

Euclids algoritme

For at bestemme $\text{sfd}(a, b)$, hvor det her antages at $a \geq b$, benyttes nedenstående algoritme. Først bruges division med rest på parret a, b .

$$a = k_0 \cdot b + r_0, \quad \text{hvor } 0 \leq r_0 < b$$

Hvis $r_0 = 0$ stopper vi. Ellers bruges division med rest på parret b, r_0 :

$$b = k_1 \cdot r_0 + r_1, \quad \text{hvor } 0 \leq r_1 < r_0$$

Sådan fortsættes indtil resten bliver 0:

$$r_0 = k_2 \cdot r_1 + r_2, \quad \text{hvor } 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = k_3 \cdot r_2 + r_3, \quad \text{hvor } 0 \leq r_3 < r_2$$

$$r_2 = k_4 \cdot r_3 + r_4, \quad \text{hvor } 0 \leq r_4 < r_3$$

\vdots

$$r_n = k_{n+2} \cdot r_{n+1} + 0$$

Her skal man lægge mærke til, hvornår algoritmen *afsluttes*, nemlig når der er en rest på 0. Det sker efter et endeligt antal trin, da der kun kan være endeligt mange tal i rækken af rester.

Det tal vi bestemmer ved Euklids algoritme er den største fælles divisor $\text{sfd}(a, b) = r_{n+1}$.

Eksempel på Euklids algoritme

Bestem $\text{sfd}(252, 198)$ ved brug af Euklids algoritme.

$$252 = 1 \cdot 198 + 54$$

$$198 = 3 \cdot 54 + 36$$

$$36 = 2 \cdot 18 + 0$$

Dermed er det bestemt at $\text{sfd}(252, 198) = 18$

Sætning 1.7. Den sidste positive rest r_{n+1} i Euklids algoritme for to naturlige tal $a \geq b$ er deres største fælles divisor. Altså $\text{sfd}(a, b) = r_{n+1}$

Euklids algoritme - opgaver

Bestem ved at bruge Euklids algoritme $\text{sfd}(124, 28)$, $\text{sfd}(1001, 715)$ og $\text{sfd}(544, 119)$.

Metoden er effektiv til at bestemme største fælles divisor for meget større tal, hvor det er meget vanskeligt at undersøge svaret ved at prøve sig frem. Det kan eksempelvis være $\text{sfd}(105063, 67578)$. Ved brug af algoritmen kan man med syv trin bestemme $\text{sfd}(105063, 67578) = 21$.

1.1.2 Ræsonnement for Euklids algoritme - taleksempel

Med et taleksempel og Sætning 1.4, Sætning 1.5 og Sætning 1.6 kan vi ræsonnere os frem til algoritmen. Lad os bestemme $\text{sfd}(84, 30)$. Vi starter med division med rest af 84 med 30, hvilket giver os:

$$84 = 2 \cdot 30 + 24$$

Nu kommer et centralt argument.

Fra Sætning 1.6 ved vi, at hvis d deler 30 så deler d også $2 \cdot 30$.

Fra Sætning 1.5 følger derfor, at hvis d deler både 84 og 30, så deler d også $84 - 2 \cdot 30 = 24$.

Så hvis et tal deler 84 og 30, så deler det også 24.

Derfor er enhver fælles divisor for 84 og 30 også en fælles divisor for 30 og 24.

Algoritmen fortsætter. Vi bruger igen division med rest. Denne gang på parret 30,24:

$$30 = 1 \cdot 24 + 6$$

Da $30 - 24 = 6$, vil enhver fælles divisor for 30 og 24 også dele 6 (Sætning 1.5).

Algoritmen fortsætter. Vi bruger igen division med rest. Denne gang på parret 24,6:

$$24 = 4 \cdot 6 + 0$$

Resten er 0, og vi stopper, og derfor er $\text{sfd}(24, 6) = 6$.

Betragt nu algoritmen bagfra.

Omvendt gælder det også, at 6 deler 6 og 24, da vi har

$$24 = 4 \cdot 6$$

Ved brug af Sætning 1.4 gælder derfor, at 6 også deler 30 da

$$6 + 24 = 30$$

Da 6 deler 24, følger det igen ved Sætning 1.4 og Sætning 1.6, at 6 deler

$$24 + 2 \cdot 30 = 84$$

Altså deler 6 både 84 og 30.

Vi har altså vist, at hvis et tal deler både 84 og 30, så deler det også 6. Derfor kan ingen fælles divisor for 84 og 30 være større end 6.

Omvendt har vi set, at 6 selv deler både 84 og 30. Altså er $\text{sfd}(84, 30) = 6$.

Taleksemplet illustrerer det ræsonnement, som i almindelighed ligger bag Euklids algoritme, og som formuleres i Sætning 1.7.