text{da } x = -(-x) \\
&= \frac{\sin(-x)}{-\cos(-x)} && \text{overgangsformel 3 og 4} \\
&= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} && \text{overgangsformel 1 og 2} \\
&= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} && \text{forkortet med } -1 \\
&= \tan(x)
\end{aligned}
$$

Vi har nu vist at $\tan(x) = \tan(x + \pi)$ og tangens er altså periodisk med periode π.

6.5 Trigonometriske funktioner i fysik

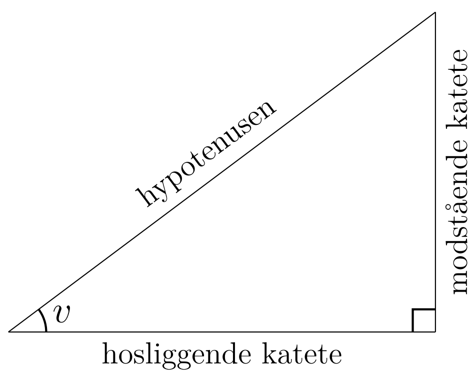
Dele af fysikken kræver en forståelse af trigonometriske funktioner. Her er det ikke helt nok at kunne aflæse værdier i en enhedscirkel eller løse en trigonometrisk ligning. I dette afsnit vil vi bygge på, så vi er klar til de udfordringer, vi møder med trigonometriske funktioner i fysikken.

Beregning af sider og vinkler i retvinklede trekanter

I forbindelse med analyse af kræfter har vi brug for at regne sider og vinkler i retvinklede trekanter. Følgende sætning burde være kendt fra folkeskolen (måske formuleret lidt anderledes).

Sætning 6.5.1

Betragt den retvinklede trekant:



Der gælder:

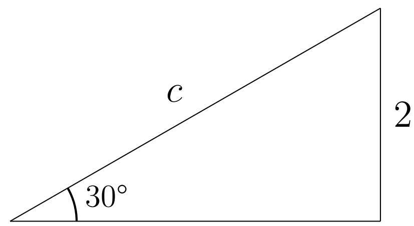
$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Eksempel 6.5.1

Betragt trekanten



Vi vi beregne længden af hypotenusen c. Vi finder en formel fra sætning 6.5.1, som indeholder de to størrelser vi kender (vinkel og modstående katete)

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi indsætter vores oplysninger:

$$\sin(30°) = \frac{2}{\mathrm{c}}.$$

Vi isolerer c:

$$\mathrm{c} = \frac{2}{\sin(30°)},$$

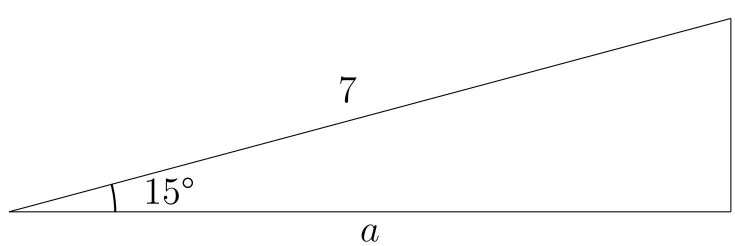
og regner resultatet i GeoGebra/lommeregner:

$$\mathrm{c} = 4.$$

Længden af hypotenusen er altså 4.

Øvelse 6.5.1

Betragt den retvinklede trekant:

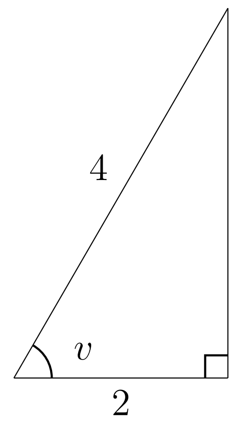


a) Beregn sidelængden a

b) Beregn resten af siderne og vinklerne

Eksempel 6.5.2

Betragt trekanten:



Vi vil bestemme v. Vi finder den formel som indeholder de størrelser vi har:

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi indsætter

$$\cos(v) = \frac{2}{4},$$

og regner

$$\cos(v) = 0{,}5,$$

og isolerer v:

$$v = \cos^{-1}(0{,}5),$$

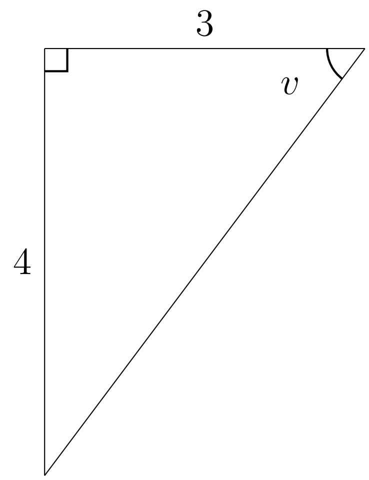
og får:

$$v = 60°,$$

og det passer da meget godt med tegningen.

Øvelse 6.5.2

Betragt trekanten:



a) Bestem vinklen v

b) Bestem resten af vinklerne og siderne i trekanten.

Harmoniske svingninger

I fysik bruges harmoniske svingninger til at beskrive bølger.

Definition 6.5.1

En *harmonisk svingning* er en funktion på formen

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$$

hvor:

a er et positivt tal som kaldes amplituden

b er et positivt tal som kaldes vinkelfrekvensen,

c et tal som kaldes faseforskydningen.

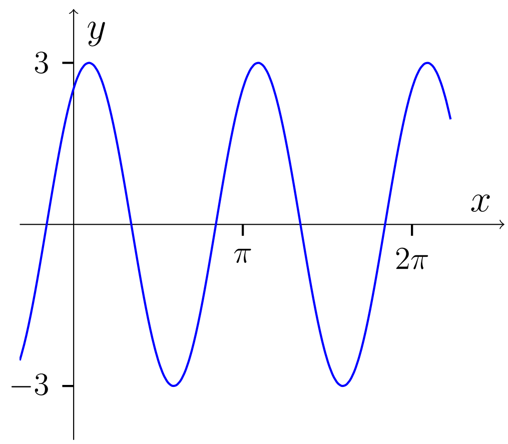
Grafen for harmonisk svingning ligner grafen for sinus, borset fra den er strukket/sammenpresset i vandret og/eller lodret regning. Hvordan grafen bliver forskudt/strukket afhænger af værdien af konstanterne i definitionen.

Amplitude

Amplituden er konstanten a i den harmoniske svingning $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$. Vi husker at sinus er andenkoordinaten til retningspunktet på enhedscirklen. Derfor vil sinus svinge mellem -1 og 1. Når vi så ganger med a, kommer funktionsværdierne til at svinge mellem $-a$ og a. Så amplituden a viser altså, hvor meget grafen er strukket i lodret retning.

Eksempel 6.5.3

Betragt grafen for $f(x) = 3 \cdot \sin(2x + 1)$:



Amplituden for f er 3, så vi forventer at grafen svinger mellem -3 og 3 på y-aksen. Vi ser det passer med grafen.

Øvelse 6.5.3

Lad $f(x) = 7 \cdot \sin(5x - 2)$

a) Bestem ud fra forskriften definitionsmængden for f.

b) Bestem ud fra forskriften værdimængden for f.

I forbindelse med bølger vil amplituden afgøre, hvor meget energi der er i bølgen. Høj amplitude betyder meget energi.

Vinkelfrekvens

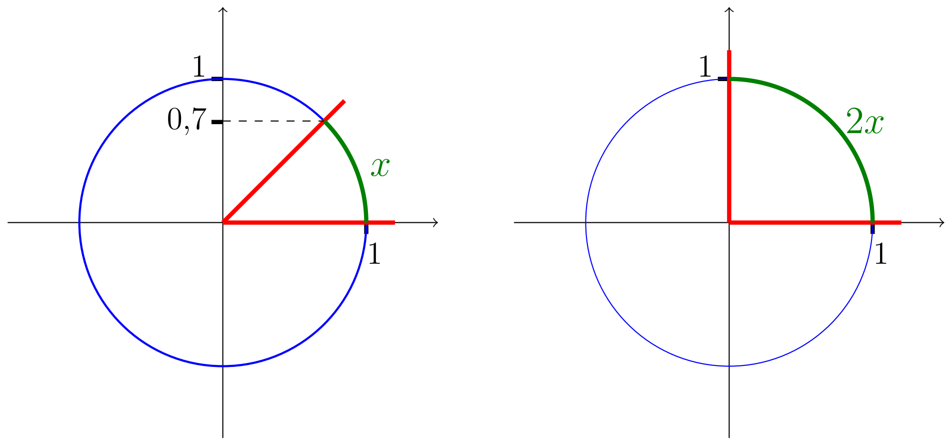
Vinkelfrekvensen er konstanten b i den harmoniske svingning:

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c).$$

Vinkelfrekvensen afgør hvor hurtigt funktionen svinger. Det vil vi forklare med udgangspunkt i funktionerne:

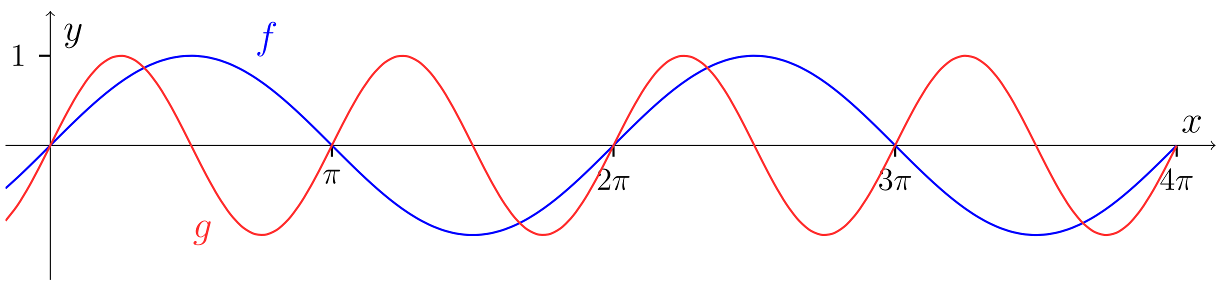
$$f(x) = \sin(x) \quad \text{og} \quad g(x) = \sin(2x)$$

Vi vil se på de to funktioners funktionsværdi, når $x = \frac{\pi}{4}$. Vi tegner to enhedscirkler. En med vinklen x og en med vinklen $2x$:



$$f(x) = \sin(x) = 0{,}71 \qquad\qquad g(x) = \sin(2x) = 1$$

Vi ser, at g bevæger sig dobbelt så hurtigt rundt i enhedscirklen som f. Grafen for g former sig derfor som grafen for f bare dobbelt så hurtigt. Så mens perioden for f er 2π, er perioden for g kun π. Graferne kommer altså til at se således ud:



Perioden kan bestemmes ud fra vinkelfrekvensen b ved følgende formel (som vi beviser i ekstraafsnittet):

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Eksempel 6.5.4

Antag at perioden for en trigonometrisk funktion er 8π. Vi vi bestemme vinkelfrekvensen. Vi har

$$T = \frac{2\pi}{b}.$$

Vi isolerer b

$$b = \frac{2\pi}{T},$$

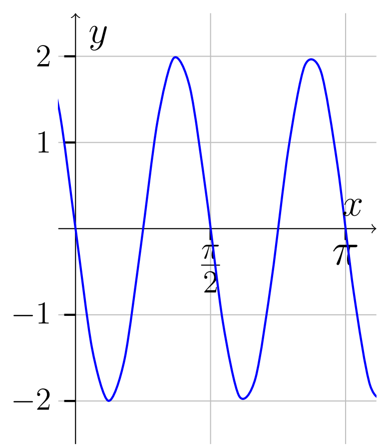
og indsætter perioden

$$b = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}.$$

Vi konkluderer at vinkelfrekvensen er $\frac{1}{4}$.

Øvelse 6.5.4

Betragt den harmoniske svingning:



a) Bestem amplituden

b) Bestem perioden

c) Beregn vinkelfrekvensen

Vær opmærksom på at i fysik optræder der også begrebet *frekvens* som betegnes med f. Det er noget andet end vinkelfrekvens. Man snakker om frekvens, når man har tid ud af x-aksen. Her er viser frekvensen antallet af svingninger (perioder) på 1 sekund, og den kan beregnes ud fra perioden ved:

$$f = \frac{1}{T}$$

Øvelse 6.5.5 (Svær)

Frekvensen f er antallet af svingninger på 1 sekund.

a) Argumenter for at f kan bestemmes ved formlen $f = \frac{1}{T}$

Øvelse 6.5.6 (Svær)

Frekvensen kan beregnes ud fra vinkelfrekvensen b. Formlen er:

$$f = \frac{b}{2\pi}$$

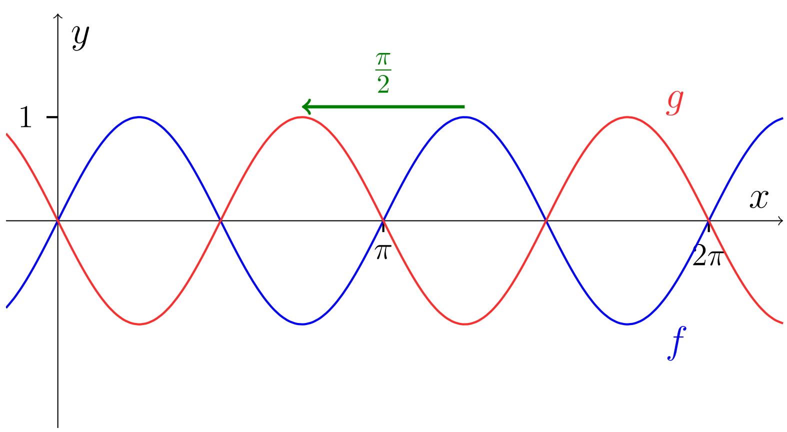
a) Bevis formlen. VINK: Du får brug for at inddrage formlen for vinkelfrekvens: $T = \frac{2\pi}{b}$.

Faseforskydningen

Faseforskydningen er konstanten c i den harmoniske svingning:

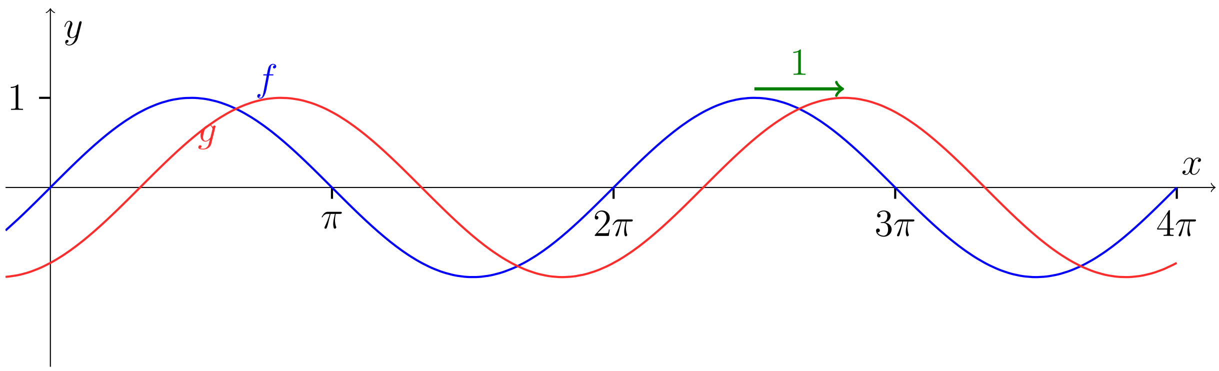
$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c).$$

Faseforskydningen forskyder grafen i vandret retning. Men forskydningen afhænger ikke kun af c. Den afhænger også af b. Grafen forskydes nemlig med $\frac{c}{b}$ til venstre. Hvis $c < 0$, får vi en negativ forskydning til venstre, hvilket selvfølgelig svarer til en positiv forskydning til højre. Så hvis f.eks. $c = \pi$ og $b = 2$ vil grafen blive forskudt med $\frac{c}{b} = \frac{\pi}{2}$ til venstre – altså i forhold til hvis c var nul.



Grafer for $f(x) = \sin(2x)$ og $g(x) = \sin(2x + \pi)$.

Hvis c er negativ bliver grafen forskudt til højre:

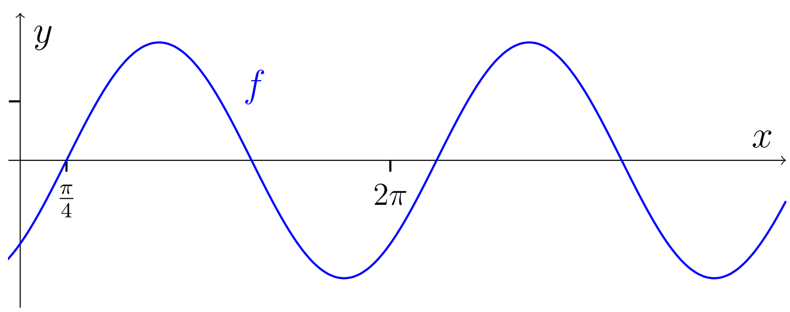


Grafer for $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = \sin(x-1)$.

Læg mærke til at når faseforskydningen er nul, så går grafen igennem $(0,0)$ og starter med at være voksende, så det er udgangspunktet, når vi skal finde ud af hvor meget grafen er forskudt.

Eksempel 6.5.5

Betragt den harmoniske svingning:



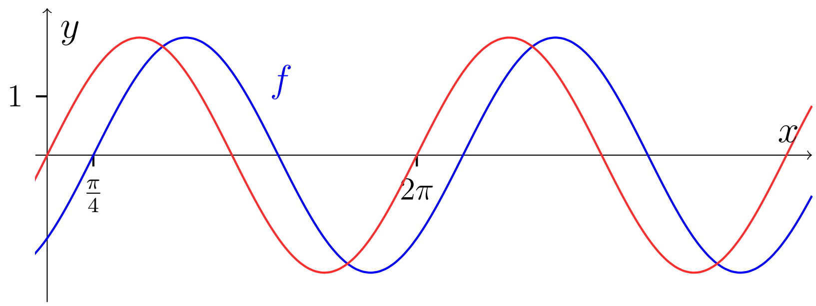
Vi vil bestemme faseforskydningen. Vi skal først bestemme b. Den kan vi finde ud fra perioden. Vi aflæser perioden til at være 2π. Vi ved ved at perioden er givet ved:

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Vi indsætter $T = 2\pi$ og isolere b: Det giver:

$$b = 1$$

Vi er nu klar til at finde faseforskydningen c. Vi tegner nu den samme harmoniske svingning ind, men denne gang forskyder vi den så den starter med at være voksende igennem $(0,0)$



Vi kan se at den blå graf er forskudt med $\frac{\pi}{4}$ til højre i forhold til den røde. Dvs. at

$$\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$$

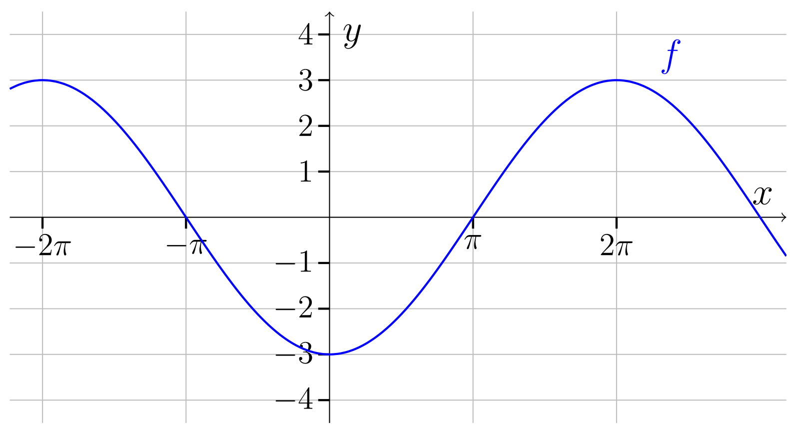
Læg mærke til det negative fortegn. Det er fordi det er en forskydning til højre. Vi har allerede bestemt $b = 1$:

$$\frac{c}{1} = -\frac{\pi}{4}$$

hvilket må betyde at $c = -\frac{\pi}{4}$.

Øvelse 6.5.7

Betragt grafen for en harmonisk svingning $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$.



a) Bestem amplituden

b) Bestem perioden

c) Beregn vinkelfrekvensen

d) Bestem faseforskydningen

Øvelse 6.5.8

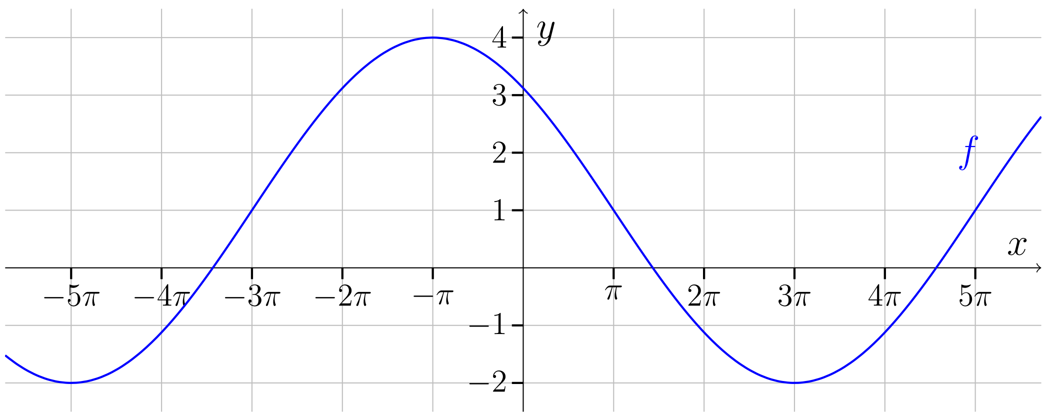
Harmoniske funktioner kan også defineres ved:

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$$

Vi ser at der i denne definition er lagt en konstant d til. Denne konstant kaldes *forskydningsaksen*.

a) Forklar betydningen af konstanten d. Hvis du er i tvivl om, hvordan du skal afgøre det, så husk på hvad der normalt sker med grafen for en funktion, når man lægger en konstant til.

b) Aflæs værdien af d på grafen:



c) Bestem perioden.

d) Bestem resten af konstanterne i forskriften.

e) Bestem frekvensen

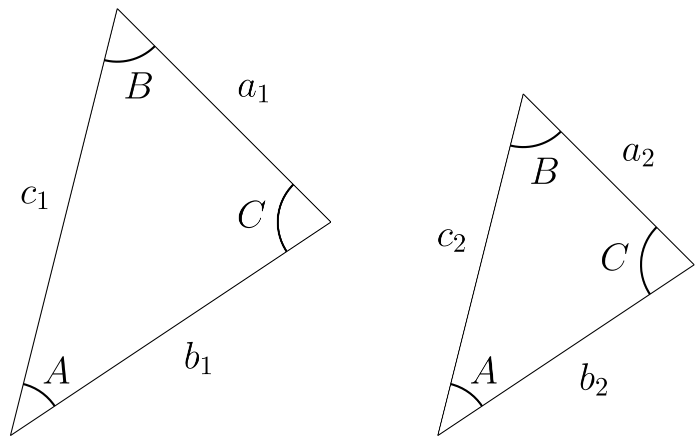
Ekstra

Uledning af formler for vinkler og sider i retvinklede trekanter

Man kan undre sig over, hvor sætning 6.5.1 kommer fra. De trigonometriske funktioner er jo defineret ud fra enhedscirklen og hvad har det med retvinklede trekanter at gøre? Lad os se på det. Først har vi brug for en sætning for ensvinklede trekanter:

Sætning 6.5.2

Lad der være givet to ensvinklede trekanter:



Da gælder:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}, \quad \text{og} \quad \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$$

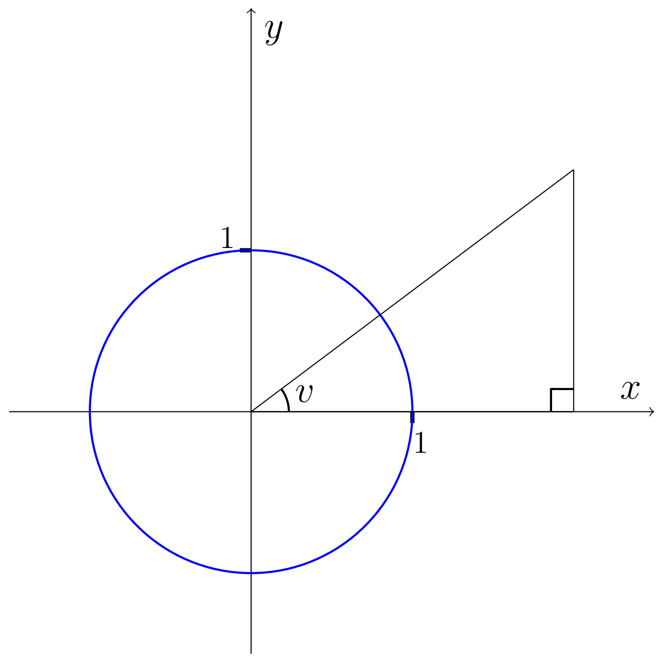
Vi vil ikke bevise sætningen, men den burde ikke være så overraskende.

Vi vil nu bevise påstanden:

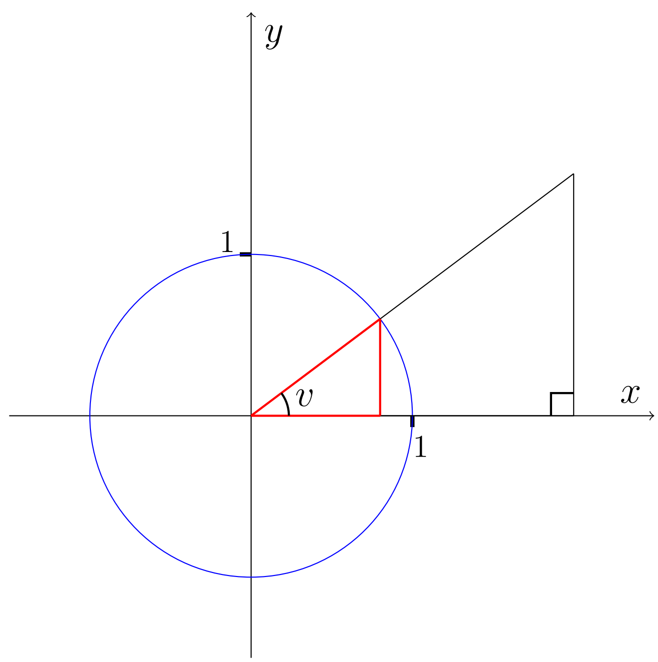
$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi starter med en enhedscirkel og en retvinklet trekant:

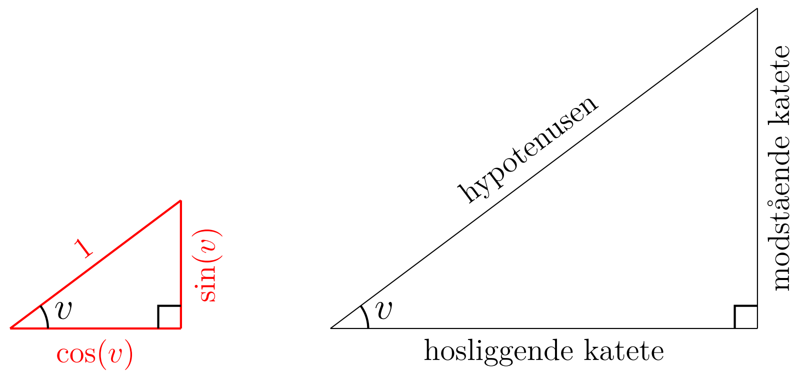
Vi flytter trekanten ind i enhedscirklen som vist her:



Ud fra retningspunktet for v tegner vi endnu en trekant



Vi har nu to ensvinklede trekanter. Da det øverste højre hjørne i den røde trekant er retningspunktet, må trekantens kateter have hhv. længderne $\cos(v)$ og $\sin(v)$. Hypotenusen i den røde trekant må være 1, da det jo er radius i enhedscirklen. Så de to trekanter ser således ud.



Da de to trekanter er ensvinklede kan vi bruge sætning 6.5.1. Vi får

$$\frac{\cos(v)}{1} = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi reducerer og får den ønskede formel

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Øvelse 6.5.9

Bevis formlerne (fremgangsmåden er tilsvarende den du lige har set.):

a) $\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$

b) $\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$

Sammenhæng mellem periode og vinkelfrekvens

Man kan regne perioden ud fra vinkelfrekvensen med formlen

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Vi vil nu udlede denne formel. Vi har den harmoniske svingning

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$$

Perioden er den (mindste) konstant T som opfylder:

$$f(x) = f(x + T)$$

Vi indsætter forskriften for f:

$$a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin(b(x + T) + c)$$

Vi regner parentesen inde i sinus på højresiden:

$$a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin(bx + bT + c)$$

Vi kan se at der står det samme på begge sider bortset fra størrelsen bT, som er lagt til inde i sinus funktionen på højresiden. Da sinus er periodisk med 2π, skal denne størrelse give 2π før at vi får det samme på begge sider af lighedstegnet. Dvs.

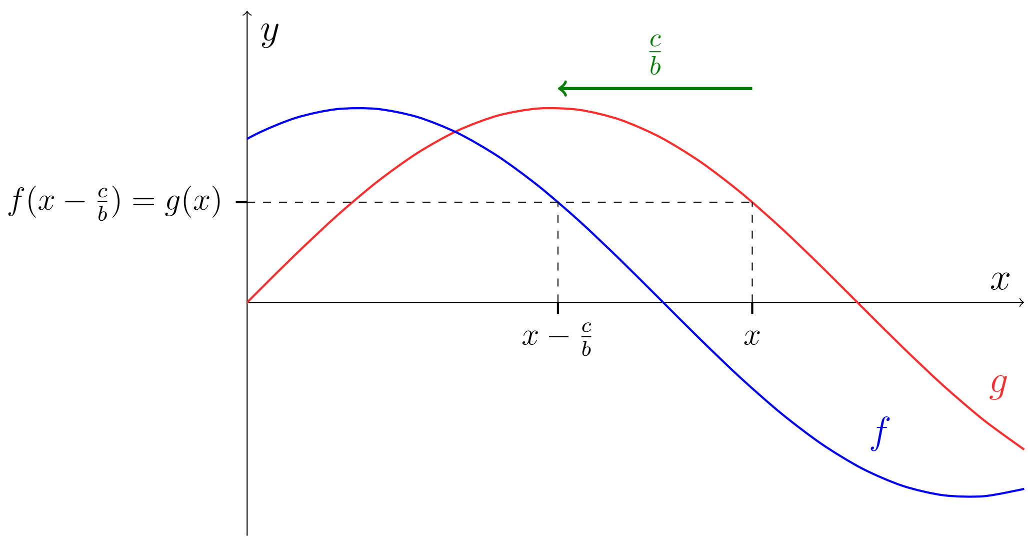
$$bT = 2\pi$$

Vi deler med b:

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Faseforskydning

Faseforskydningen forskyder grafen langs x-aksen. Mere præcist: Grafen for funktionen $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ fremkommer ud fra grafen for $g(x) = a \cdot \sin(bx)$ ved at forskyde g med $\frac{c}{b}$ til venstre, hvis $c > 0$. Vi vil nu vise dette. Vi starter med en illustration af påstanden:



Tegning viser at f er opstået ud fra g ved en vandret forskydning til venstre med $\frac{c}{b}$, hvis f opfylder $f(x - \frac{c}{b}) = f(x)$. Så vi skal altså eftervise at $f(x - \frac{c}{b}) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x - \frac{c}{b}) &= a \cdot \sin(b(x - \frac{c}{b}) + c) \\
&= a \cdot \sin(bx - b\frac{c}{b} + c) \\
&= a \cdot \sin(bx - c + c) \\
&= a \cdot \sin(bx) \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

Så jo, den var god nok. Grafen for f er opstået ud fra grafen for g ved at forskyde g med $\frac{c}{b}$ til venstre.

Øvelse 6.5.10 (Svær)

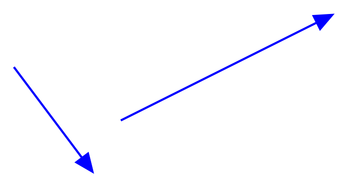
I ovenstående har vi taget udgangspunkt i en positiv faseforskydning, når vi tegnede grafen for f.

a) Hvordan kunne tegningen se ud, hvis c er negativ?

Kapitel 7

Vektorer

Vektorer på HHX er det som også går under navnet *euklidiske vektorer* og det handler om at regne med "pile". Altså sådan nogle:

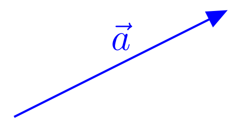


Man kan undrer sig over at den slags geometrisk pjat skulle være interessant for en HHX'er, men euklidiske vektorer viser sig at være indgangen til et mere generelt vektorbegreb, som ikke er udelukkende geometrisk, og som er meget anvendeligt. Vi holder os til det geometriske – som i øvrigt også er ganske anvendeligt (i naturvidenskab).

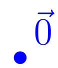
7.1 Introduktion til vektorer

Definition 7.1.1

En *vektor* er en størrelse, som har både en længde og en retning. En vektor tegnes som en pil, hvor pilens retning er vektorens retning, og pilens længde er vektorens længde.



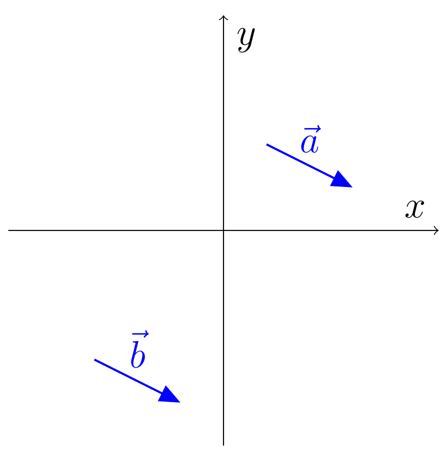
Vektoren på tegningen læses ”vektor a”. Der findes en særlig vektor som har en længde på nul, men ikke nogen retning. Den kaldes *nulvektoren*, betegnes med $\vec{0}$ og tegnes som en prik:



En vektor som **ikke** er nulvektoren kaldes en *egentlig vektor*.

Længen af $\vec{a}$ betegnes med $|\vec{a}|$.

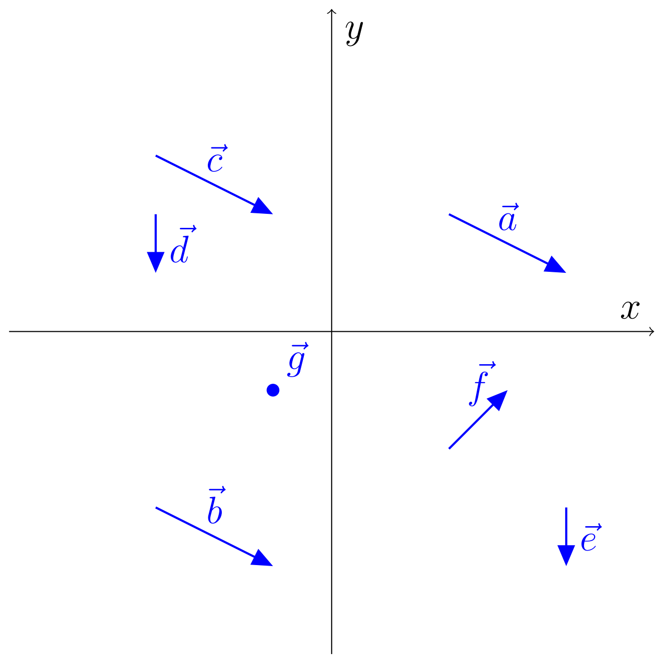
Vi tegner nogle gange vektorer ind i koordinatsystemer.



Her kunne det godt se ud som jeg har tegnet to forskellige vektorer, men fordi $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har samme størrelse og retning, så er de ens. Altså $\vec{a} = \vec{b}$. Man siger at de to pile er to forskellige *repræsentanter* for den samme vektor.

Øvelse 7.1.1

Betragt vektorerne



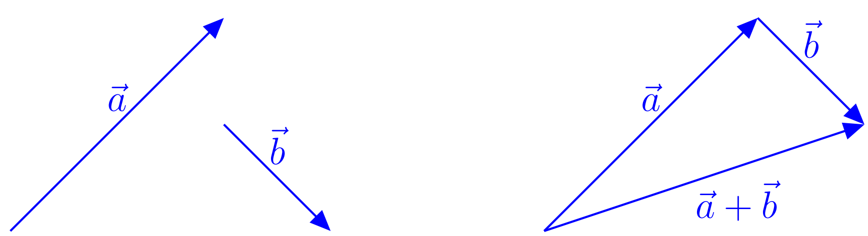
a) Hvor mange forskellige vektorer er der?

Regning med vektorer

Lad os se på hvordan vi regner med vektorer. Vi starter med addition.

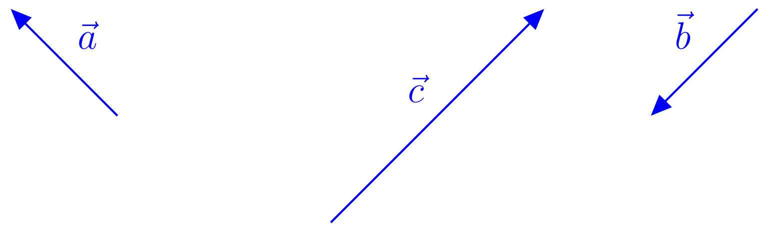
Definition 7.1.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer. Vi definere summen $\vec{a}+\vec{b}$ som den vektor man får, når man tegner $\vec{b}$ i forlængelse af $\vec{a}$ og tegner en pil fra begyndelsen af $\vec{a}$ til slutningen af $\vec{b}$.



Øvelse 7.1.2

Betragt vektorerne



Tegn vektorerne

a) $\vec{a} + \vec{b}$

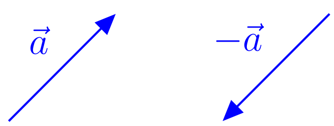
b) $\vec{a} + \vec{c}$

c) $\vec{b} + \vec{c}$

Har man en vektor, kan man danne en ny vektor ved at putte et minus på. Mere præcist har vi:

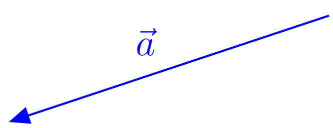
Definition 7.1.3

Lad $\vec{a}$ være en vektorer. Vi definere $-\vec{a}$ som den vektor som har samme længde men modsat retning som $\vec{a}$



Øvelse 7.1.3

Her er en vektor:



a) Tegn $-\vec{a}$.

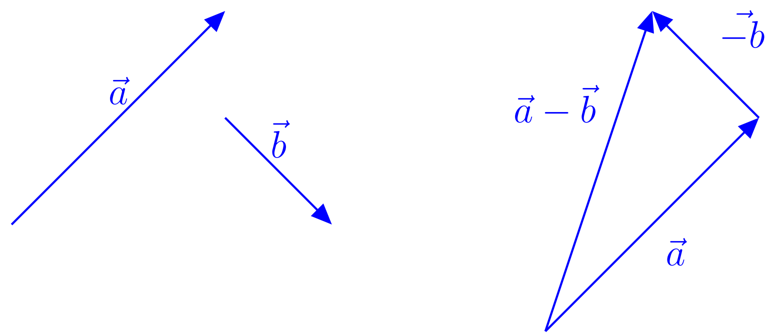
Når vi nu har negative vektorer er der en oplagt måde at definere subtraktion.

Definition 7.1.4

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer. Vi definerer $\vec{a} - \vec{b}$ ved

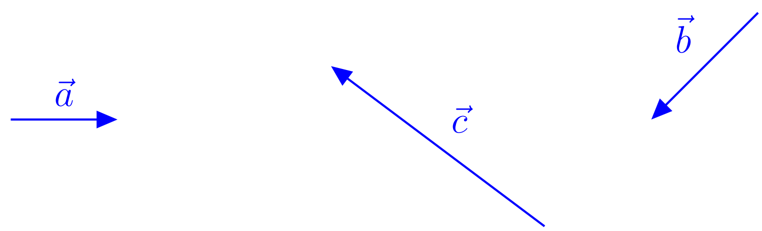
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

.



Øvelse 7.1.4

Betragt vektorerne



Tegn vektorerne

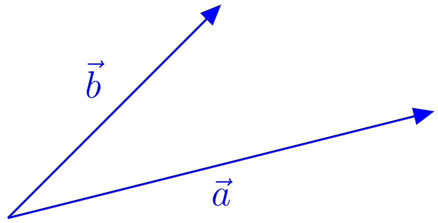
a) $\vec{a} - \vec{b}$

b) $\vec{b} - \vec{a}$

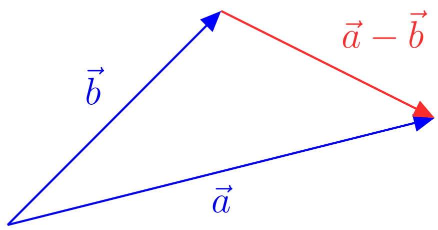
c) $\vec{b} - \vec{c}$

Øvelse 7.1.5

Betragt vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$:



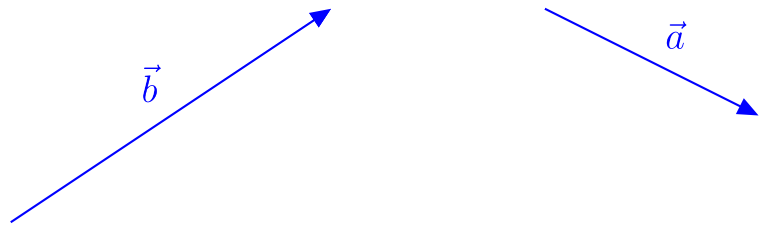
Man kan argumentere for at $\vec{a}-\vec{b}$ går fra spidsen af $\vec{b}$ til spidsen af $\vec{a}$ som vist her:



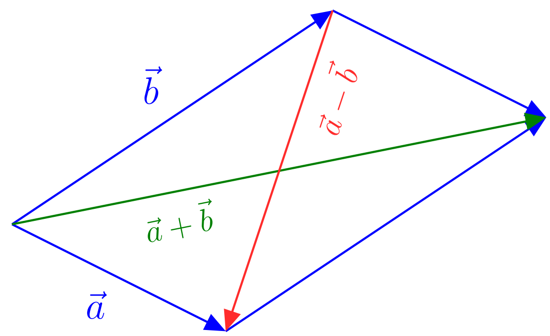
a) Forklar hvorfor $\vec{a}-\vec{b}$ går fra spidsen af $\vec{b}$ til spidsen af $\vec{a}$

Øvelse 7.1.6

Nogle bøger definere sum og differens af to vektorer lidt anderledes. Givet to vektorer



så defineres $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$ som diagonalerne i det parallelogram som udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som vist her:

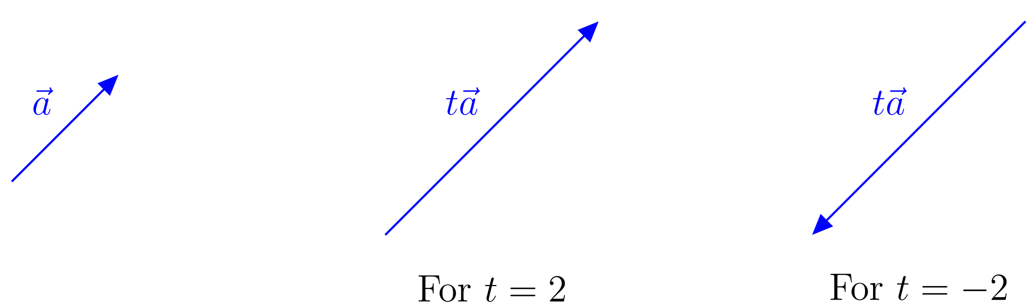


a) Gør rede for at denne definition giver samme vektor som definitionen fra her på mathhx.

Det var plus og minus, så mangler vi bare gange og dividere, right? Nej man kan ikke gange eller dividere to vektorer. Men man kan gange en vektor med et tal.

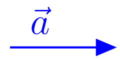
Definition 7.1.5

Lad $\vec{a}$ være en vektorer og t være et tal. Vi definere $t\vec{a}$ som den vektor som har samme retning men er t gange så lang som $\vec{a}$. Er t negativ, så er $t\vec{a}$ modsat rettet $\vec{a}$.



Øvelse 7.1.7

Her er en vektor:



a) Tegn vektoren $-3 \cdot \vec{a}$

Vi har brug for nogle regneregler for at gøre det nemmere at regne mere komplicerede udtryk.

Sætning 7.1.1

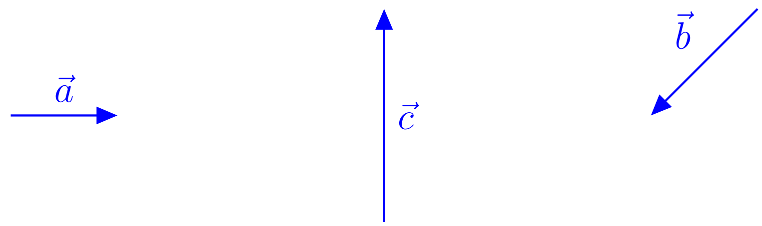
Der gælder følgende regnregler for vektorer

1. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$
5. $s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$
6. $1\vec{a} = \vec{a}$
7. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$
8. $(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$

Regnereglerne afspejler dem som vi kender for de reelle tal, og vi bruger sætningen til at sikre os at vi kan regne med vektorer som om de var tal – altså lige bortset fra at der ikke findes multiplikation/division mellem vektorer.

Øvelse 7.1.8

Betragt vektorerne



Reducer og tegn følgende vektorer

a) $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{a} - \vec{a} - 3\vec{a}$

b) $\vec{v} = \vec{b} + \vec{a} - 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{0} + \vec{a}$

c) $\vec{w} = \vec{a} + 2(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{c}$

Øvelse 7.1.9

Forklar følgende begreber:

a) Vektor

b) Nulvektor

c) Egentlig vektor

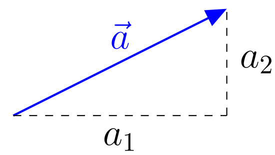
d) Repræsentant for en vektor.

7.2 Koordinater for vektorer

Indtil videre har der været en masse tegning og ikke så meget regning. Det skal der laves om på. Men skal vi regne med vektorer er vi nødt til at beskrive dem på en måde så man kan regne på dem. Det gør vi med koordinater.

Definition 7.2.1

En vektor $\vec{a}$ tildeles koordinater som vist på tegningen:

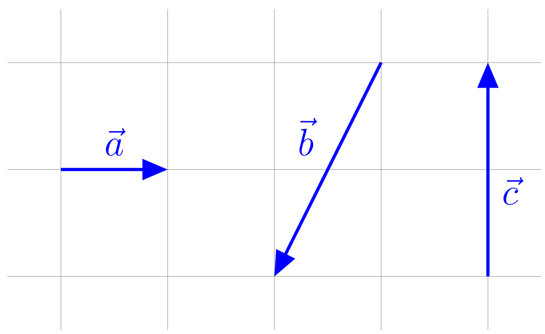


På tegningen er a_1 og a_2 positive. De kan også være negative, så går vi bare i den modsatte retning.

Vi skriver $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Eksempel 7.2.1

Betragt vektorerne



Vi aflæser at

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Øvelse 7.2.1

Betragt vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Tegn vektorerne.

Regning med koordinater fungerer helt som forventet:

Sætning 7.2.1

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Så er

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad t\vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Øvelse 7.2.2

Betragt vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Regn:

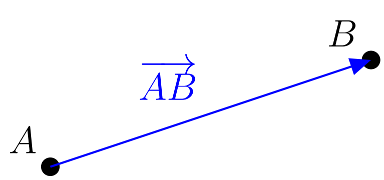
a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{a} - \vec{b}$

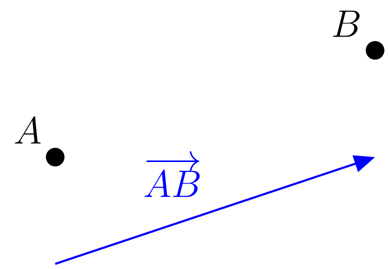
c) $2 \cdot \vec{a}$

Vektorer mellem punkter

Har vi to punkter A og B kan vi danne den vektor som går fra det ene punkt til det andet



Selvom vi omtaler $\overrightarrow{AB}$ som vektoren fra A til B, så husker vi, at en vektor ikke ligger noget bestemt sted. Vi kan også tegne $\overrightarrow{AB}$ som:



Selvom denne pil ikke går fra A til B har den samme længde og retning og derfor er det den samme vektor som før. Vi kan regne koordinater til $\overrightarrow{AB}$ med sætningen:

Sætning 7.2.2

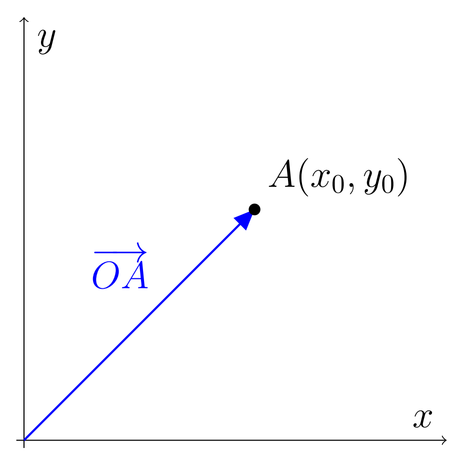
Lad

$$A = (x_1, y_1), \quad \text{og} \qquad B = (x_2, y_2)$$

Så er

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Har vi et punkt $A = (x_0, y_0)$, så har vi et særlig navn til vektoren som går fra origo (altså punktet $O = (0, 0)$) til A. Den hedder *stedvektoren* til A og betegnes $\overrightarrow{OA}$.



Ikke overraskende har stedvektoren til A samme koordinater som punktet A Det kan vi tjekke med sætning 7.2.2:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_0 - 0 \\ y_0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Øvelse 7.2.3

Lad $A = (2, -1)$ og $B = (3, 1)$. Bestem

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BA}$

c) Stedvektoren til A

Længden af en vektor

Længden af en vektor $\vec{a}$ betegnes med $|\vec{a}|$.

Sætning 7.2.3

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ være en vektor. Så er længden af $\vec{a}$ givet ved:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

Øvelse 7.2.4

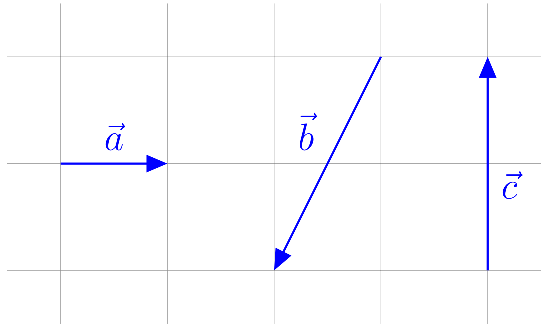
a) Bestem $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right|$

Øvelse 7.2.5

a) Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Bestem a_2 så $|\vec{a}| = 13$

Øvelse 7.2.6

Betragt vektorerne:



a) Bestem længden af $\vec{a}$.

b) Bestem længden af $\vec{b}$.

c) Bestem længden af $\vec{c}$.

7.3 Skalarprodukt og vinkel mellem vektorer

Man kan regne med vektorer som om det var tal – lige bortset fra at man ikke kan gange eller dividere to vektorer. I dette afsnit skal vi se på en operation mellem vektorer som minder lidt om at gange, men så alligevel ikke.

Definition 7.3.1

Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Så er *skalarproduktet* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ læses ”vektor a **prik** vektor b”. Så ikke noget med gange. Prik. Man har det med at komme til at sige gange. Så prik. Ikke gange. Prik. Vi bemærker at skalarproduktet er et tal – ikke en vektor. Skalarproduktet kaldes også *prikproduktet*.

Øvelse 7.3.1

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Øvelse 7.3.2

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Bestem a_1 så $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Der gælder følgende regneregler for skalarproduktet.

Sætning 7.3.1

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være tre vektorer og lad $t \in \mathbb{R}$. Så gælder:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Øvelse 7.3.3

Reducer:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a}$

b) $(2\vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{a})$

c) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - |\vec{a}|^2$

Øvelse 7.3.4 (Svær)

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

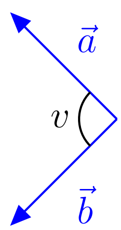
a) Bevis påstanden (brug regnereglerne, som du brugte i sidste øvelse også).

Så, skalarproduktet mellem to vektorer er altså et tal. Men hvad fortæller det tal så om de to vektorer? Fortolkningen af skalarproduktet har noget at gøre med *vinklen mellem de to vektorer.*

Vinklen mellem to vektorer

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$:

Så er vinklen mellem dem den vinkel man får, når man sætter de to vektorer så de har samme begyndelsespunkt som her:



Vinklen mellem to vektorer er den vinkel som ligger mellem 0° og 180°. Så det er ikke ligesom i enhedscirklen hvor man kan gå i begge retninger og snurre flere gange rundt. Når $v = 0$ har vektorerne samme retning og vi siger at de er *ensrettede*. Hvis $v = 90°$ står vektorerne vinkelret på hinanden og vi siger at de er *ortogonale*. Hvis $v = 180°$, så peger vektorerne i modsat regning og vi siger at de er *modsat rettede* (surprise). Hvis vektorerne er enten ensrettede eller modsat rettede siges de også at være *parallelle*

Øvelse 7.3.5

Tegn to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som er:

a) ensrettede

b) ortogonale

c) modsat rettede

d) parallelle, men ikke ensrettede.

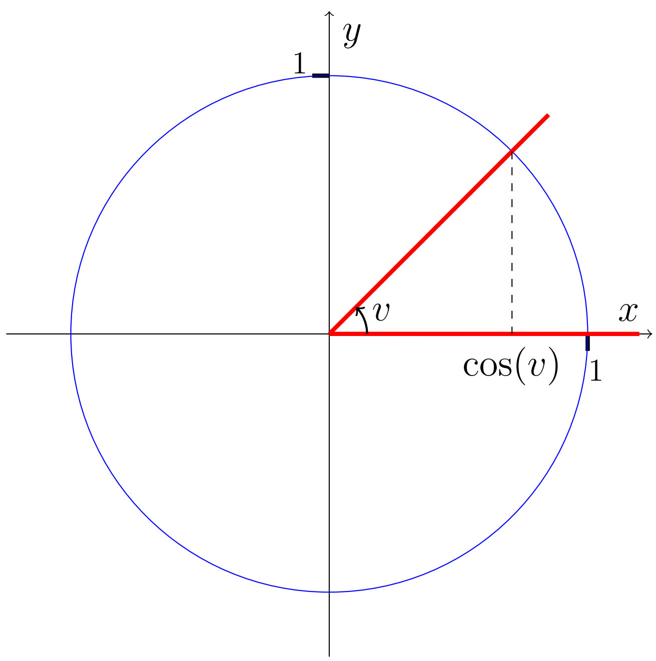
Følgende sætning kan gøre os klogere på, hvad skalarproduktet viser.

Sætning 7.3.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer og lad v være vinklen mellem de to vektorer. Så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v)$$

Vi graver en enhedscirkel frem så vi kan huske hvordan det er med cosinus:



Lad os se på nogle konkrete situationer. Vi starter med den situation hvor $v = 0$. Det er den når vektorerne er ensrettede. Ud fra enhedscirklen ser vi at $\cos(0°) = 1$. Så

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v) = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 1 = |\vec{a}||\vec{b}|$$

Så når vi har ensrettede vektorer, så er skalarproduktet altså bare de to vektorers længder ganget sammen. Hvis vi nu lader v vokse, kan vi se på enhedscirklen at

$\cos(v)$ bliver mindre. Dvs. skalarproduktet må blive mindre. Når vi kommer på på $v = 90°$ er $\cos(v) = 0$ og derfor bliver

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(v) = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

Så ortogonale vektorer har et skalarprodukt på 0. Lader vi vinklen komme over 90° kommer $\cos(v)$ under 0 og skalarproduktet begynder dermed at blive negativt og jo større v bliver jo mindre bliver skalarproduktet. Når vinklen når helt op på 180° er vektorerne modsat rettede og skalarproduktet bliver:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(v) = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot (-1) = -|\vec{a}||\vec{b}|$$

Så skalarproduktet er altså produktet af længderne ganget med en faktor som udtrykker i hvilken grad de to vektorer peger i samme regning. Denne faktor er 1 når de har samme retning, -1 når de er modsat rettede og ellers et sted imellem.

Øvelse 7.3.6

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som opfylder at $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ og vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 60°.

a) Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Øvelse 7.3.7

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som opfylder at $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 1$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

a) Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Øvelse 7.3.8

Betragt vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

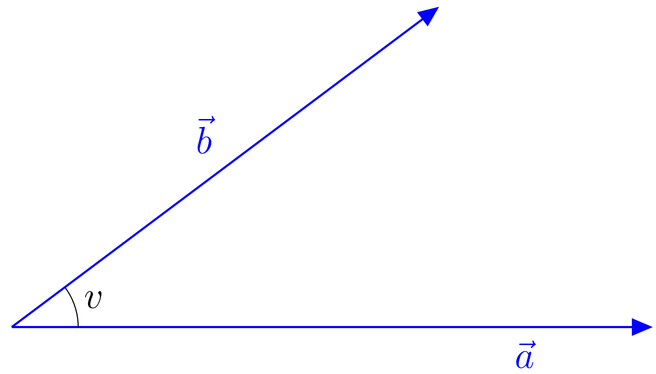
a) Bestem vinklen mellem vektorerne

VINK: Start med regn længderne og skalarproduktet inden du tænker på vinklen.

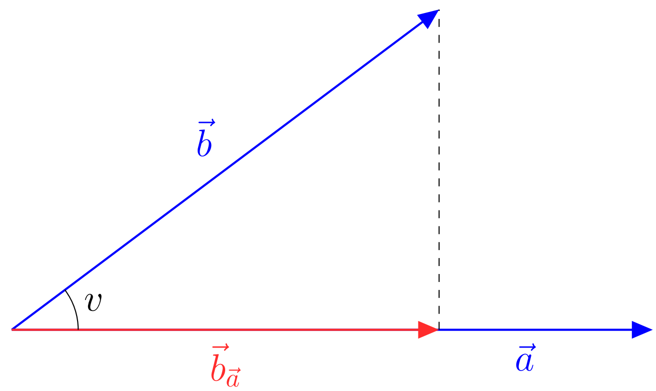
Ekstra

I dette afsnit vil vi se på hvordan vi kan blive endnu mere præcise i vores forklaring af betydningen af skalarproduktet.

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, hvor vinklen mellem dem er under 90°:



Vi indtegner nu en vektor $\vec{b}_{\vec{a}}$ kaldet *vektor b's projektion på vektor a* ved at gå fra $\vec{b}$'s slutpunkt til vinkelret ned på $\vec{a}$ som vist her:



Vi vil nu vise at skalarproduktet er givet ved

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|$$

På tegningen kan vi se en trekant med siderne $\vec{b}$, $\vec{b}_{\vec{a}}$ og den stiplede linje. Vi husker fra folkeskolen at

$$\cos(v) = \frac{|\vec{b}_{\vec{a}}|}{|\vec{b}|}$$

Ganger vi med $|\vec{b}|$ på begge sider får vi:

$$|\vec{b}_{\vec{a}}| = |\vec{b}| \cos(v)$$

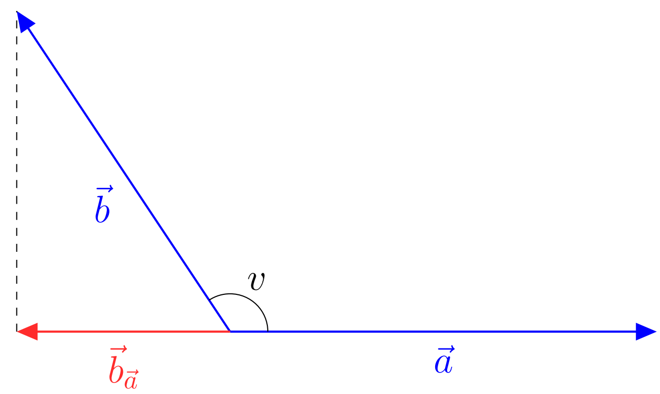
Vi bruger nu sætning sætning 7.3.2 og får

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v) = |\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|$$

Altså

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|$$

Så hvis $v < 90°$ er skalarproduktet altså længden af den første vektor ganget med længden af den andens vektors projektion på den første. Når $v > 90°$ ser projektionen således ud:



Ved at tilpasse ovenstående argumenter kan man vise at der i dette tilfælde gælder:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|.$$

Så her er skalarproduktet altså **minus** længden af den første vektor gange længden af den andens vektors projektion på den først.

Øvelse 7.3.9 (Svær)

a) Vis at hvis $v > 90°$, så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|.$$

VINK: Du får brug for formlen $\cos(180° - v) = -\cos(v)$ (hvorfor er den rigtigt?)

Øvelse 7.3.10

Tegn vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Regn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ud fra formlen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|$ og din tegning ,

Øvelse 7.3.11

Tegn vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Kom med et ca. bud på skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ved hjælp af aflæsning på din tegning og formlen $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|$.

7.4 Tværvektor og arealer

Definition 7.4.1

For en vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

defineres dens *tværvektor* $\hat{\vec{a}}$ ved

$$\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Vektoren $\hat{\vec{a}}$ læses *vektor a hat* eller *tværvektor a*

Øvelse 7.4.1

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem $\hat{\vec{a}}$

Øvelse 7.4.2

a) Bevis at $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$.

VINK: Lad

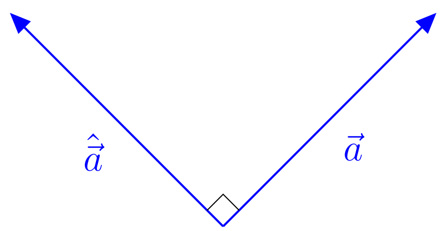
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

og regn $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a}$ og $-\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$ og tjek at det giver det samme.

Betydningen af tværvektoren fremgår af følgende sætning

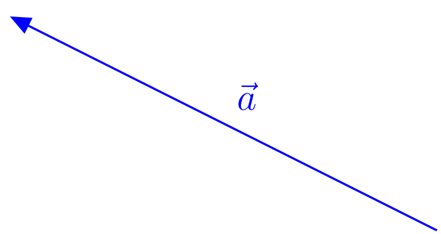
Sætning 7.4.1

For en egentlig vektor $\vec{a}$ fremkommer $\hat{\vec{a}}$ ved at rotere $\vec{a}$ med 90° mod uret.



Øvelse 7.4.3

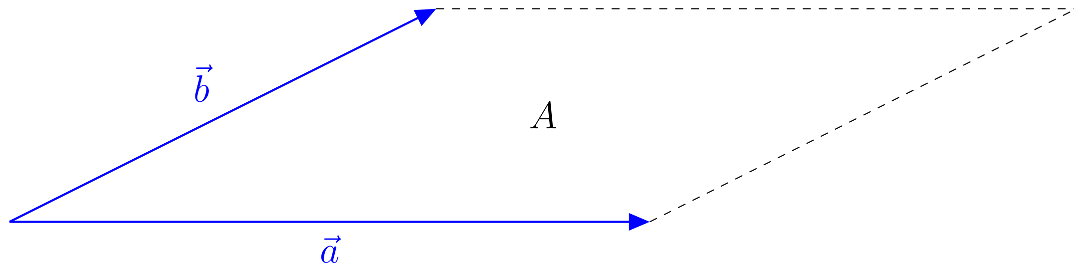
Betragt vektoren



a) Brug sætning 7.4.1 til at tegne $\hat{\vec{a}}$.

Areal af parallelogram udspændt af to vektorer

Vi skal nu se hvordan man kan bestemme arealet A af det parallelogram som udspændes af to vektorer:



Sætning 7.4.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Da er arealet A af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

.

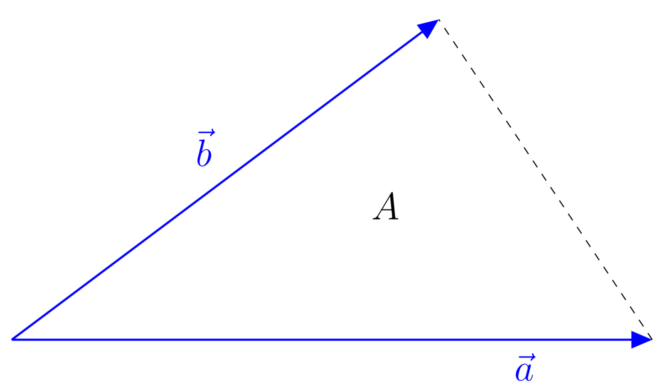
Øvelse 7.4.4

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem arealet A af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Man kan også snakke om arealet af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Det er altså arealet A:



Sætning 7.4.3

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Da er arealet A af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$A = \frac{1}{2}|\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

Øvelse 7.4.5

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem A arealet af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Øvelse 7.4.6

a) Bevis sætning 7.4.3 ud fra sætning 7.4.2.

7.5 Beviser - Vektorer

Sætning 7.3.1

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være tre vektorer og lad $t \in \mathbb{R}$. Så gælder:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Bevis

Vi får brug for at regne på vektorernes koordinater så lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Vi beviser den første regel, nemlig at $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Vi beviser reglen ved at regne hver side af lighedstegnet for sig, og så sammenligne resultaterne.

Vestre side først:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 a_b$$

Så højre side

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2$$

Vi kan se at de to sider er ens. Se nedenstående øvelse for resten af beviset.

I de følgende øvelser skal du bevise resten af sætning 7.3.1. Du kan bruge samme fremgangsmåde som i beviset for den 1. regneregel.

Øvelse 7.5.1

a) Bevis den 2. regneregel i sætning 7.3.1.

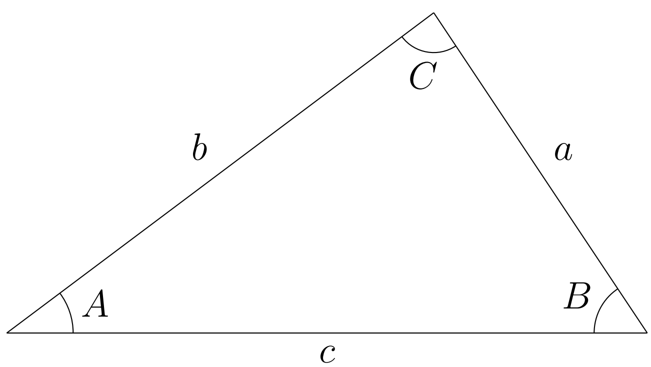
Øvelse 7.5.2

a) Bevis den 3. regneregel i sætning 7.3.1.

Øvelse 7.5.3

a) Bevis den 4. regneregel i sætning 7.3.1.

I det næste bevis skal vi bruge en resultat for trekanter kaldet *cosinusrelationerne*. Hvis vi har en vilkårlig trekant:



så gælder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Det hedder cosinusrelation**erne**, fordi vi kan skrive tilsvarende ligninger op for de andre sider. Vi vil ikke bevise cosinusrelationerne, så vi må håbe de er rigtige.

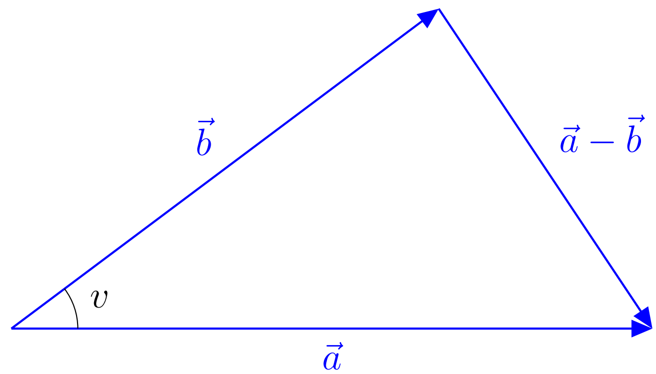
Sætning 7.3.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer og lad v være vinklen mellem de to vektorer. Så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v)$$

Bevis

Vi starter med at tegne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og $\vec{a} - \vec{b}$:



Vi regner nu $|\vec{a}-\vec{b}|^2$ med to metoder.

Første metode: Vi bruger regnereglen: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} \end{aligned}$$

Anden metode: Vi bruger cosinusrelationerne:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(v)$$

De to røde resultater fra de to metoder er begge lig med $|\vec{a}-\vec{b}|^2$, derfor må de være ens:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(v)$$

Vi trækker $|\vec{a}|^2$ og $|\vec{b}|^2$ fra på begge sider

$$-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(v)$$

og dividerer med -2 på begge sider

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(v)$$

og det var det vi ville vise.

Sætning 7.4.2

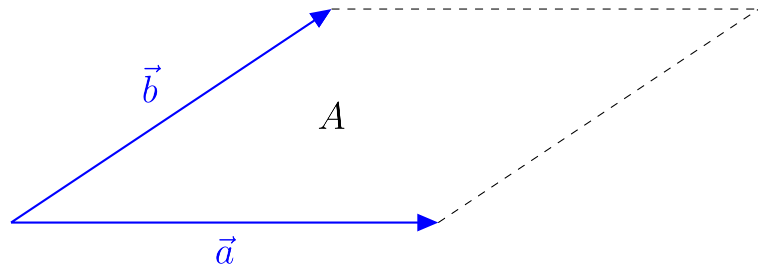
Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Da er arealet A af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

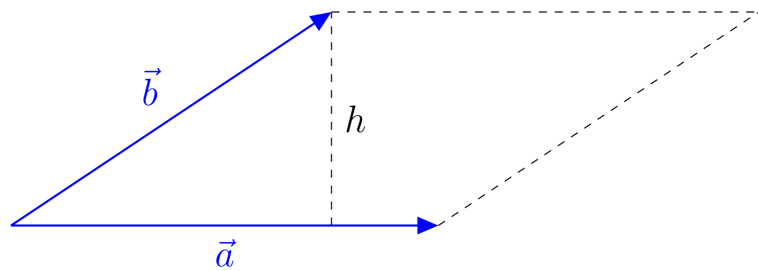
.

Bevis

Vi skal bestemme arealet A her:



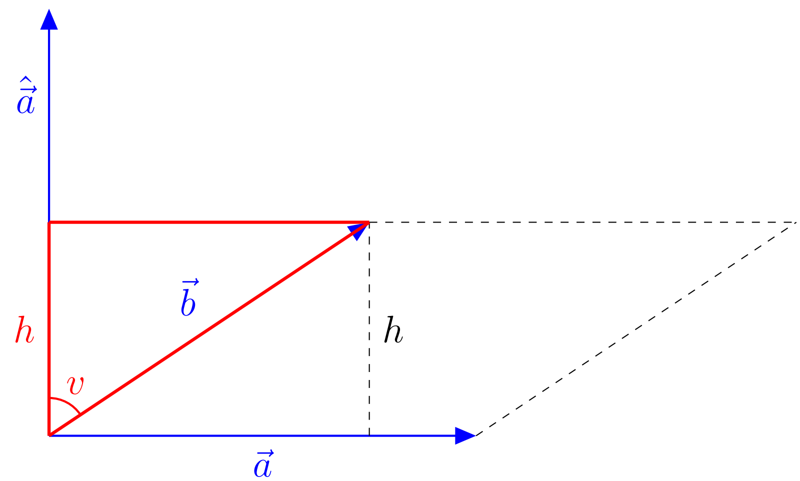
Arealet af et parallelogram er givet ved grundlinje gange med højde. Vi indtegner derfor højden h på tegningen:



Som skrevet, arealet er givet ved grundlinje gange højde. Grundlinjen må være $|\vec{a}|$ så

$$A = |\vec{a}| \cdot h$$

Vi vil nu finde et udtryk for højden. Til det formål indtegner vi et vandretlinjestykke fra øverste venstre hjørne af parallelogrammet ind til tværvektoren. Vi får så en trekant som jeg har markeret med rød. Vi tegner også $\hat{\vec{a}}$ og vinklen mellem $\hat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$.



Højden h kan vi bestemme med lidt folkeskolematematik. Vi husker, at i en retvinklet trekant, er cosinus til en vinkel lig med hosliggende katete delt med hypotenusen, så

$$\cos(v) = \frac{h}{|\vec{b}|}$$

og der med er

$$h = |\vec{b}| \cdot \cos(v).$$

Vi kan nu indsætte dette udtryk for højden i formlen for arealet

$$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

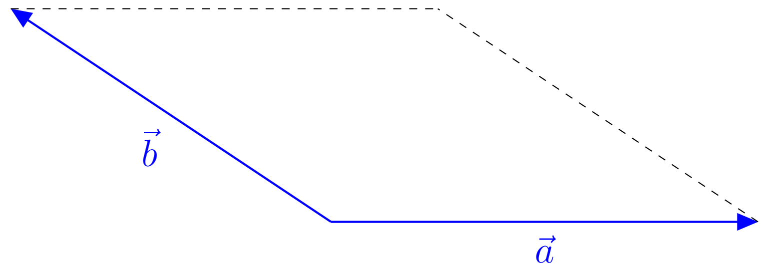
Det ligner jo fuldstændigt et skalarprodukt, men det er det ikke. Vinklen v er nemlig ikke vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Vi udskifter nu $|\vec{a}|$ med $|\hat{\vec{a}}|$. Det kan vi da vi ved at $\hat{\vec{a}}$ fremkommer ved en rotation af $\vec{a}$ og derfor må de to vektorer være lige lange.

$$A = |\hat{\vec{a}}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

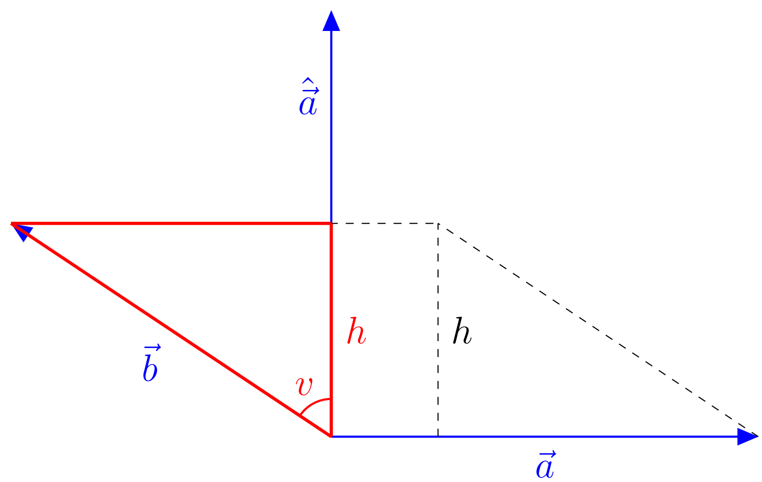
Nu kan vi omskrive det til et skalarprodukt. Vinklen v er nemlig vinklen mellem $\hat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$, så vi kan bruge sætning 7.3.2:

$$A = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$$

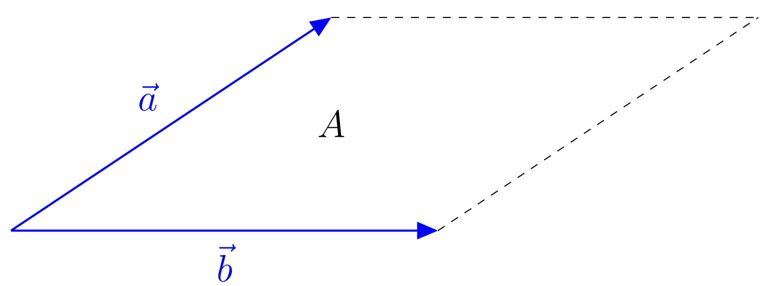
Vi skulle egenligt vise at $A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$, men ud fra vores bevis kunne det godt se ud som om, det ikke er nødvendigt at tage den nummeriske værdi. Det er lidt en snyder. Problemet er, at vi er kommet til at antage noget om vektorernes placering da vi lavede vores tegning. Vi kan se at vores tegning kun kan lade sig gøre, når vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ liger mellem 0 og 90°. Så lad os se hvad der sker når vinklen er større end 90°:



Vi laver nu den tilsvarende konstruktion:



Det viser sig at vi kan opskrive præcis de samme ligninger som før (tjek det). Så også her er $A = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$. Vi har nu dækket alle muligheder for vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, men ud over vinklen er der også noget andet som ville give problemer med tegningen. Hvad hvis nu at der var byttet rund på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som her:



Vi kan være snedige at bruge det vi allerede har vist, bare hvor vi har byttet rundt på $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Altså $A = \hat{\vec{b}} \cdot \vec{a}$. Man kan vise (se øvelse 7.4.2) at $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$, så i alt giver det:

$$A = \hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$$

Så alt efter vektorernes relative placering har vi altså

$$A = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} \quad \text{eller} \quad A = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$$

Vi tager nu den nummeriske værdi på begge sider i de to ligninger

$$|A| = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}| \quad \text{eller} \quad |A| = |-\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

Da A er et areal er det et positivt tal, så $|A| = A$. Vi får altså

$$A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}| \quad \text{eller} \quad A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

Men det er jo bare det samme som at sige:

$$A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

Facitliste

Løsning 1.1.1

a) Ja

b) Nej

Løsning 1.1.2

a) $F(x) = x^2 + x$

b) $F(x) = x^3 - \frac{1}{6}x^6 + 2x$

Løsning 1.1.3

a) $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

Løsning 1.1.4

a) $F(x) = 2x^2 - x + 2$

Løsning 1.1.5

a) $F(x) = e^x + x^2 - 8$

Løsning 1.1.6

a) $F(x) = x - \ln(|x|) + c$

b) $c = 1$

c) $F(x) = x - \ln(|x|) + 1$

Løsning 1.2.1

a) 5^x

b) x

c) c

Løsning 1.2.2

a) $\int 2x\,dx = x^2 + c$

b) $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + c$

Løsning 1.2.3

a) $\int 2t^4\,dt = \frac{2}{5}t^5 + c$

b) $\int \sqrt{u} + 10\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + 10u + c$

Løsning 1.2.4

a) Vi bruger regel 2 og får $\int x^2 + 2x\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + c$

b) Vi bruger regel 1 og får $\int 5e^x\,dx = 5e^x + c$

c) Vi bruger først regel 3, så regel 2 og til sidste regel 1 og får $\int 4x^3 + 5^x - 1\,dx = x^4 + \frac{5^x}{\ln(5)} - x + c$

d) Vi skriver først integralet som $\int 5\frac{1}{x}\,dx$. Så bruger vi regel 1 og får $\int 5\frac{1}{x}\,dx = 5\ln(|x|) + c$

Løsning 1.3.1

a) Ja det giver det samme.

b) Det betyder ikke noget hvilken en stamfunktion man vælger da de kun afviger fra hinanden med en konstant og denne konstant går ud når man regner $F(b) - F(a)$.

Løsning 1.3.2

a) $\int_2^3 3x^2\,dx = 19$

b) $\int_{-2}^5 (6t - 2)\,dt = 49$

c) $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1 \approx 1{,}72$

d) $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{u}\,du = -1$

e) $\int_2^{-1} 5\,dx = -15$

Løsning 1.3.3

a) $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 18{,}13.$

Løsning 1.3.4

a) $\int_{2}^{7} 3 \cdot f(x)\,dx = 30$

b) $\int_{4}^{7} f(x) - 2\,dx = -3$

c) $\int_{7}^{2} f(x)\,dx = -10$

d) $\int_{5}^{5} f(x)\,dx = 0$

e) $\int_{2}^{4} f(x)\,dx = 7$

Løsning 1.4.1

a) $\int (x^3-1)^2 \cdot 3x^2\,dx = \frac{1}{3}(x^3-1)^3 + c$

b) $\int e^{2x+1} \cdot 2\,dx = e^{2x+1} + c$

c) $\int 4x \cdot \sqrt{2x^2+1}\,dx = \frac{2}{3}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$

d) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = e^{\sqrt{x}} + c$

Løsning 1.4.2

a) $\int \sqrt{x^2+1} \cdot x\,dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$

b) $\int 2^{3x+1}\,dx = \frac{2^{3x+1}}{3\ln(2)} + c$

c) $\int \frac{12x}{3x^2+1}\,dx = 2\ln(|3x^2+1|) + c$

Løsning 1.4.3

a) $\int_{-2}^{2} (x^2-1)^7 \cdot 2x\,dx = 0$

b) $\int_{-1}^{3} e^{-2x+3}\,dx = 74{,}18$

c) $\int_{2}^{8} \frac{2\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx = 3{,}23$

Løsning 1.4.4

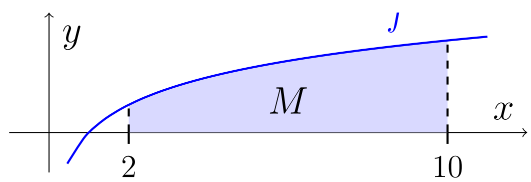
a) Kuk kuk?

Løsning 1.5.1

a) $A = \frac{7}{6} \approx 1{,}17$

Løsning 1.5.2

a)

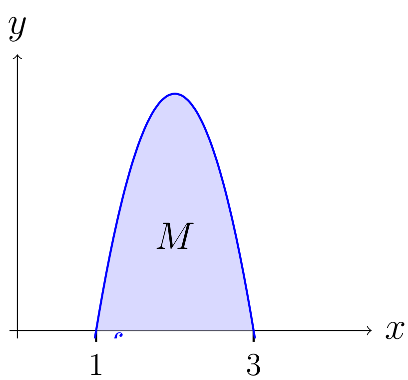


b) $A = 13{,}64$

Løsning 1.5.3

a) $x_1 = 1$, $x_1 = 3$

b)



c) $A = 4$

Løsning 1.5.4

a) $k = 9$

Løsning 1.5.5

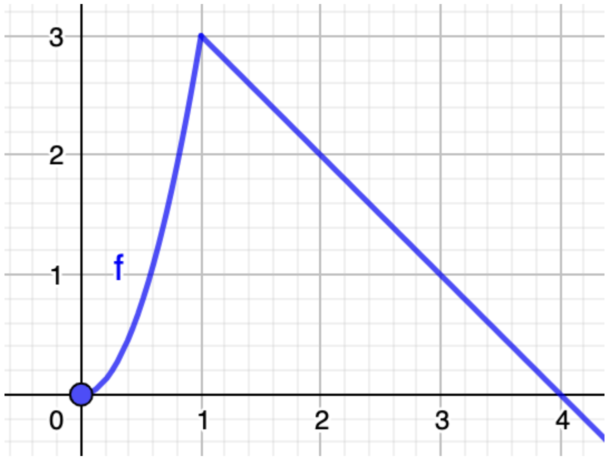
a) $k = \ln(4) \approx 1{,}39$

Løsning 1.5.6

a) $a = 3$

Løsning 1.5.7

a)



b) $A = 5{,}5$

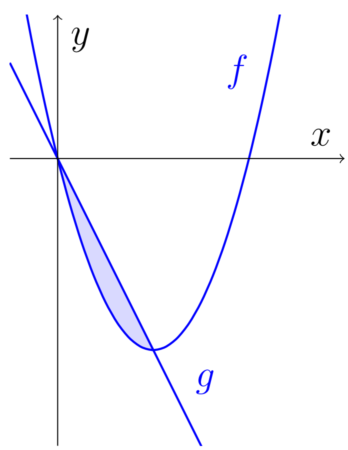
Løsning 1.5.8

a) $x_1 = -2$ og $x_2 = 2$

b) $A = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$

Løsning 1.5.9

a) Det markerede område er M:

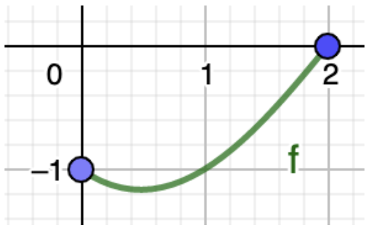


b) $A = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$

Løsning 1.5.10

a) $x_1 = 2$.

b) Graf:



c) $A = 1{,}66$

d) Ja det passer da meget godt.

Løsning 1.5.11

a) Arealet er 3,28.

Løsning 1.5.12

a) Du skal faktorisere. Sæt x ud foran en parentes og brug nulreglen.

b) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 1$

c) Arealet er $\frac{5}{2} = 2{,}5$

Løsning 1.5.13

a) Arealet er 5.

Løsning 1.5.14

a) $\int_0^{1,5} f(x)\,dx \approx 1$

b) $\int_{1,5}^{3} f(x)\,dx \approx -1$

c) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx \approx 0$

d) $\int_3^{1,5} f(x)\,dx \approx 1$

Løsning 1.5.15

a) $\int_{-4}^{-2}(-2x^3e^x - 1)\,dx \approx 3$

b) $\int_{-9}^{-5}(-2x^3e^x - 1)\,dx \approx -1$

c) $\int_{-5}^{-9}(-2x^3e^x - 1)\,dx \approx 1$

Løsning 1.6.1

a) $F(x) = e^x \cdot (x - 1)$

Løsning 1.6.2

a) $\int \sqrt{x+1}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x+1) + c$

Løsning 1.6.3

a) $F(x) = \ln(|x|) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

Løsning 1.6.4

a) $\int_3^7 \frac{\ln(x)}{x}\, dx = 1{,}29$

Løsning 1.6.5

a) $A = 1{,}47$

Løsning 1.6.6

a) Arealet er 3,08

Løsning 1.6.7

a) Kommandoen hedder `NBeregn`. Forskellen er at `Beregn` forsøger at finde en eksakt løsning (f.eks. på form som en brøk eller en kvadratrod), mens `NBeregn` finder en decimaltalsløsning (f.eks. ”2,45). Kommandoen `Beregn` er finere, hvis man er en rigtig matematiker, men det vi jo ikke, så bare brug `NBeregn`.

b) $k = 0{,}69$

Løsning 1.6.8

a) Punktmængden M hare et areal på 0,44

Løsning 1.7.1

a) Du viser den til mig.

Løsning 1.7.2

a) Vis mig det.

Løsning 1.7.3

a) **Regel 3:** Vi skal vis at

$$\int (f(x) - g(x))\ dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Vi differentierer højresiden:

$$\left(\int f(x)\,d - \int g(x)\,dx\right)'$$

Vi opdeler differentiationen i to:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' - \left(\int g(x)\,dx\right)'$$

Differentiation ophæver integration:

$$f(x) - g(x)$$

og vi har altså vist at $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ er stamfunktion $f(x) - g(x)$, så regel 2 er bevist.

Løsning 1.7.4

a) Du forklarer det til mig.

Løsning 1.7.5

a) Fremlæg dem for mig

Løsning 2.1.1

a) Differentialligning

b) Differentialligning

c) Ikke en differentialligning

d) Ikke en differentialligning

Løsning 2.1.2

a) Ikke løsning

b) Er løsning

c) Ikke løsning

d) Er Løsning

Løsning 2.1.3

a) f er løsning.

b) f er løsning.

c) f er ikke løsning.

d) f er løsning.

Løsning 2.1.4

a) $k = 3$

Løsning 2.1.5

a) $a = -8$.

Løsning 2.1.6

a) Jes

b) yesssss

Løsning 2.1.7

a) ...

b) ...

c) ...

Løsning 2.1.8

a) Yes du.

Løsning 2.2.1

a) $y = 3x + c$

b) F.eks. $f(x) = 3x$ og $g(x) = 3x + 1$

Løsning 2.2.2

a) $y = c \cdot e^{5x}$

b) $y = \frac{2}{3} + c \cdot e^{-3 \cdot x}$

c) $y = \frac{100}{1+c \cdot e^{-400x}}$

d) $y = x \ln(x) + c$

Løsning 2.2.3

a) $y = -\frac{3}{2} + c \cdot e^{2x}$

b) $y = c \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + c$

Løsning 2.2.4

a) $f(x) = x^2 - x - 2$

Løsning 2.2.5

a) $f(x) = 3e^{7x}$

b) $f(x) = \frac{400}{3e^{-800x}+1}$

Løsning 2.2.6

a) $f(x) = 10e^{3x}$

b) $f(x) = 11e^{x} - 9$

c) $f(x) = \frac{(4x+8)^{11}}{44}$

d) $f(x) = \frac{30}{2e^{-20x}+3}$

Løsning 2.3.1

a) $y = \frac{1}{c-x^2}$ måske har I $y = \frac{1}{-c-x^2}$ eller $y = -\frac{1}{c+x^2}$. Det er også i orden.

Løsning 2.3.2

a) $y = \ln(e^x + c)$

Løsning 2.3.3

a) $y = \sqrt[3]{x^2 + c}$

Løsning 2.3.4

a) $y = \frac{1}{2}\ln(3x^2 + c)$. Måske har du $y = \frac{1}{2}\ln(3x^2 + 2c)$, hvilket også er i orden.

Løsning 2.3.5

a) $y = \frac{1}{c - \frac{1}{2}x^2}$

b) $y = \frac{-2}{x^2 - 6}$. Måske har du $y = \frac{1}{3 - \frac{1}{2}x^2}$, hvilket også er ok.

Løsning 2.3.6

a) $y = -\sqrt{2e^x + 14}$

Løsning 2.3.7

a) $y = 6e^{\frac{1}{2}x^2 + 2x} - 5$. Måske har I $y = e^{\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln(6)} - 5$, hvilket også er ok.

b) $y = 4e^{\frac{1}{2}x^2 + 2x} - 5$. Måske har I $y = e^{\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln(4)} - 5$, hvilket også er ok.

Løsning 2.3.8

a) $y = -2\sqrt{x^3 - 4}$ eller måske har du $y = -\sqrt{4x^3 - 16}$, hvilket også er ok.

b) $y = -11e^{-x} + 4$

c) $y = x^4 + 2x^2 + 1$

Løsning 2.3.9

a) $y = -2\sqrt{x^3 - 4} \quad , \quad x > \sqrt[3]{4}$

b) $y = -11e^{-x} + 4 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

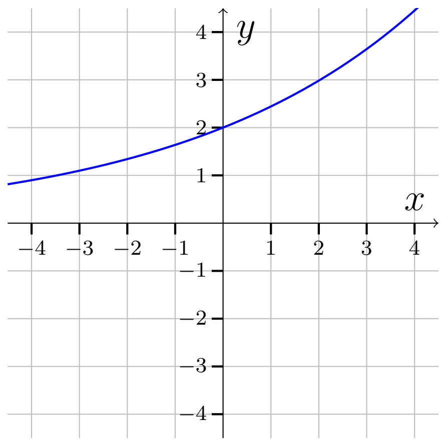
c) $y = x^4 + 2x^2 + 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

d) $y = -x^2 + 1 \quad , \quad -1 < x < 1$

Løsning 2.4.1

a) $y = ce^{\frac{1}{5}x}$

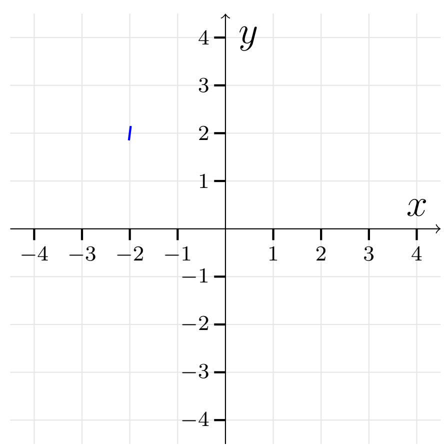
b) Løsningskurve gennem punktet $P(0, 2)$:



Løsning 2.4.2

a) $(-2, 2; 8)$

b) Linjeelement gennem $P(-2, 2)$:



Løsning 2.4.3

a) $(2, -3; 0)$

Løsning 2.4.4

a) $(\frac{1}{4}, 1; 2)$

Løsning 2.4.5

a) $y = 4x + 14.$

Løsning 2.4.6

a) $y = 3x - 13$

Løsning 2.4.7

a) $y = 2x - 11$

Løsning 2.4.8

a) $(4, 0; 3)$

b) $y = 3x - 12$

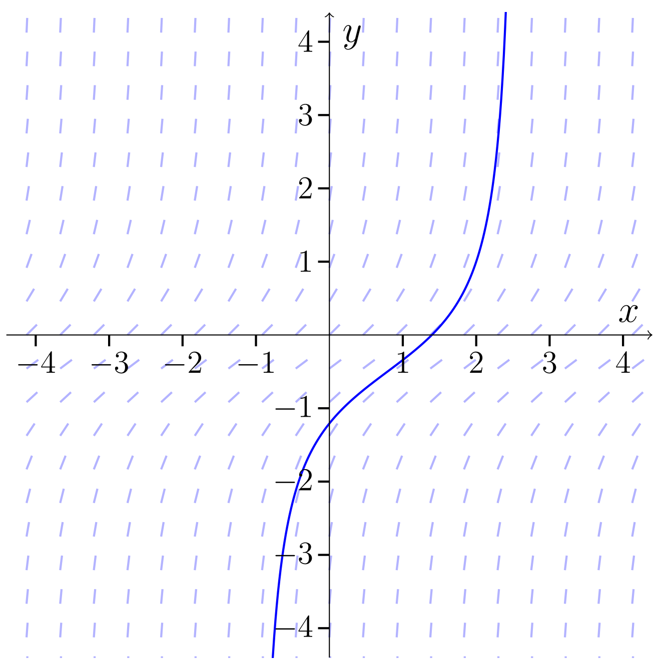
Løsning 2.4.9

a) $y = x - 1$.

b) Det er det selvfølgelig.

Løsning 2.4.10

a) Løsningskurve:



Løsning 2.4.11

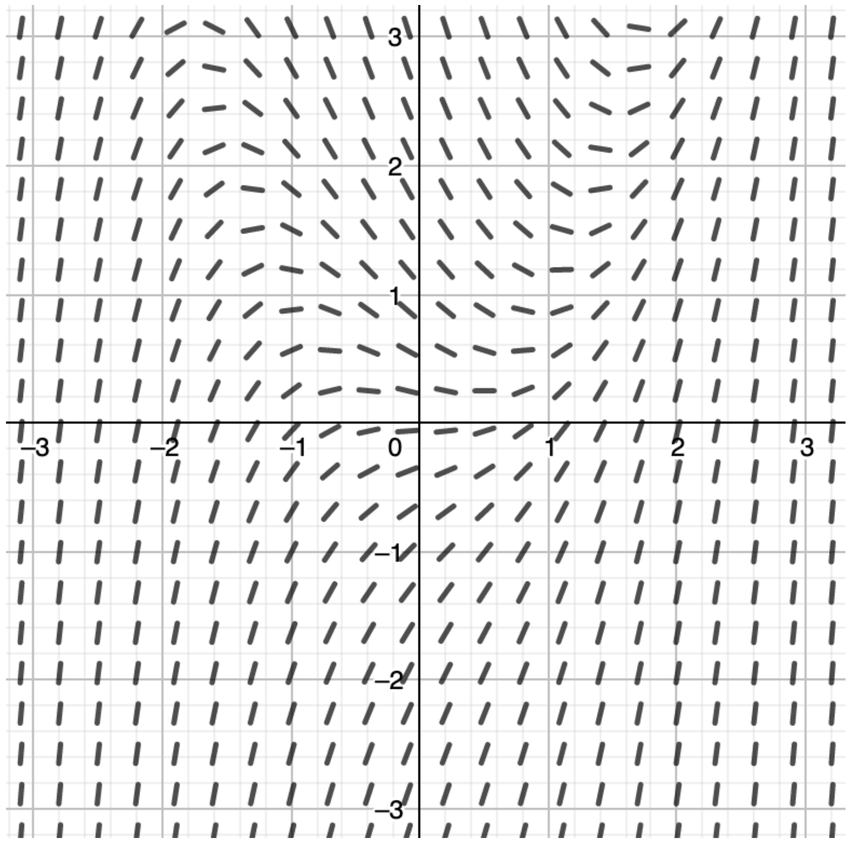
a) Den sidste. Altså $y' = x \cdot y^2$

Løsning 2.5.1

a) $y = c \cdot e^{-x} + x^2 - 2x + 2$

b) $y = x^2 - 2x - 3e^{-x} \cdot e^3 + 2$

c)



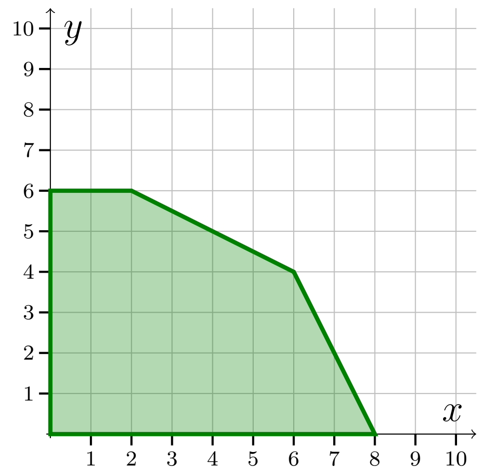
Løsning 2.7.1

a) Når y er lille vil $M - y \approx M$. Så ligningen kan skrives som $y' = a \cdot y \cdot M$. Denne ligning har form som $y' = k \cdot x$ og udtrykker altså eksponentiel vækst.

b) Når y er stor (dvs tæt på M) vil $M - y \approx 0$ og ligningen kan skrives som $y' = 0$, dvs. at når y er meget tæt på M er væksten meget tæt på 0 og funktionen er tilnærmelsesvis konstant. Altså nærmer funktionen sig linjen $y = M$.

Løsning 3.1.1

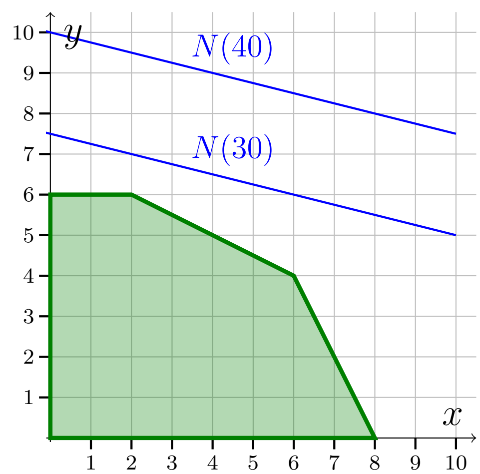
a)



Løsning 3.1.2

a) $x + 4y = 40$

b)

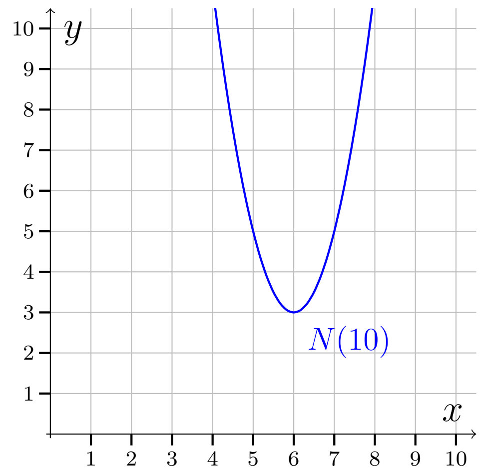


c) Maksimumspunktet er $(2, 6)$.

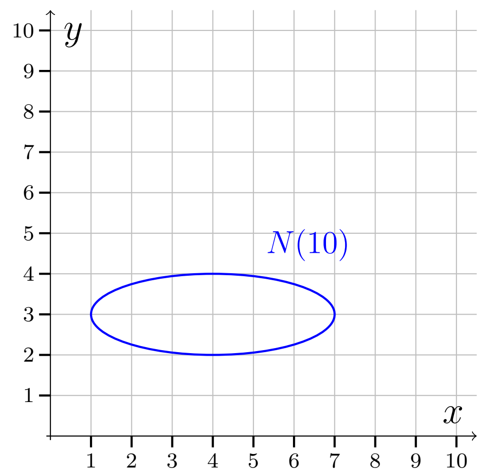
d) Maksimumsværdien er 26.

Løsning 3.1.3

a) Parabel:



b) Ellipse:



Løsning 3.1.4

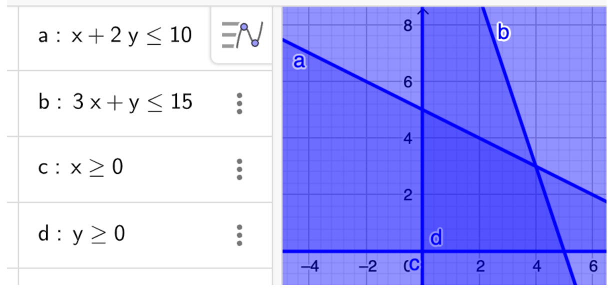
a) Cirkel

b) Ellipse

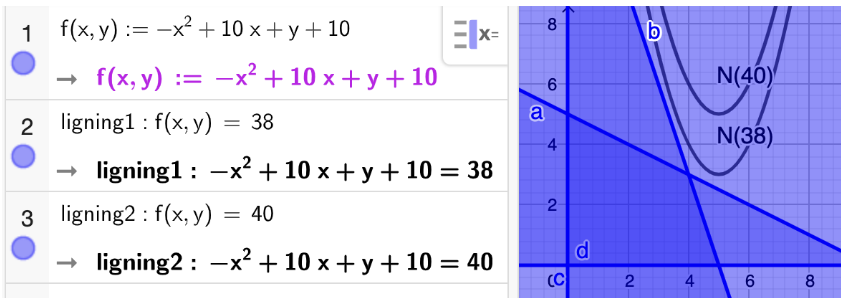
c) Parabel

Løsning 3.2.1

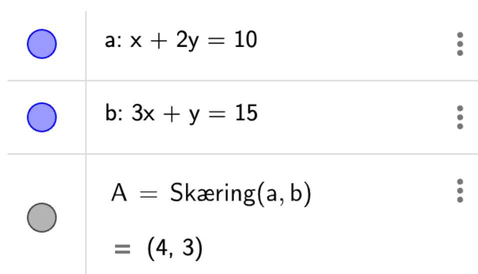
a) Polygonområdet er det mørkeste område:



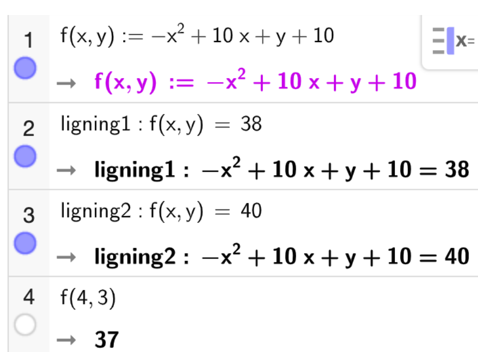
b) Det et CAS-vindue, jeg har skrevet i.



c) Jeg har valgt den dovne løsning med skæringsværktøjet:



d)



Løsning 3.2.2

a) Minimum er 11 og maksimum er 81

b) Minimum er -9 og maksimum er 36

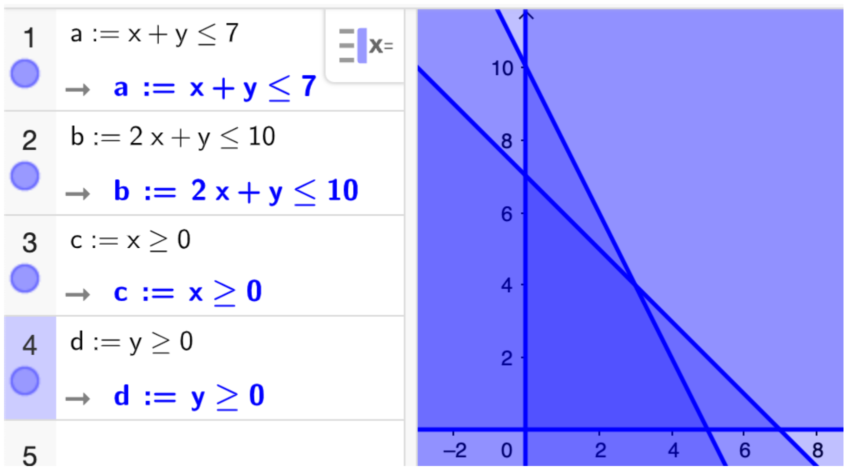
Løsning 3.2.3

a) Minimumspunktet er $(2, 4)$ og minimumsværdien 16.

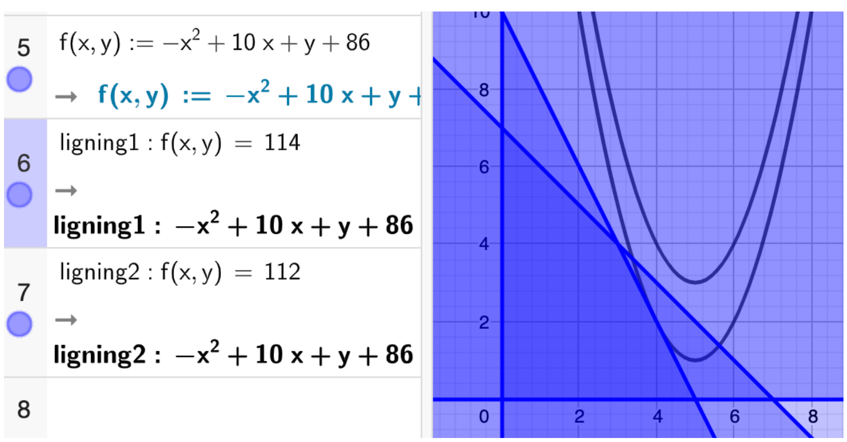
b) Maksimumspunktet er $(0, 0)$ og maksimumsværdien er 40

Løsning 3.2.4

a) Polygonområde er det mørkeste område:



b) Den øverste er $N(118)$ og den nederste er $N(112)$. Jeg prøvede mig frem for at finde to gode niveauer:

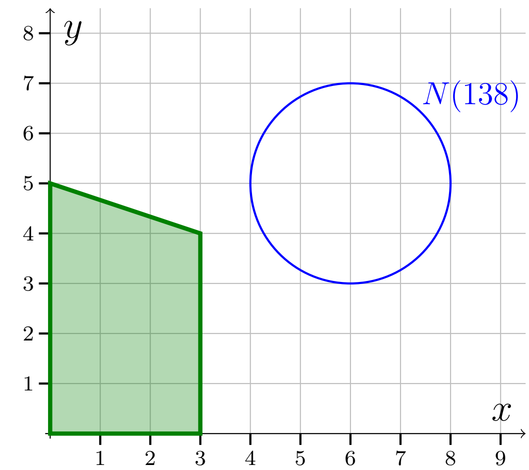


c) $(4, 2)$

d) 112

Løsning 3.3.1

a)

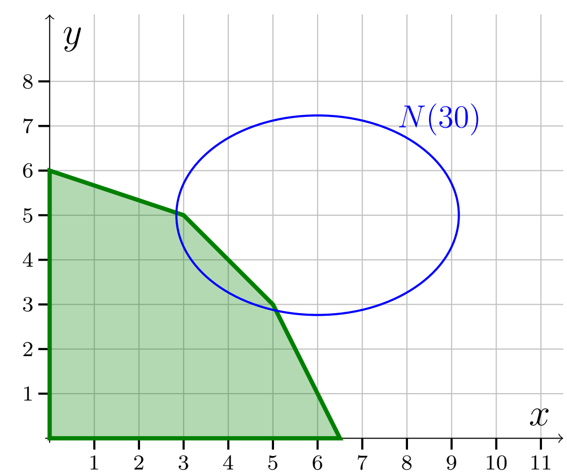


b) $(3, 4)$

c) 130

Løsning 3.3.2

a)

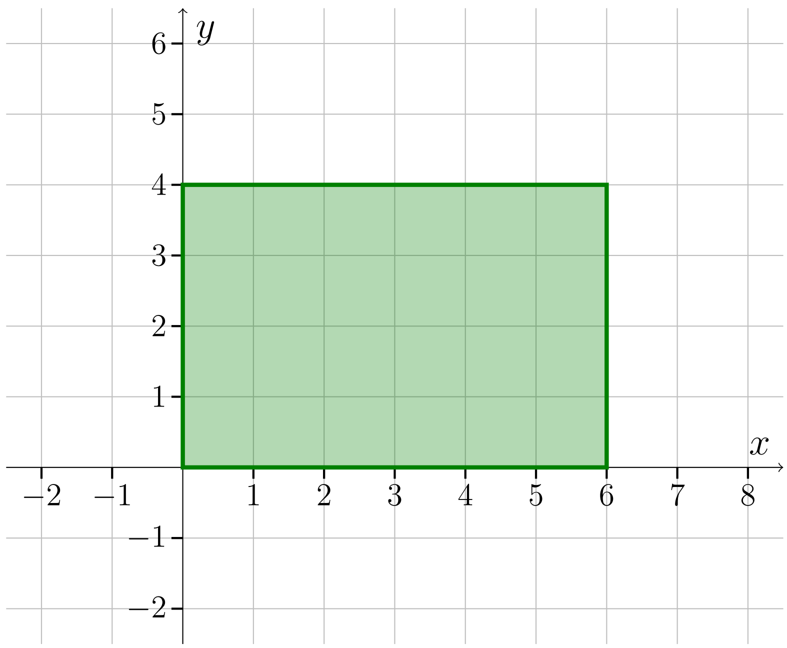


b) $(4, 4)$

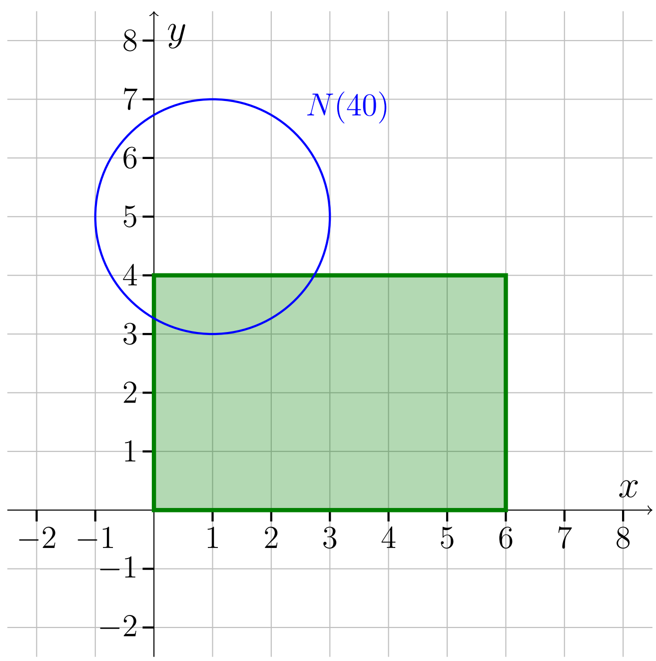
c) 26

Løsning 3.3.3

a)



b)



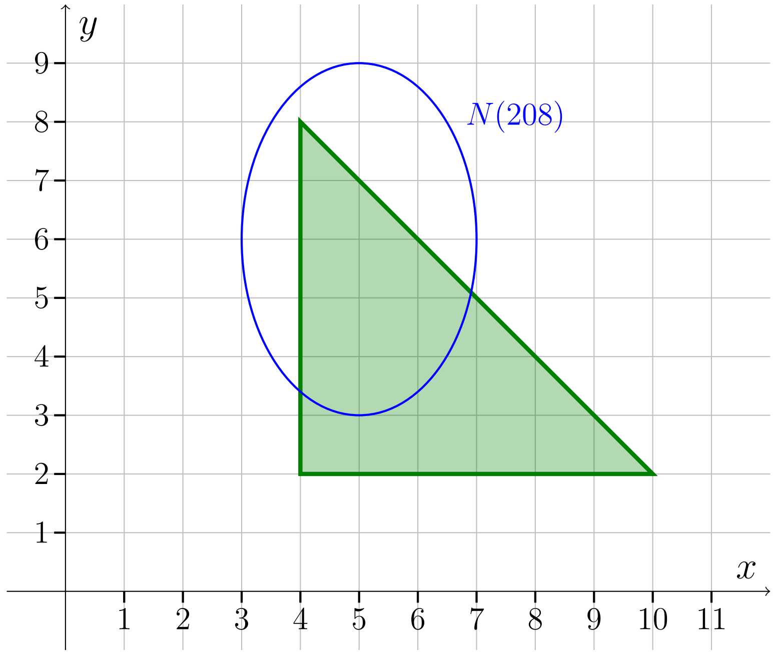
c) Det frie maksimum er 44 i punktet $(1, 5)$

d) Maksimum indenfor polygonområdet er 43 i punktet $(1, 4)$

e) Minimum indenfor polygonområdet er-6 i punktet $(6, 0)$.

Løsning 3.3.4

a)



b) Minimum for f er 100

Løsning 3.4.1

a) $x^2 + 9 + 6x$

b) $x^2 - 2x + 1$

c) $4q^2 + 4aq$

Løsning 3.4.2

Må jeg se?

Løsning 3.4.3

a) $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$

b) $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$

c) $x^2 + x = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

d) $x^2 - ax = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$

e) $x^2 - \frac{b}{a}x = (x - \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

Løsning 3.4.4

a) $x^2 - 10x + 5 = (x - 5)^2 - 20$

b) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Løsning 3.4.5

a) $2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2$

b) $\frac{1}{2}x^2 - x = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}$

c) $ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$

Løsning 3.4.6

a) $4x^2 - 24x + 4 = 4(x-3)^2 - 32$

b) $cy^2 + dy + e = c\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 - \frac{d^2}{4c} + e$

Løsning 3.5.1

a) $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

Løsning 3.5.2

a) Isolere vi y får vi $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Det er en lineær funktion, så det er ikke en parabel (husk at vi kræver at $a \neq 0$ i parablens ligning)

Løsning 3.5.3

a) nope

Løsning 3.5.4

Koefficienten a viser om parablen er konveks (glad) eller konkav (sur). Er a positiv er den konveks, ellers er den konkav. Derudover viser a hvor "spids"grafen er. Er a tæt på nul er parablen meget flad.

Koefficienten b har betydning for placeringen af grafen. Helt konkret viser den tangentens hældning i skæringspunktet med y-aksen.

Koefficienten c er angiver det sted hvor grafen skærer y-aksen. Men se kommentarer efter øvelsen.

Løsning 3.5.5

a) De har samme form, men den anden er forskudt med 5 nedad i forhold til den første.

Løsning 3.6.1

a) $(x-1)^2+(y-6)^2=9$

b) $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

c) $x^2+y^2=1$

Løsning 3.6.2

a) Centrum er $(7,4)$ og radius er 5

b) Centrum er $(-1,3)$ og radius er 1

c) Centrum er $(3,0)$ og radius er 2

Løsning 3.6.3

a) Det gør det ikke.

Løsning 3.6.4

a) $x^2+y^2+2x-4y=4$

Løsning 3.6.5

a) $(x-4)^2+(y+1)^2=3^2$

b) $(x-0)^2+(y-1)^2=1^2$

Løsning 3.6.6

a) Centrum er $(2,-1)$ og radius er 4.

b) Centrum er $(5,0)$ og radius er 10.

Løsning 3.6.7

a) $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

Løsning 3.6.8

a) $(x+5)^2+(y+3)^2=3^2$

b) $(x-2.5)^2+(y-1)^2=6^2$

Løsning 3.6.9

a) Centrum er $(-2, \frac{1}{3})$ og radius er 2.

Løsning 3.7.1

a) Den vandrette halvakse er 1, den lodrette halvakse er 2 og centrum er i punktet $(4, 2)$.

b) Den halve storakse er 2, den halve lilleakse er 1.

c) $a = 1$, $b = 2$, $x_0 = 4$ og $y_0 = 2$

Løsning 3.7.2

a) Centrum er $(9, 14)$, den vandrette halvakse er 5, den lodrette halvakse er 4.

b) Centrum er $(3, -2)$, den vandrette halvakse er 3, den lodrette halvakse er 6.

c) Centrum er $(5, 0)$, den vandrette halvakse er $\sqrt{5}$, den lodrette halvakse er 9.

d) Centrum er $(0, 0)$, den vandrette halvakse er 1, den lodrette halvakse er 2.

Løsning 3.7.3

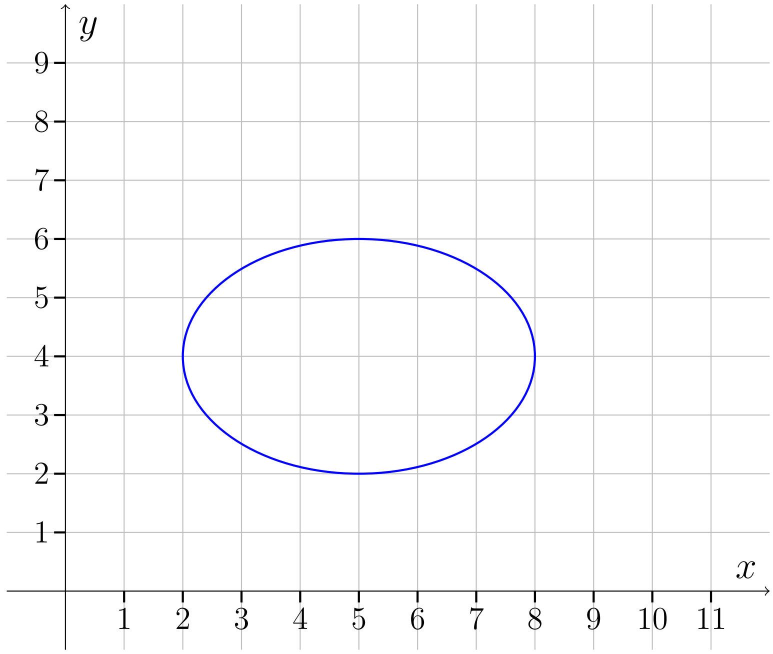
a) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

b) $x^2 + 4x + 4y^2 - 8y - 8 = 0$

c) Det gør det ikke.

Løsning 3.7.4

a)



Løsning 3.7.5

a) En cirkel. En cirkel er altså en særlig slags ellipse.

Løsning 3.7.6

a) Vis mig det.

b) Halvakserne er radius.

Løsning 3.7.7

a) Centrum er i $(3, 1)$, vandret halvakse er 4 og lodret halvakse er 2.

b) Centrum er i $(-1, 3)$, vandret halvakse er 2 og lodret halvakse er 5.

c) Centrum er i $(-2, -7)$, vandret halvakse er 1 og lodret halvakse er 3.

d) Centrum er i $(2, 0)$, vandret halvakse er 2 og lodret halvakse er 1.

Løsning 3.8.1

a) $y = 3x^2 - 2$

b) $y = 3x^2 - 4 + \frac{1}{3}t$

c) Vi ser at $N(t)$ er en parabel da ligningen har formen $y = ax^2 + bx + c$.

Løsning 3.8.2

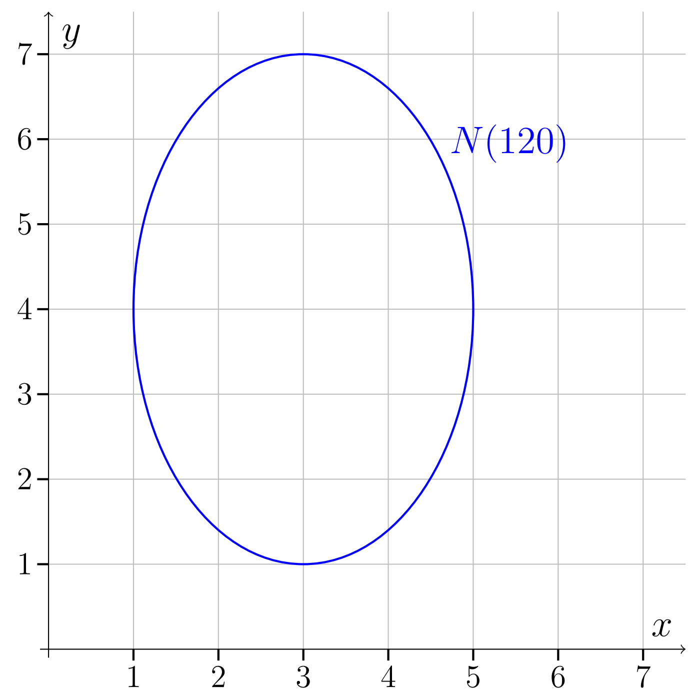
a) Ved at taste ligningen ind i GeoGebra og højreklikke kan den omskrives til ellipseform:

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{9}=1.$$

Altså er niveaukurven en ellipse.

b) Centrum er $(3,4)$, den vandrette halvakse er 2 og den lodrette halvakse er 3.

c)

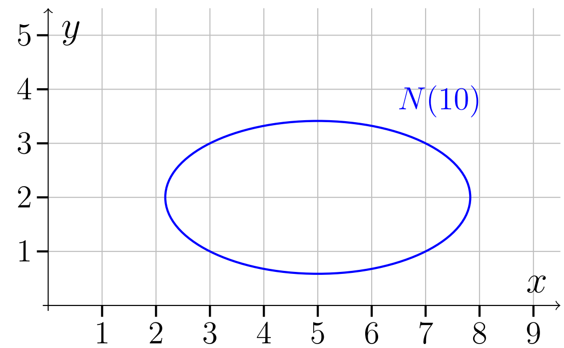


Løsning 3.8.3

a) Vi regner m og får 18. Da $a<0$ og $c<0$ kan vi ud fra sætning 3.8.2 konkludere at niveaukurverne $N(t)$ er ellipser for $t<18$

b) Da $10<18$ og $N(t)$ er en ellipse for $t<18$, må $N(10)$ være en ellipse.

c)



Løsning 3.8.4

a) Minimum

b) $(5, 5)$.

c) 0.

Løsning 3.8.5

a) Niveaukurverne er ellipser, men ikke cirkler, så a og c har samme fortegn, men er forskellige. Funktionen har et frit minimum, så $a > 0$ og $c > 0$.

b) Niveaukurverne er parabler, så $c = 0$. Da et højt niveau, svarer til en lav placering (langs y-aksen) af parablen må $d < 0$. Da der er tale om konvekse niveaukurver har a og d forskelligt fortegn, hvilket betyder at $a > 0$

c) Niveaukurverne er parabler, så $c = 0$. Da et højt niveau, svarer til en lav placering (langs y-aksen) af parablen må $d < 0$. Da der er tale om konkave niveaukurver har a og d samme fortegn, hvilket betyder at $a < 0$

d) Niveaukurverne er cirkler, så a og c er ens. Funktionen har et frit maksimum, så $a < 0$ og $c < 0$.

Løsning 3.9.1

a) Vis mig det.

Løsning 3.9.2

a) Vis mig det.

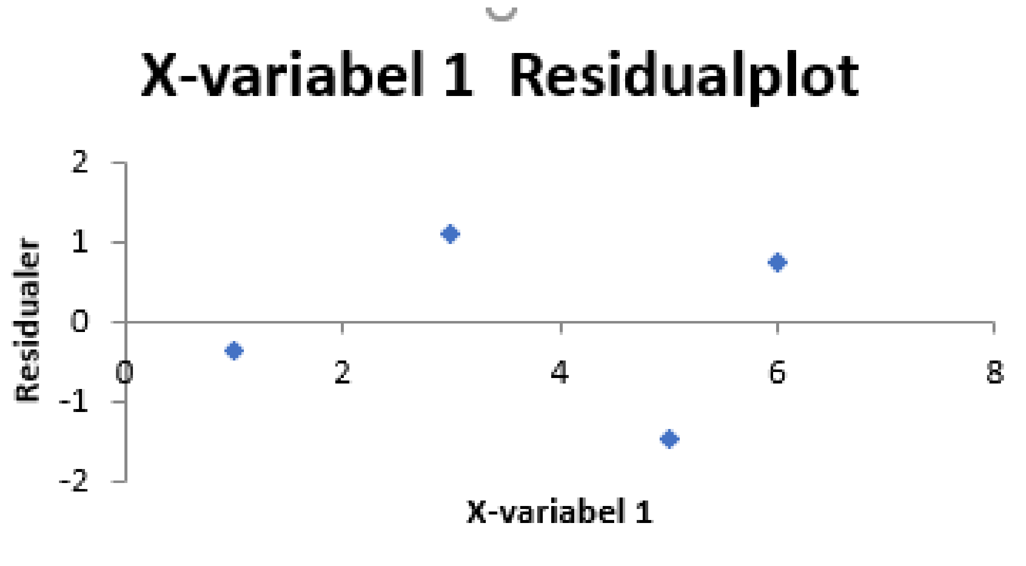
Løsning 4.2.1

a) $y = 0{,}78x + 1{,}58$

b) $R^2 = 0{,}69$

c)

Residualer
-0,35593
1,084746
-1,47458
0,745763



d) $[-2{,}89; 4{,}45]$

Løsning 4.4.1

a)

	Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3
Kolonne 1	1		
Kolonne 2	-0,35624	1	
Kolonne 3	0,190937	0,046533	1

b) Nej Der er ikke korrelation mellem de forklarende variable.

Løsning 4.5.1

a) Vi har følgende model:

$$\hat{y} = 2{,}0 + 0{,}35x_1 - 14x_2,$$

hvor $\hat{y}$ er den forventede karakter, x_1 er tiden brugt på lektier og x_2 er fraværet. Pga. antallet af observationer er det svært at sige om residualerne er normalfordelte samt om variansen er konstant, men det ser ok ud. Vi kan se at residualerne har en middelværdi på 0. Da der ikke er tale om en tidsserie undersøger vi ikke for uafhængighed mellem residualer. Der er ikke korrelation mellem de to forklarende variable. Da vi yderligere har en høj determinationskoefficient konkluderer vi, at vi har fundet en model som beskriver data godt.

Løsning 4.6.1

a) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 1$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -1$

b) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3x^2y^2$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2x^3y$

Løsning 4.6.2

De partielle afledede er:

a) $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 2 + b^2$ og $\frac{\partial f}{\partial b} f(p, q) = 2ab$

b) $\frac{\partial}{\partial p} f(p, q) = -3$ og $\frac{\partial}{\partial q} f(p, q) = e^q$

Løsning 4.6.3

a) $(-5, -5)$

b) $(1, 0)$

c) $(0, -1)$

Løsning 4.6.4

a) $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 10a - 8b + 22$ og $\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = -8a + 10b - 50$.

b) $(5, 9)$.

Løsning 4.7.1

a) $f(a, b) = (-a - b + 4)^2 + (-2a - b + 2)^2 + (-4a - b + 5)^2$

b) $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 42a + 14b - 56$
$\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 14a + 6b - 22$

c) $y = 0{,}5x + 2{,}5$

Løsning 4.7.2

a) $f(a, b) = (-b)^2 + (-a - b + 1)^2 + (-2a - b + 4)^2 + (-3a - b + 5)^2$

b) $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 28a + 12b - 48$
$\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 12a + 8b - 20$

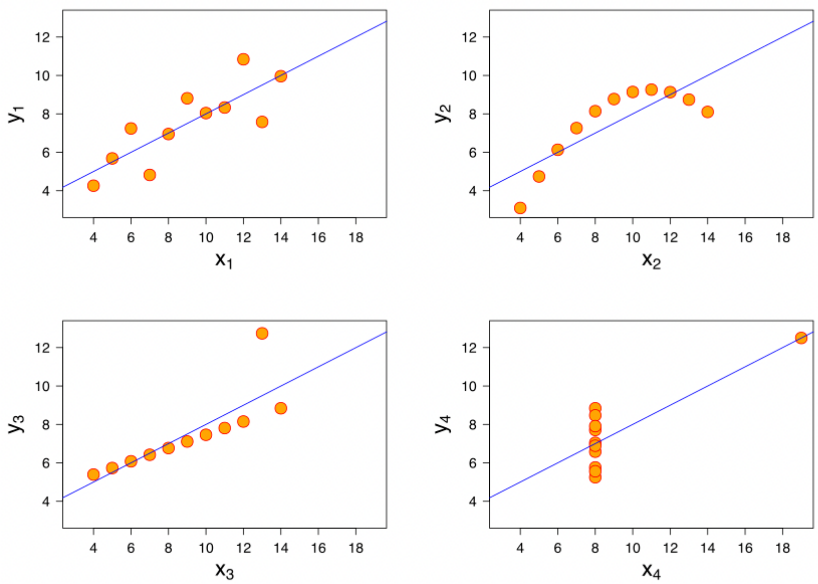
c) $y = 1{,}8x - 0{,}2$

d)

x_i	y_i	e_i
0	0	0,2
1	1	−0,6
2	4	0,6
3	5	−0,2

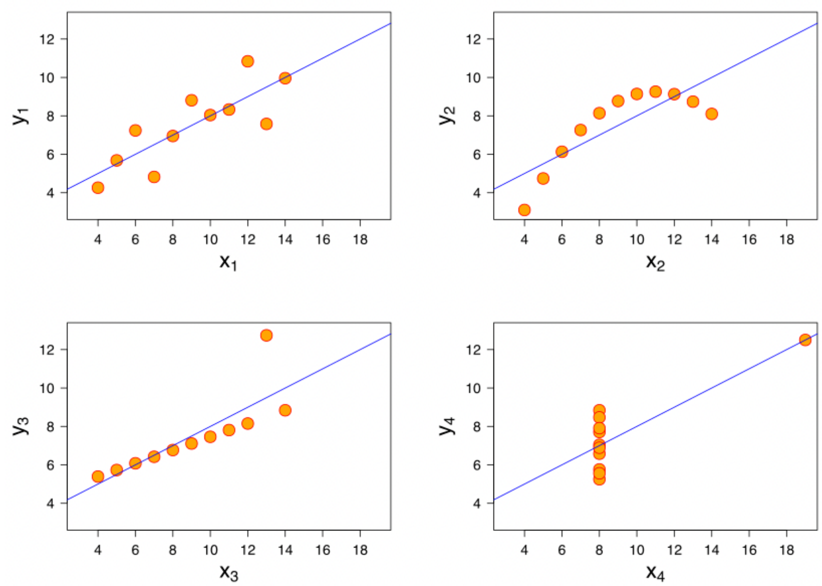
Løsning 4.8.1

a) Følgende regressionsmodeller har ifølge artiklen samme R^2:



Vi ser at data i det øverste højre hjørne følger en parabel, og beskrives derfor dårligt med den lineære model. Data øverst til venstre er til gengæld godt beskrevet med en lineær model. De har samme R^2 og det må betyde at vi har brug for mere end R^2 til at vurdere om vi har fat i den rigtige model.

b) Selvom R^2 er lav kan der godt være en klar lineær tendens. Data fra artiklen har $R^2 = 0{,}67$, hvilket jo ikke er super højt, men der er en klar lineær tendens i modellen øverst til venstre og derfor er det rimeligt at beskrive data med den lineære model.



Løsning 4.8.2

a) $R^2 = 0{,}25$, hvilket betyder at 25% af variationen i y-værdierne kan forklares ved hjælp af modellen.

Løsning 5.1.1

a) En eksponentiel funktion har forskriften $f(x) = b \cdot a^x$. Altså der byttet rundt på x og a.

Løsning 5.1.2

a) Potensfunktion, $a = 5$ og $b = 2$.

b) Potensfunktion, $a = 3$ og $b = 1$.

c) Ikke en potensfunktion.

d) Potensfunktion, $a = 1$ og $b = 1$

e) Ikke en potensfunktion.

f) Ikke en potensfunktion.

g) Potensfunktion, $a = 0$ og $b = 4$

h) Potensfunktion med $a = \frac{2}{3}$ of $b = 1$

i) Potensfunktion med $a = -4$ of $b = 7$

Løsning 5.1.3

a) Lineære funktioner $f(x) = ax + b$, hvor $b > 0$.

b) Polynomier, hvor koefficienten til højestegradsleddet er positiv og resten af koefficienterne er nul.

c) Alle positive konstante funktioner.

Løsning 5.1.4

a) $0 < a < 1$

b) $b = 3$

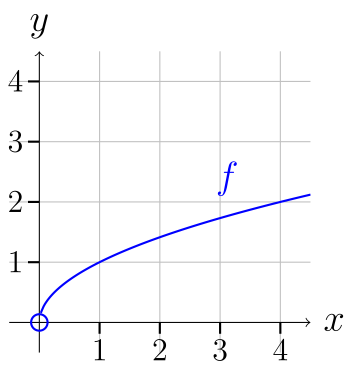
Løsning 5.1.5

a) $\mathrm{Dm}(f) =]0;\infty[$ og $\mathrm{Vm}(f) =]0;\infty[$

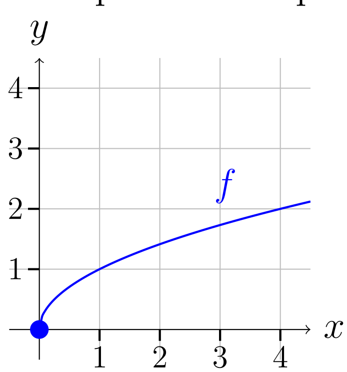
b) $\mathrm{Dm}(f) =]0;\infty[$ og $\mathrm{Vm}(f) = b$

Løsning 5.1.6

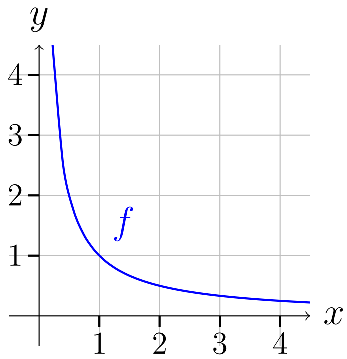
a) Opfattet som potensfunktion:



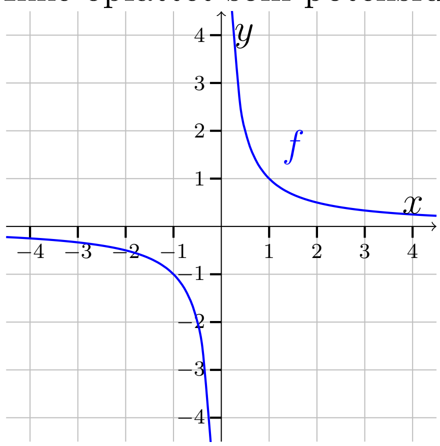
Ikke opfattet som potensfunktion:



b) Opfattet som potensfunktion:



Ikke opfattet som potensfunktion:



Denne graf kaldes også for en hyperbel.

Løsning 5.1.7

a) $x = 3{,}05$

b) $x = 4{,}35$

Løsning 5.1.8

a) $f(x) = 3x^2$

Løsning 5.1.9

a) $a = 0{,}66,\ b = 0{,}085$

b) 1,89 kg.

c) 70 kg.

Løsning 5.2.1

a) Selvfølgelig har jeg ret.

b) Ja

c) Nej, men y-værdierne ville så bare få en anden fast procentvis vækst.

Løsning 5.2.2

a) 10%

b) 100%

c) $f(120) = 242$

Løsning 5.2.3

a) $n(x) = 267793x^{-0{,}766}$

b) ca. 157.000 (modellen giver 157.421)

c) De tjente over $1,5 mio. (modellen giver 1470434).

Løsning 5.2.4

a)

	y-vækst: fast værdi	y-vækst: fast procent
x-vækst: fast værdi	Lineær	Eksponentiel
x-vækst: fast procent	Logaritmisk	Potens

Løsning 5.3.1

a) Vi starter med at vise at f går igennem punktet $(1, b)$. Det er nemt. Vi regner bare funktionsværdien i $x = 1$: $f(1) = b \cdot 1^a = b$ Altså går grafen igennem punktet $(1, b)$.

Vi vil nu vise vækstegenskaben. Vi vælger et vilkårligt x_0. Lader vi x_0 vokse med med $r \cdot 100\%$, bliver x_0 til $x_0 \cdot (1+r)$. Vi regner nu den procentvise vækst (som decimaltal) i y-værdierne:

$$\frac{\text{ny} - \text{gammel}}{\text{gammel}}$$

Vi skal finde væksten fra $f(x_0)$ til $f\left(x_0 \cdot (1+r)\right)$, så vi skal regne

$$\frac{f\left(x_0 \cdot (1+r)\right) - f(x_0)}{f(x_0)}$$

Vi indsætter forskriften:

$$\frac{b \cdot (x_0 \cdot (1+r))^a - b \cdot x_0^a}{b \cdot x_0^a}$$

og forkorter med b:

$$\frac{(x_0 \cdot (1+r))^a - x_0^a}{x_0^a}$$

Vi bruger potensregnereglen $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$:

$$\frac{x_0^a \cdot (1+r)^a - x_0^a}{x_0^a}$$

og forkorter med x_0^a:

$$((1+r)^a - 1)$$

Altså er den procentvise vækst $((1+r)^a - 1) \cdot 100\%$, hvilket var det vi gerne ville vise.

Løsning 5.3.2

a) Øv - intet facit. Vis det til din lærer og han/hun bliver imponeret. Det gør jeg i hvert fald.

Løsning 6.1.1

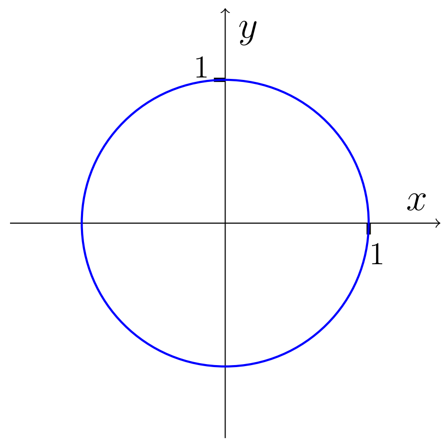
a) Det er en cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius $r = 1$.

Løsning 6.1.2

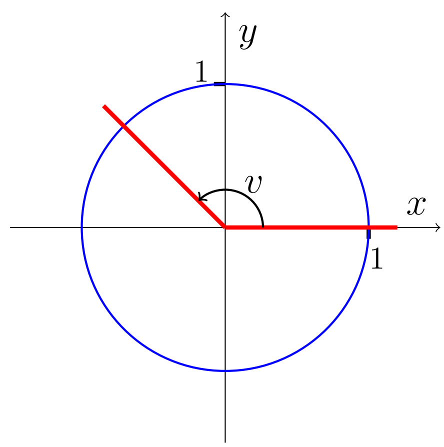
a) Vi ved at omkredsen af en cirkel er bestemt ved formlen $O = 2\pi r$ og da radius i enhedscirklen er 1, må enhedscirklesn omkreds være $O = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$

Løsning 6.1.3

a)

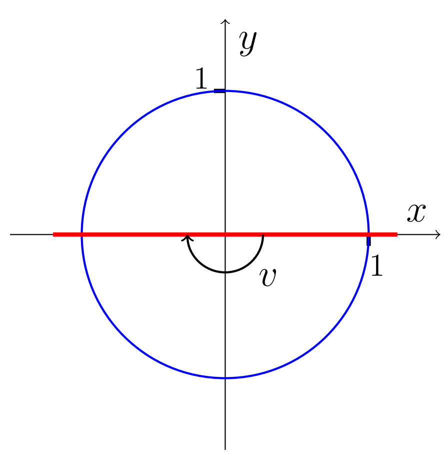


b)



Løsning 6.1.4

a)



Løsning 6.1.5

a) $R_v = (0, 1)$

b) $R_v = (-1, 0)$

c) $R_v = (0, -1)$

d) $R_v = (1, 0)$

e) $R_v = (0, -1)$

Løsning 6.1.6

a) $v = \frac{\pi}{2}$

b) $v = \pi$

c) $v = 0$.

d) $v = -\frac{\pi}{4}$.

Løsning 6.1.7

a) $(0, 1)$

b) $(-1, 0)$

c) $(0, 1)$.

d) ca. $(-0{,}4; -0{,}9)$.

Løsning 6.1.8

a) Sådan her.

x	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

Løsning 6.2.1

a) $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$ og $\tan(\pi) = 0$

b) $\cos(-2\pi) = 1$, $\sin(-2\pi) = 0$ og $\tan(-2\pi) = 0$

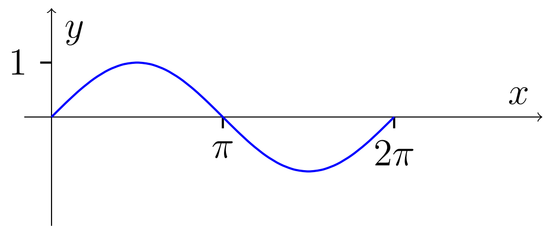
c) $\cos(135°) = -0{,}7$, $\sin(135°) = 0{,}7$ og $\tan(135°) = -1$

d) $\cos(-2) = -0{,}4$, $\sin(-2) = -0{,}9$ og $\tan(-2) = 2{,}2$

e) $\cos(90°) = 0$, $\sin(90°) = 1$ og tangens er ikke defineret.

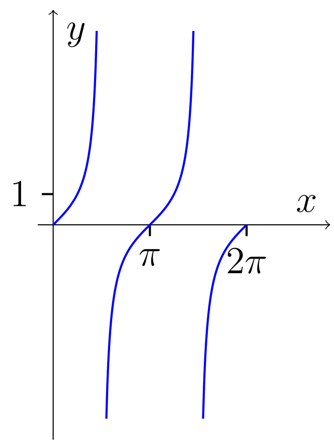
Løsning 6.2.2

a)



$f(x) = \sin(x)$

b)



$f(x) = \tan(x)$

Løsning 6.2.3

a) Perioden for sinus er 2π

b) Perioden for tangens er π.

Løsning 6.3.1

a) $\cos(45°) = 0{,}71$

b) $\sin(90°) = 1$

c) $\sin(90) = 0{,}89$

d) $\tan(-2) = 2{,}19$

Løsning 6.3.2

a) Definitionsmængde: $[0;20[$

b) Værdimængde: $[-2;6]$

c) Nulpunkter: $x = 6{,}76$, $x = 10{,}95$ og $x = 19{,}33$

d) Fortegnsvariation:

f er positiv i $]0;6{,}76[\cup]10{,}95;19{,}33[$

f er negativ i $]6{,}76;10{,}95[$

f er nul i $x = 6{,}76,\ x = 10{,}95$ og $x = 19{,}33]$

e) Monotoniforhold:

f er voksende i $[0;2{,}58]$ og $[8{,}86;15{,}14]$

f er aftagende i $[2{,}58;8{,}86]$ og $[15{,}14;20[$

f) Ekstrema:

f har globalt maksimum i $x = 2{,}58$ og $x = 15{,}14$ med maksimumsværdi 6.

f har lokalt minimum i $x = 0$ med minimumsværdi 3,12.

f har global minimum i i 8,86 med minimumsværdi -2.

g) Krumningsforhold:

f er konkav i i $[0;5{,}72]$ og $[12;18{,}28]$

f er konveks i $[5{,}72;12{,}18]$ og $[18{,}28;20[$

h) Vendetangenter:

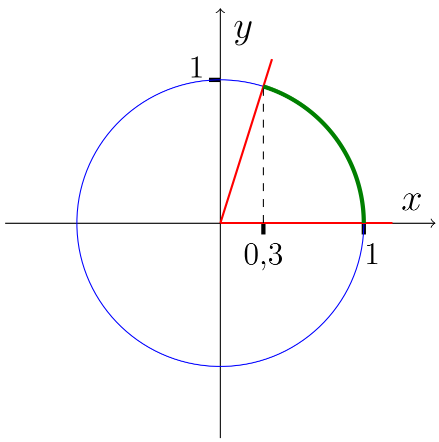
$y = -2x + 13{,}43$

$y = 2x - 22$

$y = -2x + 38{,}57$

Løsning 6.3.3

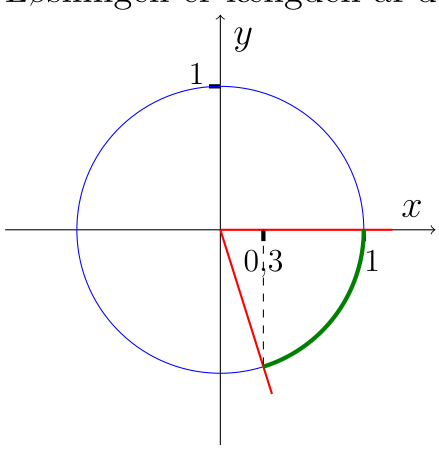
a) Løsningen er længden af det grønne stykke:



b) $x = 1{,}3$

c) $x = 1{,}27$

d) Løsningen er længden af det grønne stykke MEN, med negativt fortegn:

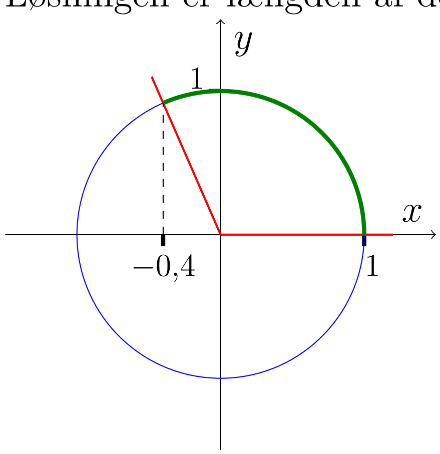


Løsningen er $x = -1{,}27$

e) $x = 1{,}27 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -1{,}27 + p \cdot 2\pi$

Løsning 6.3.4

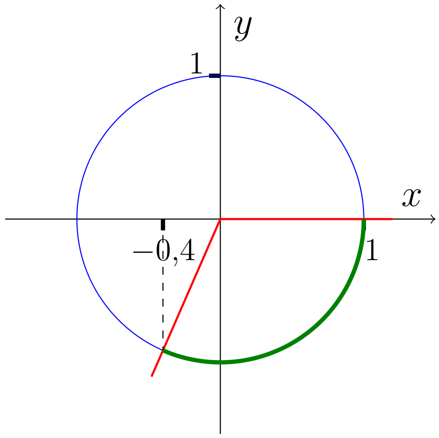
a) Løsningen er længden af det grønne stykke:



b) $x = 2$

c) $x = 1{,}98$

d) Løsningen er længden af det grønne stykke, MEN med negativt fortegn:

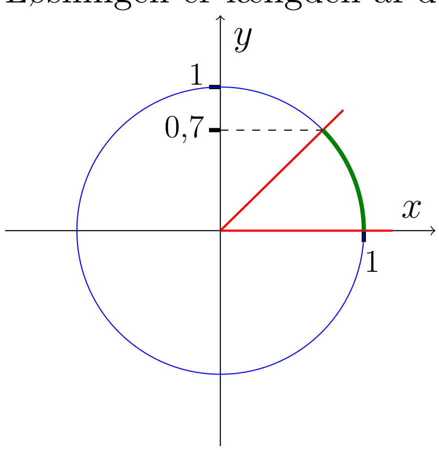


Løsningen er $x = -1{,}98$

e) $x = 1{,}98 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -1{,}98 + p \cdot 2\pi$

Løsning 6.3.5

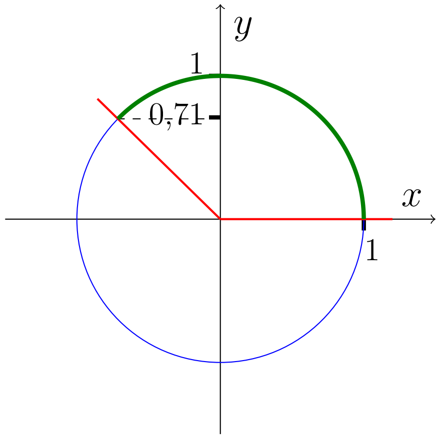
a) Løsningen er længden af det grønne stykke:



b) $x = 0{,}8$

c) $x = 0{,}78$

d) Løsningen er længden af det grønne stykke:



Løsningen er $x = 2{,}37$

e) $x = 0{,}78 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = 2{,}37 + p \cdot 2\pi$

Løsning 6.3.6

a) $x = -0{,}64 + p \cdot 2\pi \vee x = 0{,}64 + p \cdot 2\pi$

b) $x = -1{,}98 + p \cdot 2\pi \vee x = 1{,}98 + p \cdot 2\pi$

c) $x = 0{,}64 + p \cdot 2\pi \vee x = 2{,}50 + p \cdot 2\pi$

d) $L = \emptyset$

e) $\tan(x) = 1{,}11 + p \cdot \pi$

Løsning 6.3.7

a) $x_1 = -1{,}02$ og $x_1 = 0{,}02$

Løsning 6.3.8

a) $f'(x) = -\sin(x)$

b) $f'(x) = \cos(x)$

c) $f'(x) = \cos(x) \cdot x + \sin(x)$

d) $f'(x) = -10\sin(2x - 1)$

Løsning 6.3.9

a) Se øvelse 6.3.2

Løsning 6.5.1

a) $a = 6{,}76$

b) Den modstående katete er 1,81 og den sidste vinklen er 75°

Løsning 6.5.2

a) $v = 53{,}13°$

b) Den sidste vinkel er 36,87° og hypotenusen er 5

Løsning 6.5.3

a) $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}$ (der er ikke nogle tal som man ikke kan sætte ind i forskriften)

b) $\mathrm{Vm}(f) = [-7; 7]$

Løsning 6.5.4

a) $a = 2$

b) $T = \frac{\pi}{2}$

c) $b = 4$

Løsning 6.5.5

a) Betragt et vilkårligt tidsrum Δt. Frekvensen angiver antallet af svingninger på et sekund, så den må være givet ved

$$f = \frac{\text{Antal svingninger i løbet af } \Delta t}{\Delta t}$$

Hvis nu vælger $\Delta t = T$ får vi

$$f = \frac{\text{Antal svingninger på en periode}}{T}$$

men på en periode er der pr. definition 1 svingning, så

$$f = \frac{1}{T}$$

Løsning 6.5.6

a) Frekvensen f kan regnes ud fra perioden T med formlen:

$$f = \frac{1}{T}$$

Perioden kan regnes ud fra vinkelfrekvensen ved $T = \frac{2\pi}{b}$, så det kan vi indsætte i stedet for perioden:

$$f = \frac{1}{\frac{2\pi}{b}}$$

Vi forlænger den store brøk med b:

$$f = \frac{b}{2\pi}$$

Løsning 6.5.7

a) $a = 3$

b) $T = 4\pi$

c) $b = 0{,}5$

d) $c = -\frac{\pi}{2}$

Løsning 6.5.8

a) Grafen forskydes med d langs y-aksen. Er d positiv forskydes grafen op, ellers forskydes den ned.

b) $d = 1$

c) $T = 8\pi$

d) $a = 3$, $b = 0.25$, $c = 0{,}75\pi$

e) $f = \frac{1}{8\pi}$

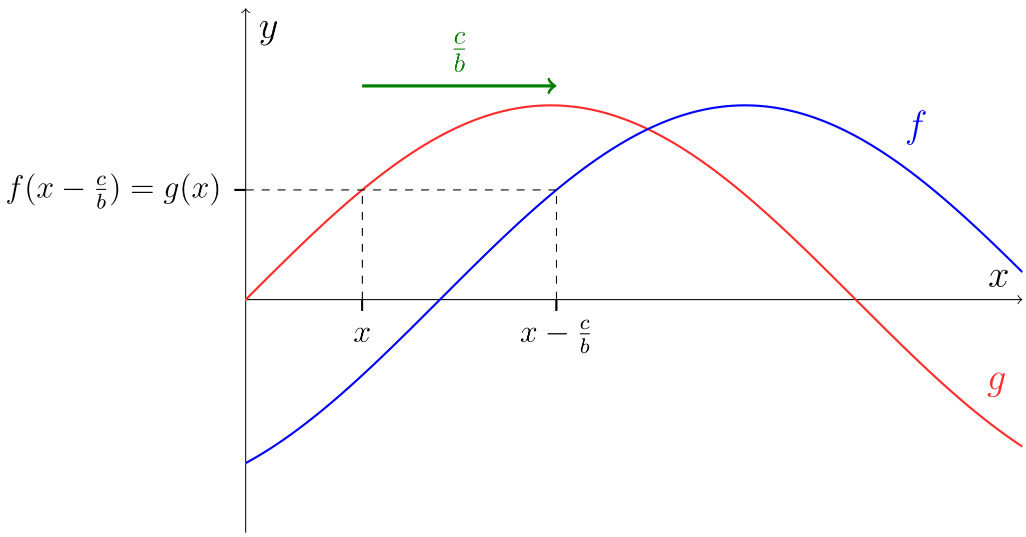
Løsning 6.5.9

a) Vis mig det.

b) Vis mig det.

Løsning 6.5.10

a) Sådan her f.eks:

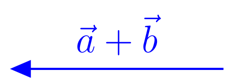


Løsning 7.1.1

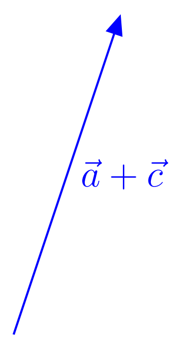
a) 4

Løsning 7.1.2

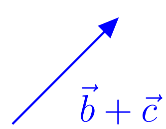
a)



b)

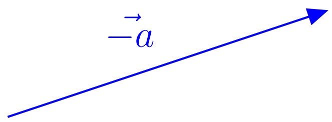


c)



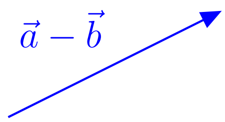
Løsning 7.1.3

a)

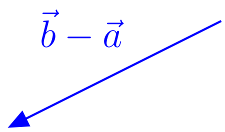


Løsning 7.1.4

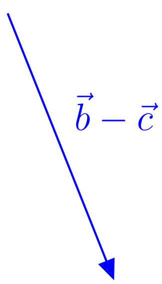
a)



b)

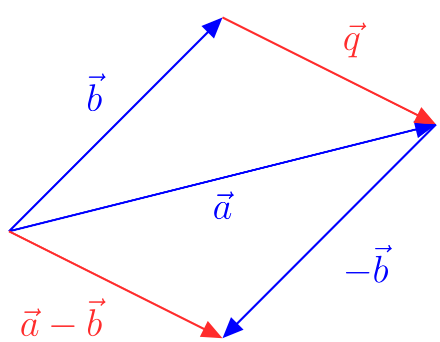


c)



Løsning 7.1.5

a) Betragt figuren:

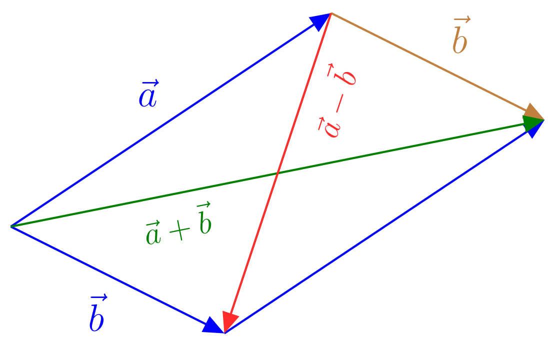


Jeg har placeret $\vec{a}-\vec{b}$ som vi pr. definition konstruerer den. Da $\vec{b}$ og $-\vec{b}$ er parallelle og lige lange er figuren et parallelogram. Det følger at de to røde vektorer peger i samme retning og er lige lange, og derfor er $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

Løsning 7.1.6

a) Vi har allerede (øvelse 7.1.5) gjort rede for at $\vec{a} - \vec{b}$ ligger som den røde vektor.

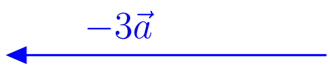
Da figuren er et parallelogram må $\vec{b}$ også ligge som vist her med brun:



Nu ligger $\vec{b}$ i forlængelse af $\vec{a}$ og derfor må den grønne vektor være $\vec{a} + \vec{b}$.

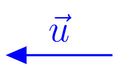
Løsning 7.1.7

a)



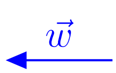
Løsning 7.1.8

a) $\vec{u} = -\vec{a}$



b) $\vec{v} = \vec{0}$

c) $\vec{w} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$



Løsning 7.1.9

a) En vektor er et objekt med en størrelse og en retning

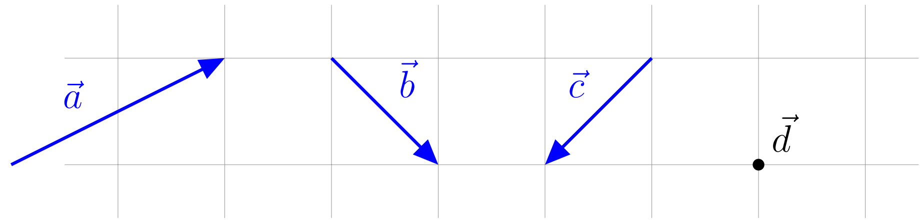
b) Nulvektoren er en vektor med længde på nul. Den tegnes som en prik.

c) En egentlig vektor er en vektor som ikke er nulvektoren, dvs. den en længde der er større end nul.

d) En repræsentant for en vektor er når vi tegner vektoren en i et koordinatsystem. Vi kan lægge den alle steder og derfor er der uendelige mange repræsentanter for en givet vektor.

Løsning 7.2.1

a)



Løsning 7.2.2

a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Løsning 7.2.3

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Løsning 7.2.4

a) $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 5$

Løsning 7.2.5

a) $a_2 = 12$

Løsning 7.2.6

a) $|\vec{a}| = 1$

b) $|\vec{b}| = \sqrt{5}$

c) $|\vec{c}| = 2$

Løsning 7.3.1

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

Løsning 7.3.2

a) $a_1 = -4$

Løsning 7.3.3

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$

b) $(2\vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{a}) = 3(\vec{a} \cdot \vec{b})$

c) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Løsning 7.3.4

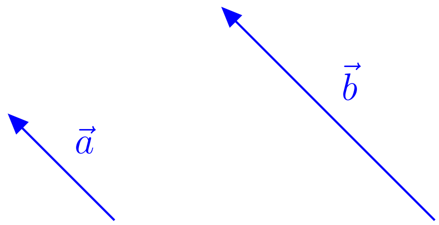
a)

$$
\begin{aligned}
|\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
&= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}
\end{aligned}
$$

Løsning 7.3.5

F.eks.

a)



b)

c)

d)

Løsning 7.3.6

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

Løsning 7.3.7

a) Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 78,46°

Løsning 7.3.8

a) Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 109,44°

Løsning 7.3.9

a) Du viser mig løsningen

Løsning 7.3.10

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}| = 10 \cdot 4 = 40.$

Løsning 7.3.11

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}| \approx -2{,}6 \cdot 5{,}4 \approx -14.$

Løsning 7.4.1

a) $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Løsning 7.4.2

a)

$$\begin{aligned}\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} &= \widehat{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= -\, b_2 \cdot a_1 + b_1 \cdot a_2\end{aligned}$$

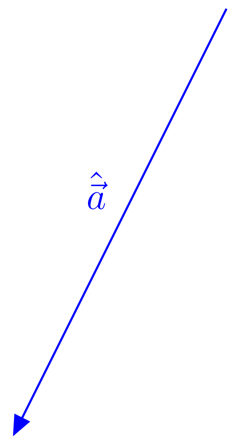
og

$$\begin{aligned}-\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} &= -\widehat{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= -\left(-a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2\right) \\ &= a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2\end{aligned}$$

Vi ser at de to resultater er ens og vi konkluderer at $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$.

Løsning 7.4.3

a)



Løsning 7.4.4

a) $A = 1$

Løsning 7.4.5

a) $A = \frac{1}{2}$

Løsning 7.4.6

a) Du viser mig det.

Løsning 7.5.1

a) Vi skal vise at $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{b} \cdot \vec{a})$.

Venstre side:

$$\begin{aligned}(t\vec{a}) \cdot \vec{b} &= \left(t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= ta_1 b_1 + ta_2 b_2\end{aligned}$$

Højre side:

$$\begin{aligned} t(\vec{a}\cdot\vec{b}) =& t\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) \\ =& t(a_1b_1 + a_2b_2) \\ =& ta_1b_1 + ta_2b_2 \end{aligned}$$

Vi ser at de to sider er ens.

Løsning 7.5.2

a) Vi skal vise at $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$.

Venstre side:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) =& \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) \\ =& \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} \\ =& a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) \\ =& a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 \end{aligned}$$

Højre side:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} =& \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ =& a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2 \end{aligned}$$

Vi ser at de to sider er ens.

Løsning 7.5.3

a) Vis skal vise at $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Venstre side:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{a} = & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
= & a_1 a_1 + a_2 a_2 \\
= & a_1^2 + a_2^2
\end{aligned}$$

Højre side:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2 = & \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 \\
= & a_1^2 + a_2^2
\end{aligned}$$

Vi ser at de to sider er ens og alt er godt.

Indeks